

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Informática e Departamento de Matemática  
Computação Gráfica - Segundo Semestre-2003  
Segunda Lista de Exercícios-Entrega:04/02/2004

1. Mostre que os polinômios de Bernstein  $B_i^n$  formam uma base para o espaço dos polinômios de grau  $n$ .
2. Esboce uma curva de Bézier de grau 4, juntamente com sua poligonal de controle, de tal forma que a curva passe pelo vértice de controle  $\mathbf{b}_2$ . Use a forma de Bernstein para determinar que condições devemos impor em  $\mathbf{b}_2$  (em função dos demais pontos de controle) para que  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_0^4(\frac{1}{2})$ .
3. Mostre que o polinômio de Bernstein  $B_i^n$  possui um único valor de máximo no intervalo  $[0,1]$ , correspondente a  $t = i/n$ . Encontre o valor de máximo e indique o que acontece para um  $n$  muito grande.
4. Considere os pontos de controle que são encontrados da seguinte forma:  $\mathbf{b}_0$  é o simétrico de  $\mathbf{b}_3$  em relação a um sistema de coordenadas arbitrário, e  $\mathbf{b}_1$  é o simétrico de  $\mathbf{b}_2$  em relação a este mesmo sistema. Mostre que a curva de Bézier correspondente a esta poligonal de controle passa pela origem daquele sistema.
5. Faça um esboço da curva de Bézier gerada pela poligonal  $(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(-1,1)$  e  $(0,2)$  (nesta ordem), e um esboço da curva de Bézier da primeira derivada e também da segunda derivada (todas com suas respectivas poligonais de controle).
6. Considere uma cúbica de Bézier qualquer. Expresse  $\mathbf{b}_0$  em termos dos demais vértices de tal forma que a derivada da cúbica se anule para  $t = 1/2$ . Faça um esboço de uma curva nestas condições (utilizando coordenadas baricêntricas) e de sua primeira derivada.
7. Considere a curva de Bézier  $\mathbf{b}(t)$  cuja poligonal é dada pelos pontos:  $(0,0),(0,1),(1,0)$  e  $(0,0)$  (nesta ordem), com  $t \in [0,1]$ . Para que valores do parâmetro  $t$  a derivada desta cúbica é paralela à reta  $y = x + 5$ ?
8. Sejam  $(1, -1)$  e  $(-1, -1)$  os vetores de controle da curva da segunda derivada de uma certa curva de Bézier. Sabendo-se que a curva é uma aplicação do intervalo  $[4, 7]$  no plano afim, que  $\mathbf{b}_2 = (2, 1)$  e que  $\frac{d\mathbf{b}}{du}(7) = (3, 3)$ , encontre os demais pontos da curva de Bézier e faça seu esboço.
9. Considere duas cúbicas de Bézier controladas pelos pontos  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ , e  $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5$  e  $\mathbf{b}_6$ . São dados  $\mathbf{b}_0 = (-1, -1), \mathbf{b}_1 = (0, 3), \mathbf{b}_2 = (0, 1), \mathbf{b}_3 = (\frac{2}{3}, 1), \mathbf{b}_4 = (1, 1)$  e  $\mathbf{b}_6 = (3, 1)$ . As curvas são aplicações dos intervalos  $[1, u_1]$  e  $[u_1, 4]$ , onde  $u_1 \in ]1, 4[$ .
  - (a) Determine o valor  $u_1$  para que as curvas sejam  $\mathcal{C}^1$  na junção.
  - (b) Determine  $\mathbf{b}_5$  de tal forma que as curvas sejam  $\mathcal{C}^2$  na junção.
  - (c) Faça um esboço da curva composta.
10. Mostre que uma curva Bézier cúbica não planar não pode ter um ponto onde a primeira derivada se anula.
11. Considere a poligonal  $(0,0),(1,1),(2,3),(3,1)$  e  $(5,2)$  e a curva de Bézier  $\mathbf{b}^4(t)$  definida sobre o intervalo  $[0,1]$ . Encontre os pontos de controle de uma curva de Bézier  $\mathbf{c}^4(t)$  definida sobre  $[1,3]$  tal que a curva obtida pela concatenação de  $\mathbf{b}^4(t)$  e  $\mathbf{c}^4(t)$  seja  $\mathcal{C}^2$  mas não  $\mathcal{C}^3$  na junção.
12. Considere uma curva de Bézier  $\mathbf{b}_0^2(t)$  controlada pelos pontos  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  arbitrários. A partir desta curva inicial considere uma sequência de curvas de Bézier de grau 2, sendo que a  $i$ -ésima curva de Bézier, com notação  $\{\mathbf{b}_0^2(t)\}^{(i)}$ , é controlada pelos pontos  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1^{(i)}$  e  $\mathbf{b}_2$ , onde  $\mathbf{b}_1^{(i)} = \{\mathbf{b}_0^2(\frac{1}{2})\}^{(i-1)}$  com  $i = 1, 2, \dots$ , e  $\mathbf{b}_1^{(0)} = \mathbf{b}_1$  e  $\{\mathbf{b}_0^2(t)\}^{(0)} = \mathbf{b}_0^2(t)$ . Mostre que  $\mathbf{b}_1^{(i)}$  se aproxima do ponto médio entre  $\mathbf{b}_0$  e  $\mathbf{b}_2$ , à medida que  $i$  cresce.