

Centro de Informática - UFPE
Processamento Gráfico - Segundo Semestre— 2003
Primeira Lista de Exercícios-Entrega:12/01/2004

1. Mostre que a soma ponderada de pontos cujo somatório dos pesos é zero, resulta num vetor.
2. Considere o quadrado de vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$ e $(1, 3)$. Encontre a matriz em coordenadas homogêneas do operador afim que rotaciona em 30° o quadrado em torno ponto $(1, 2)$ no sentido anti-horário. Exiba as imagens dos vértices.
3. Determine o operador afim em coordenadas cartesianas $T : \mathbb{IE}^2 \rightarrow \mathbb{IE}^2$ que associa os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ aos pontos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$, respectivamente, de duas formas distintas: utilizando a propriedade de que T é um produto de uma matriz por um vetor somado a um ponto, e posteriormente usando a propriedade de que T preserva combinações baricêntricas.
4. Mostre que a imagem de um quadrado por um operador afim bijetivo é um paralelogramo.
5. Considere o triângulo cujos vértices são: $\mathbf{a}=(0,0)$, $\mathbf{b}=(2,0)$ e $\mathbf{c}=(1,1)$. Tome dois vetores L.I. que se obtêm como subtração de vértices do triângulo. Escreva cada um dos pontos a seguir como uma combinação linear dos dois vetores, adicionada a um vértice do triângulo: $(2,3)$, $(0,4)$, $(5,7)$ e $(-1,-3)$. Quais são suas coordenadas baricêntricas com respeito ao triângulo?
6. Mostre que se as imagens de três pontos não colineares por uma transformação afim $T : \mathbb{IE}^2 \rightarrow \mathbb{IE}^2$ são conhecidas, então se pode determinar a expressão desta transformação. Utilize um argumento de Álgebra Linear.
7. Considere o triângulo formado pelos pontos: $\mathbf{a}=(0,1)$, $\mathbf{b}=(2,2)$ e $\mathbf{c}=(1,0)$. Encontre (simplificando) a equação em coordenadas baricêntricas da circunferência centrada na origem de raio 1, e identifique a curva de equação em coordenadas baricêntricas: $\gamma^2 - \alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma(2\beta + 1) = -3$, onde α é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{a} , β é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{b} e γ é a coordenada relativa ao ponto \mathbf{c} .
8. Considere o operador $T : \mathbb{IE}^3 \rightarrow \mathbb{IE}^3$ dado por $T(x, y, z) = (2x - 3y + 2z - 2, x - y - 1, 2(z - x + 1))$.
 - (a) Mostre que T é um operador afim.
 - (b) Considere o operador $S(x, y, z) = (x + z, x - 2, 2y + z - 1)$. Encontre $R = S \circ T$ e $Q = T \circ S$.
 - (c) Encontre as matrizes em coordenadas homogêneas de todos os operadores acima.
9. Considere o triângulo formado pelos pontos: $\mathbf{a}=(1,1)$, $\mathbf{b}=(2,2)$ e $\mathbf{c}=(0,3)$. Considere o operador $T : \mathbb{IE}^2 \rightarrow \mathbb{IE}^2$ dado em coordenadas baricêntricas por $T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta - 2\gamma + 2, \alpha - \beta - \gamma - 1, 3\gamma - 2\alpha)$, onde $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Encontre a expressão de T em coordenadas cartesianas e sua matriz em coordenadas homogêneas.
10. Um estudante de Processamento Gráfico está com um objeto inteiramente confinado em um cubo cujos vértices são: $(1, 2, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 2, 2)$ e $(2, 3, 2)$. Ele deseja fazer uma animação que consiste numa sequência de rotações do cubo em torno da sua diagonal que passa por $(1, 2, 1)$ e $(2, 3, 2)$, sempre usando um mesmo ângulo θ . Encontre a expressão do operador afim que o estudante está precisando. Utilize matrizes em coordenadas homogêneas.
11. Encontre a equação cartesiana da quadrática de Bézier cujos pontos de controle são: $(0,2)$, $(3,0)$ e $(1,-1)$. Faça um esboço da curva e da poligonal de controle.
12. Esboce uma curva de Bézier de grau 4, juntamente com sua poligonal de controle, de tal forma que a curva passe pelo vértice de controle \mathbf{b}_2 . Use a forma de Bernstein para determinar que condições devemos impor em \mathbf{b}_2 (em função dos demais pontos de controle) para que $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_0^4(\frac{1}{2})$.

13. Considere uma cúbica de Bézier qualquer. Expresse \mathbf{b}_0 em termos dos demais vértices de tal forma que a derivada da cúbica se anule para $t = 1/3$. Faça um esboço de uma curva nestas condições e de sua primeira derivada.
14. Considere a curva de Bézier $\mathbf{b}(t)$ cuja poligonal é dada pelos pontos: $(-1,0), (0,2), (1,-1)$ e $(3,0)$ (nesta ordem), com $t \in [0, 1]$. Para que valores do parâmetro t a derivada desta cúbica é paralela à reta $y = -x + 3$?
15. Considere os pontos de controle que são encontrados da seguinte forma: \mathbf{b}_0 é o simétrico de \mathbf{b}_3 em relação a um sistema de coordenadas arbitrário, e \mathbf{b}_1 é o simétrico de \mathbf{b}_2 em relação a este mesmo sistema. Mostre que a curva de Bézier correspondente a esta poligonal de controle passa pela origem daquele sistema.
16. Faça um esboço da curva de Bézier gerada pela poligonal $(1,1), (3,4), (2,5), (3,4)$ e $(1,1)$ (nesta ordem), e um esboço da curva de Bézier da primeira derivada e também da segunda derivada (todas com suas respectivas poligonais de controle).
17. Mostre que uma curva Bézier cúbica não planar não pode ter um ponto onde a primeira derivada se anula.
18. Faça um esboço da cúbica de Bézier, cujos pontos de controle são: $(0,0), (1,1), (0,1)$ e $(1,0)$, nesta ordem. Encontre a expressão da sua derivada, faça um esboço dela, e comente o que está acontecendo para $t = \frac{1}{2}$ em ambas as curvas.
19. Faça um esboço para cada curva de todas as derivadas da curva de Bézier cujos pontos de controle são: $(0,0), (1,0), (2,2), (-1,0)$ e $(-1,3)$.
20. Uma curva de Bézier tem a primeira derivada controlada pelos vetores: $(1,1), (-1,1)$ e $(0, -\sqrt{2})$, nesta ordem. Sabendo-se que $\mathbf{b}_2 = (3, 4)$, encontre a curva de Bézier original.