

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
 Centro de Informática e Departamento de Matemática
 Computação gráfica - 1ª Lista de Exercícios - 1º Semestre/2004- Entrega:23/06/2004

1. Considere $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l \in \mathbb{E}^m$ e $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{t} = \sum_{i=0}^l \alpha_i \mathbf{p}_i + \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{v}_j$, onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, \forall i, j$. Quais são as restrições sobre α_i e β_j para que \mathbf{t} seja: a) Ponto; b) Vetor.
2. Encontre a expressão do operador linear do \mathbb{R}^3 que faz uma rotação de 60° em torno da reta perpendicular ao plano $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ no sentido anti-horário, seguida de uma reflexão ortogonal em relação a π . Resolva esta questão de duas formas (Rot=rotação e Refl=reflexão) :
 - (a) $[T]_\epsilon^\epsilon = [I]_\epsilon^\alpha [Ref]_\alpha^\alpha [Rot]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\epsilon$
 - (b) $[T]_\epsilon^\epsilon = [Rot_5]_\epsilon^\epsilon [Rot_4]_\epsilon^\epsilon [Ref]_\epsilon^\epsilon [Rot_3]_\epsilon^\epsilon [Rot_2]_\epsilon^\epsilon [Rot_1]_\epsilon^\epsilon$
3. Definimos uma transformação *afim sobre vetores* como sendo uma transformação sobre espaços vetoriais que é equivalente a uma transformação linear adicionada a um vetor constante. Considere um polígono cujo ponto central no seu interior é $(1, 1)$. Mostre que a transformação afim sobre vetores que rotaciona em 30° o polígono em torno de seu centro no sentido anti-horário não é linear. Encontre a expressão desta transformação.
4. Uma transformação afim T está no *estado operacionalmente linear*, se para os sistemas de coordenadas α e β , no domínio e no contra-domínio, respectivamente, podermos escrever: $[T\mathbf{p}]_\beta = A[\mathbf{p} - \mathbf{c}]_\alpha$, onde A é uma matriz, \mathbf{p} é um ponto do domínio e \mathbf{c} é o centro de α . Mostre que, para qualquer transformação afim, existem pares de sistemas de coordenadas que deixam a transformação no estado operacionalmente linear.
5. Considere o triângulo de \mathbb{E}^2 formado pelos pontos não colineares \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c} . Mostre que as coordenadas baricênticas de um ponto \mathbf{p} com respeito a este triângulo podem ser encontradas da seguinte forma: $\alpha = \frac{area(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p})}{area(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$, $\beta = \frac{area(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{p})}{area(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$ e $\gamma = \frac{area(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{area(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$, onde α é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{a} , β é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{b} e γ é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{c} , e $area(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ é a área do triângulo formado pelos pontos $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ e \mathbf{p}_3 .
6. Mostre que só existe uma única forma de se escrever um ponto qualquer do plano $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 6x + 2y + 3z = 6\}$ como combinação baricêntrica dos seguintes três pontos: $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ e $(0, 0, 2)$.
7. Considere o triângulo determinado pelos três pontos da questão anterior. Verifique (utilizando para isso um argumento baseado em coordenadas baricênticas) se a reta que passa pelos pontos $(-1, -1, -1)$ e $(\frac{1}{6}, 1, 1)$ intersecta o triângulo em seu interior.
8. Que figura geométrica é imagem de um paralelogramo por um operador afim injetivo de \mathbb{E}^2 ? Justifique.
9. Determine em coordenadas cartesianas a expressão do operador afim de \mathbb{E}^2 que associa os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ aos pontos $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(0, 4)$, respectivamente, de duas formas distintas: utilizando a definição de que T resulta num ponto transladado por um vetor depois de aplicada uma transformação linear, e a propriedade de que T preserva combinações baricênticas.
10. Explique a correspondência entre a notação para transformação afim: $[T\mathbf{p}]_\beta = A[\mathbf{p} - \mathbf{c}]_\alpha + [T\mathbf{c}]_\beta$, e a notação com coordenadas homogêneas (aqui A é uma matriz, α e β são sistemas de coordenadas, \mathbf{p} é um ponto do domínio e \mathbf{c} é o centro de α). Dê exemplos de $T : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $T : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e $T : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$.
11. Encontre a matriz em coordenadas homogêneas da projeção de um ponto qualquer de \mathbb{E}^3 sobre a reta dada parametricamente por: $r : \begin{cases} x_0 + at \\ y_0 + bt \\ z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, com $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}^3$ e $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

12. Considere o triângulo formado pelos pontos: $\mathbf{a}=(0,1)$, $\mathbf{b}=(2,2)$ e $\mathbf{c}=(1,0)$. Encontre (simplificando) a equação em coordenadas baricêntricas da circunferência centrada na origem de raio 1, e identifique a curva de equação em coordenadas baricêntricas: $\gamma^2 - \alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma(2\beta + 1) = -3$, onde α é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{a} , β é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{b} e γ é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{c} .
13. Considere um triângulo retângulo isósceles de \mathbb{IE}^2 , cujos vértices são \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , e com o ângulo reto no ponto \mathbf{c} . Sabendo que o tamanho de um cateto é 1, encontre a equação em coordenadas baricêntricas, da circunferência circunscrita ao triângulo.