



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE INFORMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

GUSTAVO OLIVEIRA

**ESTUDO DO IMPACTO DA TRANSFORMADA DE RADON E DA
RAZÃO CRUZADA EM UM OBJETO PLANAR APÓS SOFRER UMA
TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA PARA APLICAÇÃO EM
CLASSIFICADORES DE LOGOMARCAS**

RECIFE

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE INFORMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

GUSTAVO OLIVEIRA

**ESTUDO DO IMPACTO DA TRANSFORMADA DE RADON E DA
RAZÃO CRUZADA EM UM OBJETO PLANAR APÓS SOFRER UMA
TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA PARA APLICAÇÃO EM
CLASSIFICADORES DE LOGOMARCAS**

Monografia apresentada ao Centro de Informática (CIN) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), como requisito parcial para conclusão do Curso de Engenharia da Computação, orientada pelo professor Silvio Melo.

RECIFE

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE INFORMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

GUSTAVO OLIVEIRA

**ESTUDO DO IMPACTO DA TRANSFORMADA DE RADON E DA
RAZÃO CRUZADA EM UM OBJETO PLANAR APÓS SOFRER UMA
TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA PARA APLICAÇÃO EM
CLASSIFICADORES DE LOGOMARCAS**

Monografia submetida ao corpo docente da Universidade Federal de Pernambuco, defendida e aprovada em 14 de Dezembro de 2017.

Banca Examinadora:

Orientador

Silvio Melo

Doutor

Examinador

Nivan Ferreira

Doutor

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Silvio de Barros Melo, que me conduziu neste trabalho e que foi o maior responsável por fazer eu me apaixonar pela área de Mídias e Interação.

Ao meu coorientador, Gustavo Charamba, por ser solícito quando precisei ao longo desse período de TG.

"É melhor lançar-se à luta em busca do triunfo, mesmo expondo-se ao insucesso, do que ficar na fila dos pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, por viverem nessa penumbra cinzenta de não conhecer vitória e nem derrota"

Franklin D. Roosevelt

RESUMO

Este trabalho mostra o impacto da transformada de Radon em um objeto planar após sofrer uma transformação projetiva e o quanto a razão cruzada sofre com a discretização dos pixels. O algoritmo foi implementado em MatLab. Para gerar as deformações para experimento foram utilizadas duas grandezas que podem variar linearmente, são elas o *azimute* e o *elevação*. Para discretização dos pontos escolhidos em um raio, foi utilizado o algoritmo de Bresenham. Para pequenas deformações (menor ou igual a 10°) a transformada de Radon se mostrou eficiente e para grandes deformações a discretização não teve um impacto negativo expressivo.

Palavras-chave: descritor usando Radon, impacto discretização.

ABSTRACT

This work shows the impact of the Radon transform on a planar object after undergoing a projective transformation and how much the cross ratio suffers with the discretization of the pixels. The algorithm was implemented in MatLab. To generate the deformations for the experiment was used two quantities that can vary linearly, which are the azimuth and the elevation. For the discretization of the points chosen in a radius, Bresenham's algorithm was used. For small deformations (less than or equal to 10°) the Radon transform was efficient and for large deformations the discretization did not have a large impact.

Keywords: Descriptor using Radon, discretization impact.

SUMÁRIO

1	Introdução	12
1.1	Objetivos e Motivação	13
2	Conceitos Básicos	14
2.1	Transformada de Radon Pura	15
2.2	Razão Cruzada	17
2.3	Gerando Deformações Diferentes	17
2.4	Algoritmo de Bresenham	18
2.5	Discretização Pós Deformação	20
3	Estado da Arte	22
3.1	Transformada $\mathfrak{R}$	22
4	Transformada de Radon e Razão Cruzada	24
4.1	Transformada de Radon	24
4.2	Razão Cruzada	25
5	Experimentos e Análise	26
5.1	Configuração do experimento	27
5.2	Preliminares	28
5.3	Resultados Final	30
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	32
7	Bibliografia	33

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas da extração e classificação.	12
Figura 2 - Raio paralelo com 0° e seus pontos característicos.	14
Figura 3 - Raios paralelos 45° e seus pontos característicos.	14
Figura 4 - Raios paralelos com 90° e seus pontos característicos.	15
Figura 5 - A trajetória pode ser parametrizada pelo vetor unitário u de mesma direção.	15
Figura 6 - Projeções em dois diferentes ângulos.	16
Figura 7 - Ilustra o sistema de coordenadas, assim como o azimuth e o elevation. As setas indicam direções positivas.	18
Figura 8 - Construção da linha a partir dos pontos (x,y) .	19
Figura 9 - Exemplo de um raio traçado entre os pontos P_1 e P_n .	20
Figura 10 - Anomalia causada pela discretização.	20
Figura 11 - Transformada R do mesmo modelo que tem sido rotacionado, aplicado escala, e transladado.	22
Figura 12 - Pontos característicos num feixe de raio do modelo original.	24
Figura 13 - Modelo deformado.	24
Figura 14 - Logomarcas utilizadas nos experimentos	26
Figura 15 - Espectro da Transformada de Radon para a logomarca da adidas. Eixo y é o valor da Transformada de Radon e no x a quantidade de raios lançados. Linha vermelha é da imagem original e a azul da projetada.	28
Figura 16 - Razão cruzada para a logomarca da adidas. Eixo y é o valor da Razão Cruzada e no x a quantidade de raios lançados. Linha vermelha é da imagem original e a azul da projetada.	28
Figura 17 - Radon e rc com feixes de raios de 90° graus para a logomarca da adidas. Eixo y é o valor de Radon e Razão Cruzada e no x a quantidade de raios lançados. Linha vermelha é da imagem original e a azul da projetada.	29
Figura 18 - Grau de deformação em função da média de erro, (a) rc , (b) Radon.	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Exemplos de imagens com diferentes parâmetros de perspectiva

27

TABELA DE SIGLAS

Sigla	Significado	Página
RC	Razão Cruzada	12
RGB	R (<i>Red</i> – Vermelho), G (<i>Green</i> – Verde) e B (<i>Blue</i> – Azul).	12
IA	Inteligência Artificial	13
API	<i>Application Programming Interface</i>	13
AZ	<i>Azimuth</i>	17
EL	<i>Elevation</i>	17

1 INTRODUÇÃO

A extração de características (descritores) é a base para reconhecimento de uma imagem (vide figura 1). Estas características podem ser classificadas basicamente como sendo de domínio geral e específico. O primeiro inclui características de cor, textura e forma. A última é dependente da aplicação, como por exemplo: classificação de impressão digital, placas de veículos, etc.

Descritores [6] são amplamente utilizados em atividades comuns do cotidiano. Desde reconhecimento de placa de automóvel e biometria a reconhecimento facial. Gigantes da tecnologia já entraram no mercado. O Google já tornou pública sua API (*Application programming interface*) de Cloud Vision e a IBM lançou o IBM Watson. Vale salientar que ambos usam inteligência artificial (IA).

A transformada de Radon [5] já é consolidada em alguns ramos da ciência, principalmente em tomografia computadorizada, na qual se reconstrói um objeto através de suas projeções. O tema original de Radon era o que se conhece por problema da reconstrução a partir das projeções, isto é, como obter uma função $f(x, y)$, não observável diretamente, a partir de suas projeções $g_x(y)$.

A transformada de Radon se mostra resistente quando o modelo não está deformado [7], isso porque as informações entre o modelo original e o modelo na imagem se preservam. Mas o reconhecimento se torna mais difícil se o modelo a ser reconhecido está deformado projetivamente [7]. Então se mostra necessário alguma técnica que seja resistente a esse tipo de deformação, que é a Razão Cruzada.

A Razão Cruzada [1] pode ser usada como recurso para descritores de imagem. Saber o impacto da discretização é importante para saber até que ponto esse recurso pode ser usado, principalmente para imagens muito ruidosas.



Figura 1 - Etapas da extração e classificação.

1.1 OBJETIVOS E MOTIVAÇÃO

A corrida para entregar a melhor API para reconhecimento de imagem fica mais acirrada a cada ano, com a criação de novas técnicas e o aprimoramento das já existentes. Este trabalho propõe uma nova técnica que se mostrou resistente a pequenas deformações e faz um estudo do impacto da discretização sobre descritores.

Os objetivos deste trabalho são testar o impacto ocasionado pela discretização pós deformação e utilizar a mesma ideia de Radon, no qual raios serão lançados na imagem original e deformada, e as projeções desses raios serão analisadas, gerando sinogramas para comparação. Quando a deformação for grande, próximo de 90° , veremos que a transformada de Radon não é resistente, então será mostrado um método que é um invariante projetivo: a Razão Cruzada (RC).

2 CONCEITOS BÁSICOS

O processo de varredura de uma imagem é realizado através de amostragens paralelas de feixes de raios de diferentes ângulos em um determinado objeto de análise. Para cada mudança de cor é armazenado o ponto, chamado ponto característico. Foi testado 3 graus de feixes de raio, em 0° , 45° e 90° .



Figura 2 - Raio paralelo com 0° e seus pontos característicos.



Figura 3 - Raios paralelos com 45° e seus pontos característicos.



Figura 4 - Raios paralelos com 90° e seus pontos característicos.

2.1 TRANSFORMADA DE RADON PURA

A transformada de Radon converte uma função de um sistema de coordenadas espaciais (x, y) para outro sistema de coordenadas espaciais de Radon. O domínio de Radon descreve os valores das integrais de linha, através de (s, θ) :

$$g(s, \theta) = \oint_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) du = \oint_{-\infty}^{\infty} \mu(s \cdot \cos\theta - u \cdot \sin\theta, s \cdot \sin\theta + u \cdot \cos\theta) du \quad (1)$$

a expressão de linha pode também ser escrita na forma de reta paramétrica, onde é usado o parâmetro u . Abaixo, um exemplo de projeção com uso desse parâmetro:

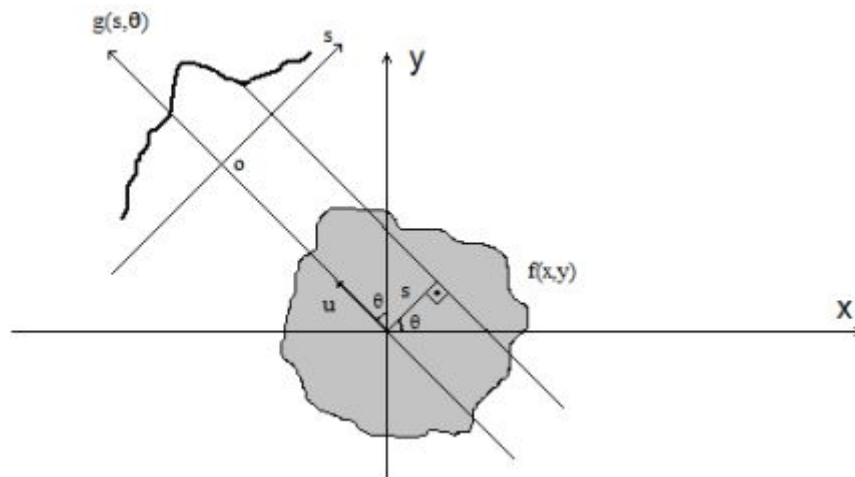


Figura 5 - A trajetória pode ser parametrizada pelo vetor unitário u de mesma direção.

Dessa forma a expressão que define a linha fica:

$$x = s.\cos \theta - u.\sen \theta$$

$$y = s.\sen \theta + u.\cos \theta$$

(2)

Também é possível deixar em função de x e y:

$$s = x.\cos \theta + y.\sen \theta$$

$$u = -x.\sen \theta + u.\cos \theta$$

(3)

Assim, da equação (2) e (3), tem-se a Transformada de Radon pura para a função $f(x,y)$ como:

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s.\cos \theta - u.\sen \theta, s.\sen \theta + u.\cos \theta) du \quad (4)$$

A projeção $g(s, \theta)$ é obtida por um conjunto de integrais de linha com mesmo ângulo θ . Abaixo, projeções nos ângulos θ_1 e θ_2 :

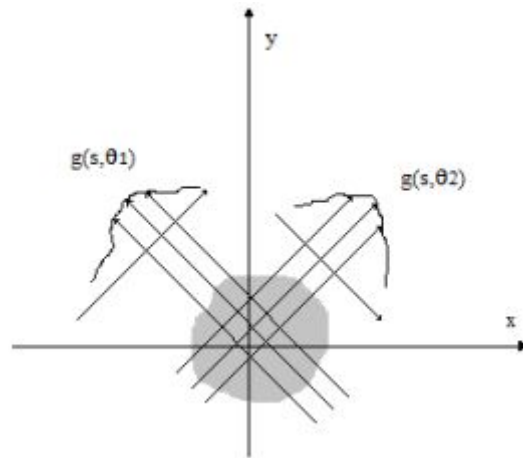


Figura 6 - Projeções em dois diferentes ângulos.

A composição de diversas projeções forma o que é chamado de Sinograma, e esse conjunto de dados servem de ponto de partida para o processo de descrição. A varredura apresentada na introdução deste capítulo nada mais é do que essa técnica aplicada a imagem, onde as atenuações serão os valores dos pixels. Para o reconhecimento perfeito da imagem, é

necessário um número mínimo de raios, dado por uma quantidade suficientemente grande de projeções. Por conveniência será usado apenas 3 ângulos, são eles: 0° , 45° e 90° .

2.2 RAZÃO CRUZADA

A Razão cruzada é uma invariante fundamental para a transformação projetiva [1]. A razão cruzada de quatro pontos colineares (P_1, P_2, P_3, P_4) , dispostos em ordem é definida como:

$$rc(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} / \frac{P_1P_4}{P_2P_4} \quad (5)$$

onde P_iP_j denota a distância euclidiana entre P_i e P_j , e a razão cruzada permanece constante sobre qualquer transformação projetiva, por isso ela foi usada como ferramenta para extrair características da imagem deformada.

2.3 GERANDO DEFORMAÇÕES DIFERENTES

Para gerar experimentalmente o modelo deformado foi usado primeiramente a matriz de homografia, que naturalmente é a primeira ideia a ser ponderada. Mas a mesma se mostrou ineficaz para gerar os sinogramas, porque ela não pode ser variada linearmente em função das razões cruzadas encontradas por feixes de raios.

A alternativa mais viável foi usar o grau de distorção [2], que usa o *azimute* e o *elevação* para deformar uma imagem. Fundamentalmente, o primeiro é um ângulo polar que varia no plano x-y, enquanto o segundo é o ângulo acima (ângulo positivo) ou abaixo (ângulo negativo) do plano x-y, vide figura.

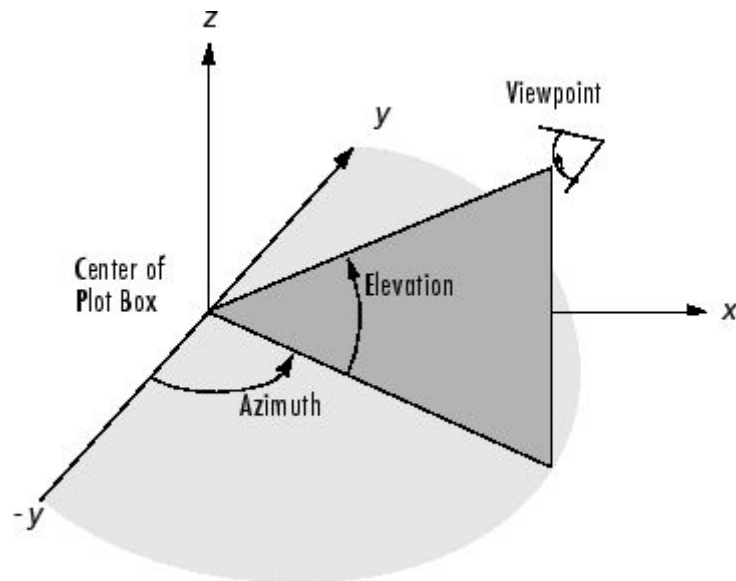


Figura 7 - Ilustra o sistema de coordenadas, assim como o *azimuth* e o *elevation*. As setas indicam direções positivas.

2.4 ALGORITMO DE BRESENHAM

O algoritmo de Bresenham [3] é um algoritmo que determina os pontos que devem ser selecionados para formar uma aproximação para uma linha reta entre dois pontos. Esse algoritmo se fez necessário pois para cada modelo teste, vários feixes de raios são lançados. Ele é de grande valor pela sua simplicidade, pois usa apenas adição, subtração e transferência de bits inteiras, todas as quais são operações muito baratas em arquiteturas de computadores padrão, sendo mais performático e por isso usado neste trabalho.

Para efeitos de visualização, ilustramos funcionando apenas no primeiro quadrante. A cada iteração próximo ponto da linha pode ser:

- $(x+1, y)$, ou:
- $(x+1, y+1)$.

podemos desenhar um diagrama da situação em que a linha está sendo construída:

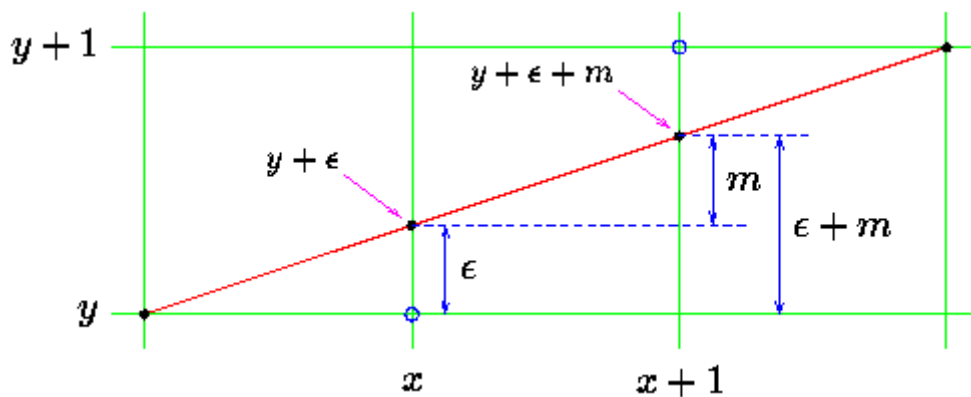


Figura 8 - Construção da linha a partir dos pontos (x, y) .

No traçado (x, y) , a função que desenha a linha, em geral, decidirá entre o ponto real e o ponto que a resolução da tela realmente permite desenhar. Normalmente o ponto desenhado (x, y) , será a menos de um ϵ o ponto matemático real na linha. Então associamos um erro ϵ , para coordenada de y , o valor real de y deveria ser $y + \epsilon$. Este erro variará de -0.5 a pouco menos de $+0.5$.

Ao passar de x para $x+1$, aumentamos o valor da ordenada de um valor igual a uma inclinação da linha m ($0 \leq m \leq 1$). Escolhemos traçar $(x+1, y)$ se a diferença entre este novo valor e y for inferior a 0.5 .

$$y + \epsilon + m < u + 0,5 \quad (6)$$

caso contrário, vamos traçar $(x + 1, y + 1)$. Deve ficar claro que ao traçar essa segunda opção, minimizamos o erro total entre o segmento de linha matemática e o que realmente é desenhado na tela.

O pseudocódigo implementado neste trabalho foi o que se segue:

```

 $\epsilon' \leftarrow 0, \quad y \leftarrow y_1$ 
For  $x \leftarrow x_1$  to  $x_2$  do
    Plot point at  $(x, y)$ .
    If  $(2(\epsilon' + \Delta y) < \Delta x)$ 
         $\epsilon' \leftarrow \epsilon' + \Delta y$ 
    Else
         $y \leftarrow y + 1, \quad \epsilon' \leftarrow \epsilon' + \Delta y - \Delta x$ 
    EndIf
EndFor

```

2.5 DISCRETIZAÇÃO PÓS DEFORMAÇÃO

O problema da discretização aparece quando o raio passa por uma região de borda de um objeto. Por exemplo, veja a figura a seguir:



Figura 9 - Exemplo de um raio traçado entre os pontos P_1 e P_n .

aparentemente os pontos característicos do raio acima só serão os que passam pelo meio do H. Mas dando um zoom na região próxima da intersecção, nota-se a seguinte anomalia causada pela discretização:



Figura 10 - Anomalia causada pela discretização.

Essas falsas intersecções prejudica o cálculo de algumas métricas, porque no modelo original pode haver um número diferente de pontos característicos em relação ao modelo deformado. A razão cruzada não se mostra resistente nesse cenário, mas a transformada de Radon se mostra, visto que o cálculo é feito via distância euclidiana.

3 ESTADO DA ARTE

3.1 TRANSFORMADA - $\mathfrak{R}$

A transformada $\mathfrak{R}$ [5] é dada por:

$$\mathfrak{R}_f(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mathfrak{R}f}^2(\rho, \theta) d\rho, \quad (7)$$

onde $T_{\mathfrak{R}f}$ é a transformada de Radon de f . Pode-se mostrar as seguintes propriedades sobre a Transformada - $\mathfrak{R}$: periodicidade, rotação, translação e escala. Em resumo, ela é invariante a translação e escala, se a transformada for normalizada por um fator de escala. A rotação do modelo implica em uma translação de módulo π . Esse tipo correspondência dá muita flexibilidade para a transformada $\mathfrak{R}$. A figura 6 mostra duas transformada $\mathfrak{R}$ do mesmo objeto que tem sido rotacionado, aplicado uma escala, e transladado. Nota-se que apenas rotação modifica a função.

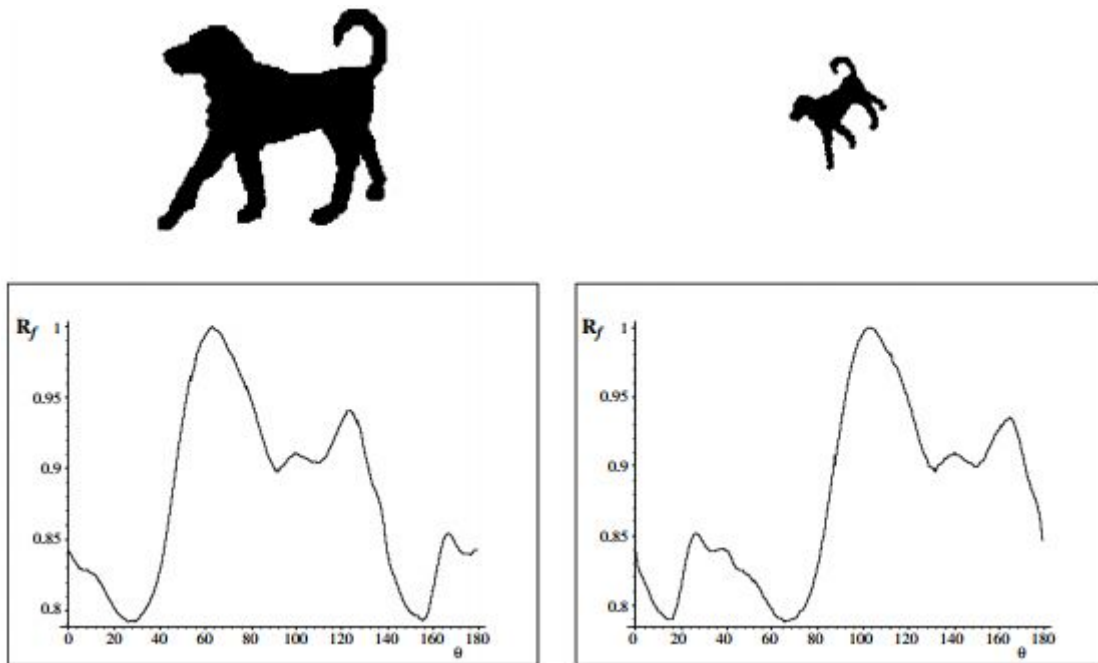


Figura 11 - Transformada R do mesmo modelo que tem sido rotacionado, aplicado escala, e transladado.

Essa abordagem é indicada quando a transformação no modelo é afetada apenas por rotação, translação e um fator de escala. Sendo necessário outra abordagem quando o modelo sofrer uma transformação projetiva.

TRANSFORMADA DE RADON E RAZÃO CRUZADA

4.1 TRANSFORMADA DE RADON

Seja $P_i P_j$ a distância euclidiana entre os pontos P_i e P_j . A projeção discreta de Radon de um feixe de raio é dada pelo somatório:

$$\sum_{i=1}^{n/2} P_{2i-1} P_{2i} \quad (8)$$

por exemplo, a projeção do feixe de raio mais acima da figura abaixo seria $P_1 P_2 + P_3 P_4 + P_5 P_6$.

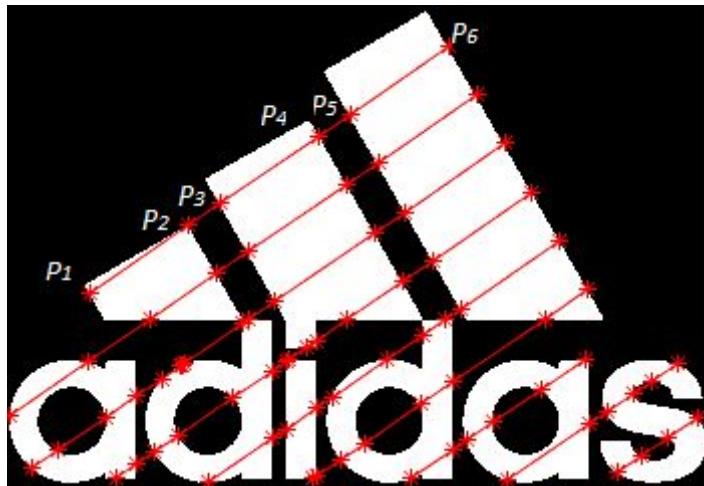


Figura 12 - Pontos característicos num feixe de raio do modelo original.

Deformando o modelo acima (*az* e *el* aleatório), resultará na imagem abaixo:



Figura 13 - Modelo deformado.

o cálculo é feito da mesma forma. Como veremos nos experimentos, os mesmos cálculos antes e pós projeção terão valores diferentes. Isso acontece porque as distâncias (soma dos pixels branco em um feixe de raio) não são preservadas, com efeito: se a deformação for muito severa pode nem haver pixels branco na imagem deformada.

4.2 RAZÃO CRUZADA

O cálculo da projeção da razão cruzada é dado pelo somatório:

$$\sum_{i=1}^{n-3} rc(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}) \quad (9)$$

para raios com menos de 4 pontos característicos, a razão cruzada não existe, mas para efeitos de implementação o valor dela é fixado em 0. Esse cálculo é um invariante projetivo, ou seja, se projetarmos os mesmos 4 pontos em diferentes ângulos de deformação e depois calcularmos a Razão cruzada desses pontos o resultado será exatamente o mesmo, a menos da discretização como explicado no capítulo 2.4. Então por que não unir a ideia dos feixes de raios de Radon com Razão Cruzada? Foi exatamente isso que foi feito e o resultado está logo em seguida no próximo capítulo.

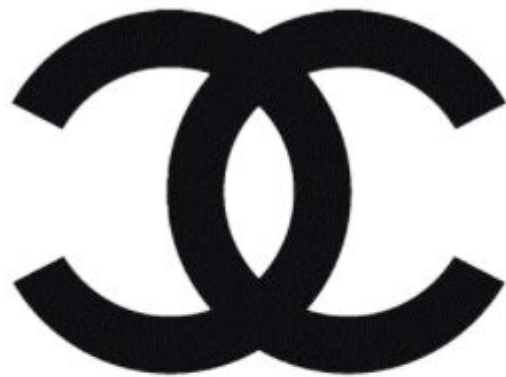
5 EXPERIMENTOS E ANÁLISE

O nicho escolhido foi logomarcas. O critério para selecionar as imagens para o experimento foi que as mesmas tinham que ser originalmente binarizadas.

Figura 14 - Logomarcas utilizadas nos experimentos



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

5.1 CONFIGURAÇÃO DO EXPERIMENTO

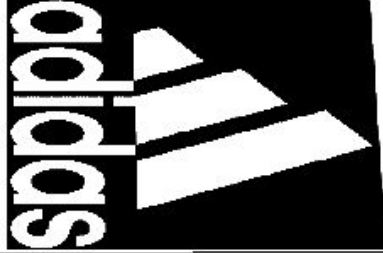
az = 30	az = 90	az = 150	el
			5
			80

Tabela 1 - Exemplos de imagens com diferentes parâmetros de perspectiva.

O conjunto de modelos é composto por cada uma das logomarcas da Figura 5. Os conjuntos de dados são gerados por Matlab usando vários parâmetros de perspectiva. A perspectivas de imagens são geradas por configurar o *target* (vista do observador) a uma altura n e abertura de câmera suficiente que dê para ver toda a imagem, enquanto muda os ângulos az e el gradualmente.

Geralmente quanto maior for n maior será a deformação. Mas esse valor já é padrão do Matlab, o que será adotado neste trabalho. Para cada teste, são lançados feixes de raios paralelos em 3 ângulos: 0° , 45° e 90° . Os valores de n e el são predefinidos, e az varia para cada um dos graus no conjunto $\{30, 90, 150, 210, 270, 330\}$, respectivamente. Desta forma, cada conjunto de teste é composto por $3 \times 6 \times 5 = 90$ modelos deformados. Exemplos de modelos deformados por parâmetros de perspectivas diferentes são mostrados na Tabela 1.

5.2 PRELIMINARES

Após normalização, Radon se mostrou resistente em pequenos ângulos, em casos raros sendo melhor que Razão Cruzada, pois esta última sofre bem mais com a discretização. Para um ângulo de apenas 5° ($el = 5$) observe os sinogramas:

Figura 15 - Espectro da Transformada de Radon para a logomarca da adidas. Eixo y é o valor da Transformada de Radon e no x a quantidade de raios lançados. Linha vermelha é da imagem original e a azul da projetada.

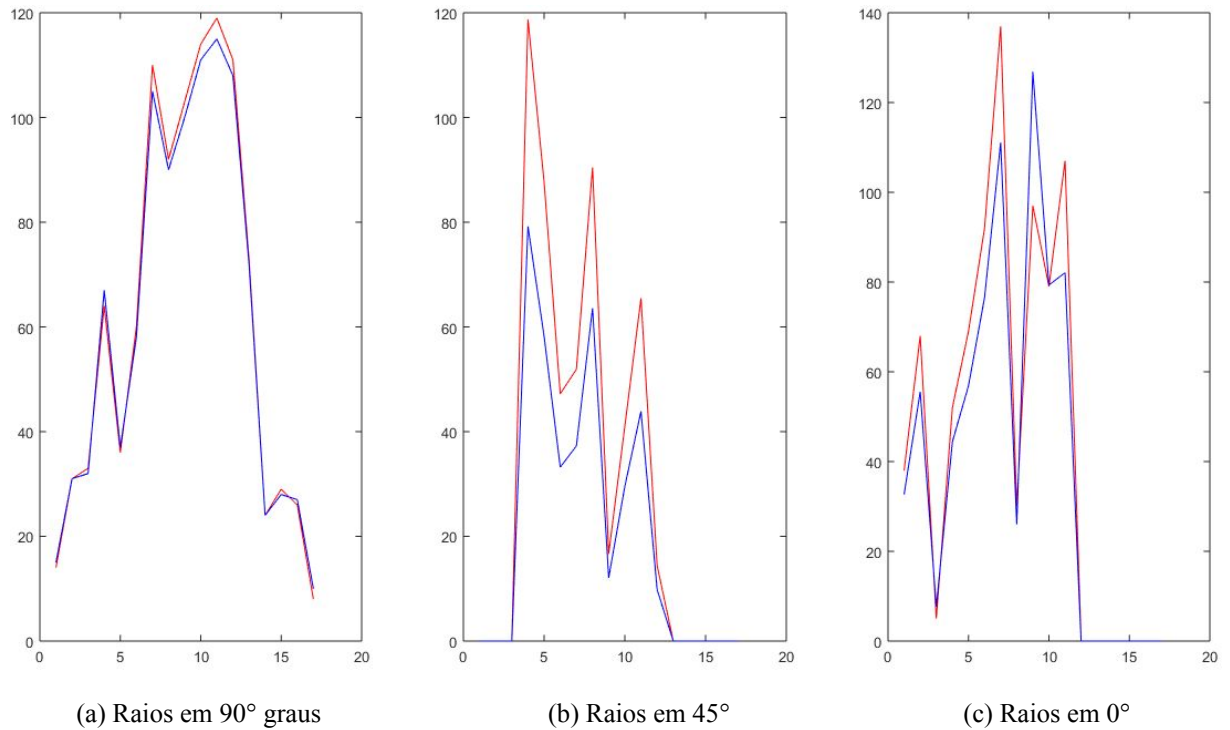
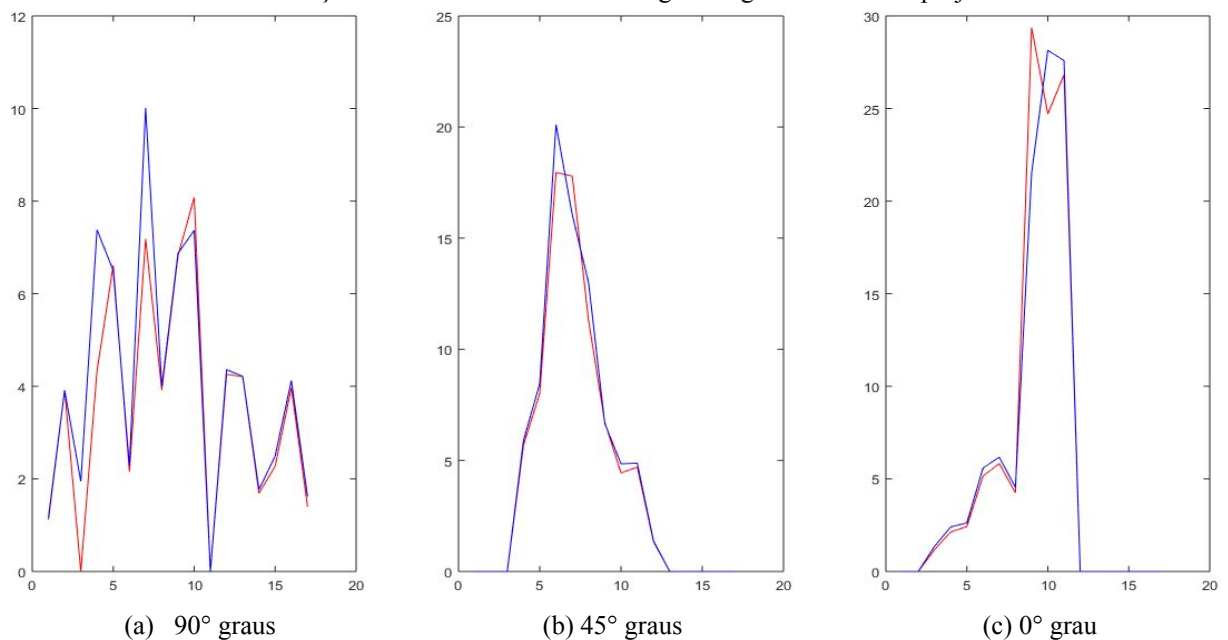
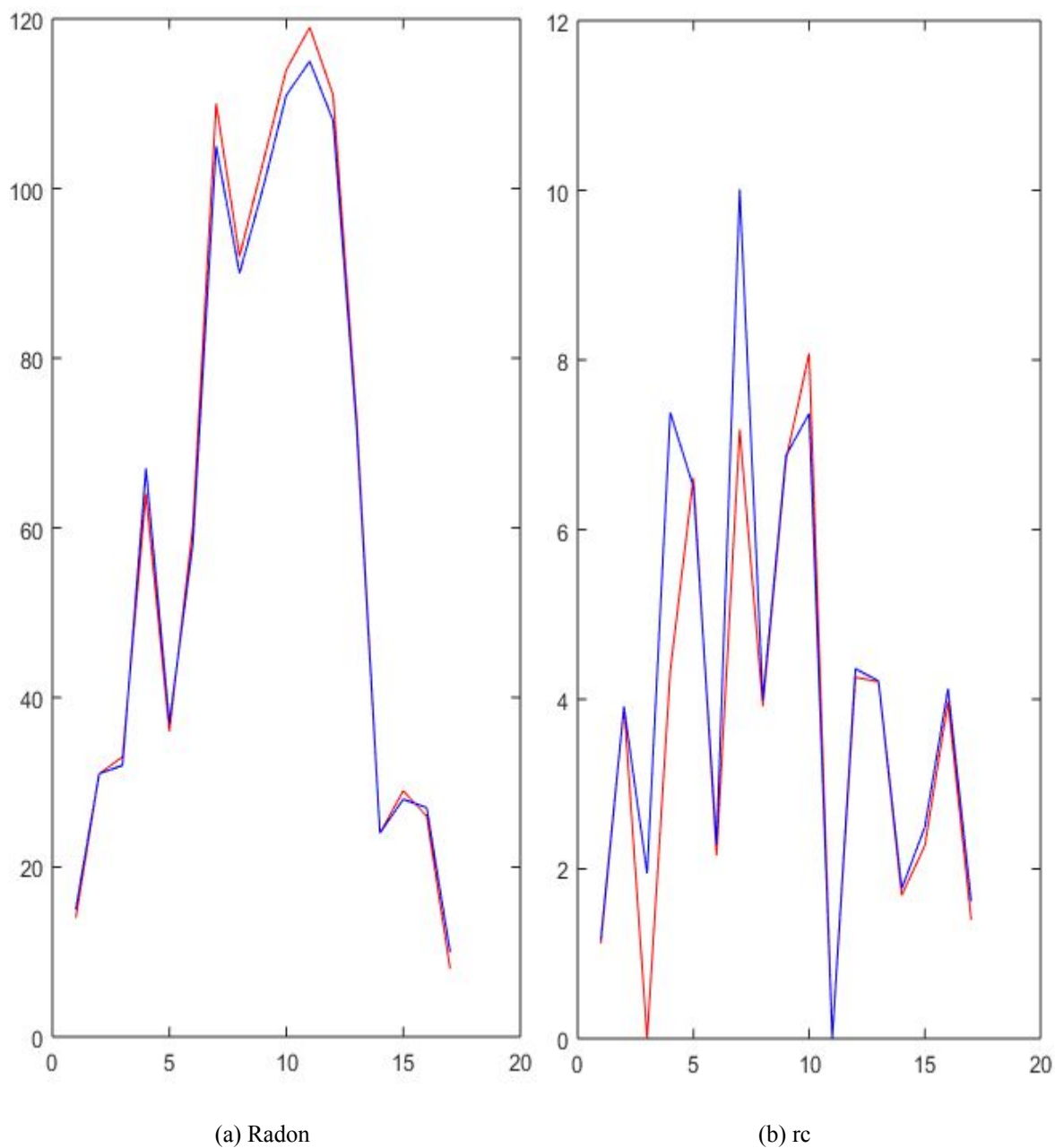


Figura 16 - Razão cruzada para a logomarca da adidas. Eixo y é o valor da Razão Cruzada e no x a quantidade de raios lançados. Linha vermelha é da imagem original e a azul da projetada.



Para os ângulo de 45° e 0° , razão cruzada se mostrou muito melhor. Agora dando um zoom só no ângulo de 90° :

Figura 17 - Radon e rc com feixes de raios de 90° graus para a logomarca da adidas. Eixo y é o valor de Radon e Razão Cruzada e no x a quantidade de raios lançados. Linha vermelha é da imagem original e a azul da projetada.

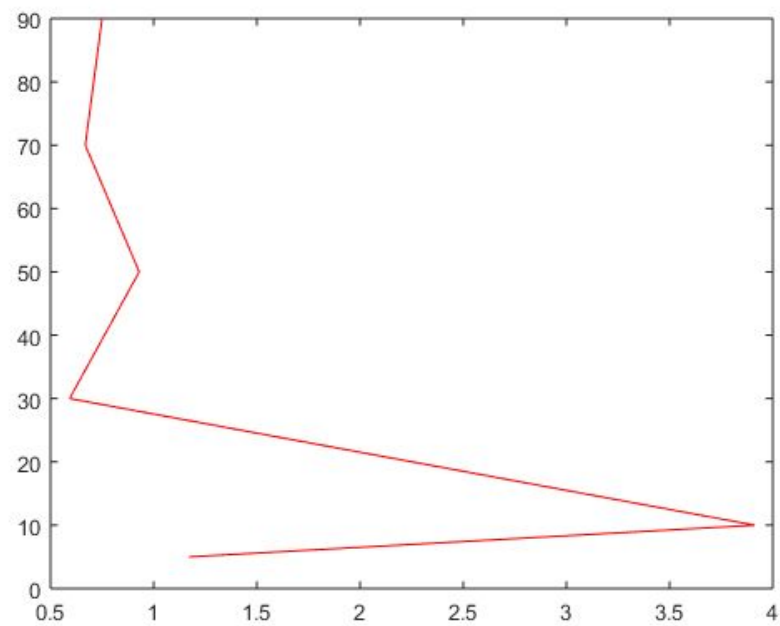


O impacto da discretização nesse exemplo foi tão grande que Radon foi melhor que Razão Cruzada. Casos como esse se perpetuaram algumas vezes, sempre para ângulos pequenos, principalmente nas logomarcas da Figura 9a e 9d. Por causa das pontas, como

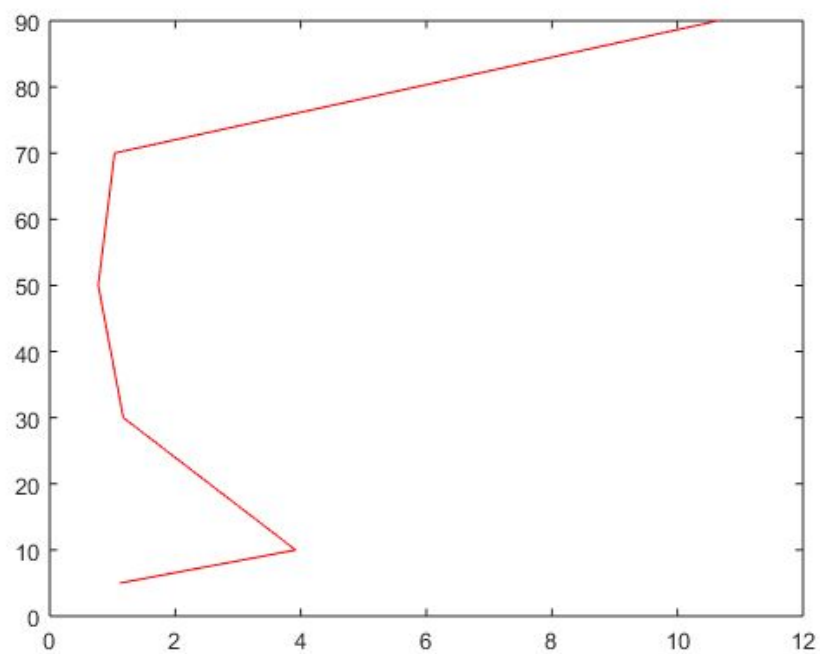
mostra a Figura 6. Para ângulos maiores que 10° Razão Cruzada foi praticamente unanimidade.

5.3 RESULTADO FINAL

Figura 18 - Grau de deformação em função da média de erro, (a) rc, (b) Radon.



(a)



(b)

O resultado dos gráficos acima foi feito pelos valores médios, juntamente com o desvio padrão, da diferença entre os 90 modelos deformados. Nota-se que a transformada de Radon não apresentou um resultado tão ruim, entretanto, quando a deformação é mais severa, este não se mostra resistente.

Por outro lado a Razão Cruzada, como esperado, se mostrou mais resistente, principalmente quando o grau é elevado (próximo de 90°). A razão para isso relativamente óbvia, pois quanto maior a deformação mais o objeto tende a se comprimir, ou seja, tendo uma perspectiva mais deformada.

Além do motivo já explicado do alto grau de deformação, a discretização foi um problema nas logomarcas que tinham mais regiões de ponta, sem curvas suavizadas, por isso a média do erro subiu. As logomarcas 5b e 5d quase não tiveram erro, que era de se esperar do reconhecimento feito por Razão Cruzada.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A importância de descritores para imagens vai desde o uso em reconhecimento de placa de automóvel e biometria a reconhecimento facial. Ter recursos que melhoram esse reconhecimento é de grande valor. Os algoritmos implementados mostraram ser eficientes para serem usados como recursos (*features*) em descritores de alto nível, se a aplicação não tiver um alto grau de deformação, apesar de não ser confiável por não ser uma invariante projetivo, Radon se mostrou relativamente resistente. Mas o teor artístico ficou mesmo por conta da Razão Cruzada, onde foi quase perfeito em algumas logomarcas e satisfatório no geral. Como trabalho futuro, o objetivo será fazer uma análise conceitual sobre um possível Radon que fosse invariante afim. Sabemos que não é possível, mesmo utilizando vetores de razões cruzadas. No entanto, as informações providas pelos vetores de razões cruzadas podem informar algo da constituição do objeto tomografado, mesmo que de forma relativa.

7 Bibliografia

- [1] J.L. Mundy and A.P. Zisserman, *Geometric Invariance in Computer Vision*. MIT Press, 1992.
- [2] A.J. van der Veen; P.B. Ober; E.F. Deprettere, *Azimuth and elevation computation in high resolution DOA estimation*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1992.
- [3] E. Angel; D. Morrison, *Speeding up Bresenham's algorithm*, IEEE Computer Graphics and Application, 1991.
- [4] Linlin Li and Chew Lim Tan, *Recognizing Planar Symbols with Severe Perspective Deformation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010.
- [5] S. Tabbone; L. Wendling; J.-P. Salmon, *A New Shape Descriptor Defined on the Radon Transform*, Computer Vision and Image Understanding, 2005.
- [6] K. Mikolajczyk; C. Schmid; *A Performance Evaluation of Local Descriptors*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005.
- [7] R. Hartley; A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge, 2000.