

Universidade Federal de Pernambuco
 Centro de Informática e Departamento de Matemática
 Computação Gráfica - Primeiro Semestre-2004
 Segunda Lista de Exercícios-Entrega:04/08/2004

1. Mostre que os polinômios de Bernstein B_i^n formam uma base para o espaço dos polinômios de grau n . Mostre que o polinômio de Bernstein B_i^n possui um único valor de máximo no intervalo $[0,1]$, correspondente a $t = i/n$. Encontre o valor de máximo e indique o que acontece para um n muito grande.
2. Esboce uma curva de Bézier de grau 4, juntamente com sua poligonal de controle, de tal forma que a curva passe pelo vértice de controle \mathbf{b}_2 . Use a forma de Bernstein para determinar que condições devemos impor em \mathbf{b}_2 (em função dos demais pontos de controle) para que $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_0^4(\frac{1}{2})$.
3. Mostre analiticamente que uma curva de Bézier quadrática nunca passa pelo ponto \mathbf{b}_1 , a menos que os pontos de controle sejam colineares.
4. Considere os pontos de controle que são encontrados da seguinte forma: \mathbf{b}_0 é o simétrico de \mathbf{b}_3 em relação a um sistema de coordenadas arbitrário, e \mathbf{b}_1 é o simétrico de \mathbf{b}_2 em relação a este mesmo sistema. Mostre que a curva de Bézier correspondente a esta poligonal de controle passa pela origem daquele sistema.
5. Faça um esboço da curva de Bézier gerada pela poligonal $(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(-1,1)$ e $(0,2)$ (nesta ordem), e um esboço da curva de Bézier da primeira derivada e também da segunda derivada (todas com suas respectivas poligonais de controle).
6. Considere uma cúbica de Bézier qualquer. Expresse \mathbf{b}_0 em termos dos demais vértices de tal forma que a derivada da cúbica se anule para $t = 1/2$. Faça um esboço de uma curva nestas condições (utilizando coordenadas baricêntricas) e de sua primeira derivada.
7. Considere a curva de Bézier $\mathbf{b}(t)$ cuja poligonal é dada pelos pontos: $(0,0),(0,1),(1,0)$ e $(0,0)$ (nesta ordem), com $t \in [0,1]$. Para que valores do parâmetro t a derivada desta cúbica é paralela à reta $y = 2x + 9$?
8. Sejam $(1, -1)$ e $(-1, -1)$ os vetores de controle da curva da segunda derivada de uma certa curva de Bézier. Sabendo-se que a curva é uma aplicação do intervalo $[4, 7]$ no plano afim, que $\mathbf{b}_2 = (2, 1)$ e que $\frac{d\mathbf{b}}{du}(7) = (3, 3)$, encontre os demais pontos da curva de Bézier e faça seu esboço.
9. Considere duas cúbicas de Bézier controladas pelos pontos $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, e $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5$ e \mathbf{b}_6 . São dados $\mathbf{b}_0 = (-1, -1)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (\frac{2}{3}, 1)$, $\mathbf{b}_4 = (1, 1)$ e $\mathbf{b}_6 = (3, 1)$. As curvas são aplicações dos intervalos $[1, u_1]$ e $[u_1, 4]$, onde $u_1 \in]1, 4[$.
 - (a) Determine o valor u_1 para que as curvas sejam \mathcal{C}^1 na junção.
 - (b) Determine \mathbf{b}_5 de tal forma que as curvas sejam \mathcal{C}^2 na junção.
 - (c) Faça um esboço da curva composta.
10. Mostre que uma curva Bézier cúbica não planar não pode ter um ponto onde a primeira derivada se anula.
11. Considere uma curva de Bézier $\mathbf{b}_0^2(t)$ controlada pelos pontos $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ e \mathbf{b}_2 arbitrários. A partir desta curva inicial considere uma seqüência de curvas de Bézier de grau 2, sendo que a i -ésima curva de Bézier, com notação $\{\mathbf{b}_0^2(t)\}^{(i)}$, é controlada pelos pontos $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1^{(i)}$ e \mathbf{b}_2 , onde $\mathbf{b}_1^{(i)} = \{\mathbf{b}_0^2(\frac{1}{2})\}^{(i-1)}$ com $i = 1, 2, \dots$, e $\mathbf{b}_1^{(0)} = \mathbf{b}_1$ e $\{\mathbf{b}_0^2(t)\}^{(0)} = \mathbf{b}_0^2(t)$. Mostre que $\mathbf{b}_1^{(i)}$ se aproxima do ponto médio entre \mathbf{b}_0 e \mathbf{b}_2 , à medida que i cresce.
12. Considere a superfície de Bézier Tensorial $\mathbf{b}_{00}^{1,2}(s, t) \in \mathbb{E}^3$, com $s, t \in [0, 1]$, controlada por $\mathbf{b}_{00} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{10} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_{01} = (0, 0, 2)$, $\mathbf{b}_{11} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{b}_{02} = (2, 0, 2)$ e $\mathbf{b}_{12} = (2, 1, 0)$.
 - (a) Encontre a expressão de $\mathbf{b}_{00}^{1,2}(s, t)$, simplificando.

- (b) Faça um esboço da superfície.
- (c) Encontre os pontos de controle da curva isoparamétrica para a qual $s = \frac{1}{2}$.
13. Considere a malha de controle composta por: $\mathbf{b}_{00} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{01} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_{02} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{b}_{10} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{11} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_{12} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_{20} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{21} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{b}_{22} = (2, 2, 0)$. A superfície de Bézier Tensorial é uma aplicação $\mathbf{b}_{00}^{2,2} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$, onde $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(0, 0) = \mathbf{b}_{00}$, $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(0, 1) = \mathbf{b}_{02}$, $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(1, 0) = \mathbf{b}_{20}$ e $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(1, 1) = \mathbf{b}_{22}$, caracterizada por ser o resultado da aplicação do algoritmo de de Casteljau a esta malha.
- (a) Encontre $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- (b) Faça um esboço da superfície junto com a malha de controle. Observe que o ponto encontrado no item anterior pertence ao plano que contém os pontos \mathbf{b}_{01} , \mathbf{b}_{10} , \mathbf{b}_{21} e \mathbf{b}_{12} . Faça o esboço deste plano, que é tangente à superfície.
- (c) As curvas isoparamétricas são curvas de Bézier. Encontre os pontos de controle da curva para a qual $s = \frac{1}{4}$, bem como para a curva tal que $t = \frac{3}{4}$.
- (d) Encontre as equações cartesianas das curvas das bordas.
- (e) Mostre que a equação cartesiana da superfície é $z - 1 = -\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{2}$.
14. Demonstre que uma superfície de Bézier tensorial é invariante afim (avaliação de um ponto por de Casteljau comuta com operador afim). Demonstre também que a superfície de Bézier tensorial interpola as curvas de Bézier das bordas.
15. Dada a malha de controle de uma superfície de Bézier, podemos usar o algoritmo de de Casteljau para computar $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ de três formas distintas: pela forma direta ou pelas duas formas tensoriais (avaliando-se na direção de u e depois na de v ; e o inverso). Faça uma comparação do número de interpolações lineares de cada forma para graus arbitrários m, n .
16. Encontre pontos de controle que geram o cilindro reto parabólico $y = x^2 - 1$. Encontre também pontos de controle de uma superfície de Bézier tensorial bicúbica tal que todas as curvas isoparamétricas em u tenham um ponto em que a primeira derivada se anula.
17. Mostre que o algoritmo direto de de Casteljau é equivalente ao algoritmo que utiliza a abordagem tensorial (de Casteljau de curva) para geração de superfície tensorial de Bézier.