

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

## Centro de Informática

Processamento gráfico - 2ª Lista de Exercícios - 1º Semestre/2004- Entrega:09/08/2004

1. Esboce uma curva de Bézier de grau 4, juntamente com sua poligonal de controle, de tal forma que a curva passe pelo vértice de controle  $\mathbf{b}_2$ . Use a forma de Bernstein para determinar que condições devemos impor em  $\mathbf{b}_2$  (em função dos demais pontos de controle) para que  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_0^4(\frac{1}{2})$ .
2. Mostre analiticamente que uma curva de Bézier quadrática nunca passa pelo ponto  $\mathbf{b}_1$ , a menos que os pontos de controle sejam colineares.
3. Considere os pontos de controle que são encontrados da seguinte forma:  $\mathbf{b}_0$  é o simétrico de  $\mathbf{b}_3$  em relação a um sistema de coordenadas arbitrário, e  $\mathbf{b}_1$  é o simétrico de  $\mathbf{b}_2$  em relação a este mesmo sistema. Mostre que a curva de Bézier correspondente a esta poligonal de controle passa pela origem daquele sistema.
4. Faça um esboço da curva de Bézier gerada pela poligonal  $(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(-1,1)$  e  $(0,2)$  (nesta ordem), e um esboço da curva de Bézier da primeira derivada e também da segunda derivada (todas com suas respectivas poligonais de controle).
5. Considere uma cúbica de Bézier qualquer. Expresse  $\mathbf{b}_0$  em termos dos demais vértices de tal forma que a derivada da cúbica se anule para  $t = 1/2$ . Faça um esboço de uma curva nestas condições (utilizando coordenadas baricêntricas) e de sua primeira derivada.
6. Considere a curva de Bézier  $\mathbf{b}(t)$  cuja poligonal é dada pelos pontos:  $(0,0),(0,1),(1,0)$  e  $(0,0)$  (nesta ordem), com  $t \in [0, 1]$ . Para que valores do parâmetro  $t$  a derivada desta cúbica é paralela à reta  $y = 2x + 9$ ?
7. Sejam  $(1, -1)$  e  $(-1, -1)$  os vetores de controle da curva da segunda derivada de uma certa curva de Bézier. Sabendo-se que a curva é uma aplicação do intervalo  $[4, 7]$  no plano afim, que  $\mathbf{b}_2 = (2, 1)$  e que  $\frac{d\mathbf{b}}{du}(7) = (3, 3)$ , encontre os demais pontos da curva de Bézier e faça seu esboço.
8. Mostre que uma curva Bézier cúbica não planar não pode ter um ponto onde a primeira derivada se anula.
9. Considere a superfície de Bézier Tensorial  $\mathbf{b}_{00}^{1,2}(s, t) \in \mathbb{IE}^3$ , com  $s, t \in [0, 1]$ , controlada por  $\mathbf{b}_{00} = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{10} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{01} = (0, 0, 2)$ ,  $\mathbf{b}_{11} = (0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b}_{02} = (2, 0, 2)$  e  $\mathbf{b}_{12} = (2, 1, 0)$ .
  - (a) Encontre a expressão de  $\mathbf{b}_{00}^{1,2}(s, t)$ , simplificando.
  - (b) Faça um esboço da superfície.
  - (c) Encontre os pontos de controle da curva isoparamétrica para a qual  $s = \frac{1}{2}$ .
10. Considere a malha de controle composta por:  $\mathbf{b}_{00} = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{01} = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{b}_{02} = (0, 2, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{10} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b}_{11} = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b}_{12} = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{b}_{20} = (2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{21} = (2, 1, 1)$  e  $\mathbf{b}_{22} = (2, 2, 0)$ . A superfície de Bézier Tensorial é uma aplicação  $\mathbf{b}_{00}^{2,2} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{IE}^3$ , onde  $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(0, 0) = \mathbf{b}_{00}$ ,  $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(0, 1) = \mathbf{b}_{02}$ ,  $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(1, 0) = \mathbf{b}_{20}$  e  $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(1, 1) = \mathbf{b}_{22}$ , caracterizada por ser o resultado da aplicação do algoritmo de de Casteljau a esta malha.
  - (a) Encontre  $\mathbf{b}_{00}^{2,2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
  - (b) Faça um esboço da superfície junto com a malha de controle. Observe que o ponto encontrado no item anterior pertence ao plano que contém os pontos  $\mathbf{b}_{01}$ ,  $\mathbf{b}_{10}$ ,  $\mathbf{b}_{21}$  e  $\mathbf{b}_{12}$ . Faça o esboço deste plano, que é tangente à superfície.
  - (c) As curvas isoparamétricas são curvas de Bézier. Encontre os pontos de controle da curva para a qual  $s = \frac{1}{4}$ , bem como para a curva tal que  $t = \frac{3}{4}$ .
  - (d) Encontre as equações cartesianas das curvas das bordas.
  - (e) Mostre que a equação cartesiana da superfície é  $z - 1 = -\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{2}$ .

11. Demonstre que uma superfície de Bézier tensorial é invariante afim (avaliação de um ponto por de Casteljau comuta com operador afim). Demonstre também que a superfície de Bézier tensorial interpola as curvas de Bézier das bordas.
12. Dada a malha de controle de uma superfície de Bézier, podemos usar o algoritmo de de Casteljau para computar  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  de três formas distintas: pela forma direta ou pelas duas formas tensoriais (avaliando-se na direção de  $u$  e depois na de  $v$ ; e o inverso). Faça uma comparação do número de interpolações lineares de cada forma para graus arbitrários  $m, n$ .
13. Mostre que o algoritmo direto de de Casteljau é equivalente ao algoritmo que utiliza a abordagem tensorial (de Casteljau de curva) para geração de superfície tensorial de Bézier.
14. A configuração de câmera apresentada em aula induz um tronco de pirâmide de visualização, de tal forma que suas arestas (ao serem prolongadas) passam pelo foco e pelos vértices da janela de visualização, localizada no plano de vista. Suponha que, numa representação de câmera, no lugar dos parâmetros  $h_x$  e  $h_y$  dois ângulos são fornecidos: um deles é o ângulo que duas faces opostas fazem entre si, e o outro é o ângulo que as outras duas faces fazem entre si. No lugar do foco, o centro da janela é dado. Além disso, a origem no sistema projetado fica no canto superior esquerdo. Encontre as expressões que convertem de uma representação para a outra, e encontre a expressão da projeção em perspectiva nesta representação.
15. Para mostrar que uma curva de Bézier não satisfaz a propriedade da invariância por projeções em perspectiva, considere o seguinte contra-exemplo: a câmera virtual possui os seguintes parâmetros:  $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{V} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{C} = (0, 0, 1)$ ,  $h_x = h_y = d = 1$  e os pontos de controle da cúbica:  $\mathbf{b}_0 = (-1, -1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 10)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 10)$ , para  $t = \frac{1}{2}$ .
16. Considere uma câmera virtual cuja projeção utilizada é ortogonal. Que parâmetros são minimamente necessários para configurar esta câmera? Mostre que uma curva de Bézier satisfaz a propriedade de invariância por projeção ortogonal. Em coordenadas de vista, qual é a expressão deste tipo de projeção?
17. Os objetos a serem mostrados na tela devem estar à frente da câmera, ou seja, à frente do plano de vista. Identifique os efeitos em termos de aparência ao se manipular o parâmetro  $d$  bem como  $h_x$  e  $h_y$ . Qual é a diferença entre a manipulação de  $d$  e a de  $h_x$  e  $h_y$ ?
18. Considere a cúbica de Bézier dada por  $\mathbf{b}_0 = (-1, -1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 3)$ . Pretende-se mover uma câmera para produzir uma animação, de forma que sua trajetória é descrita por esta curva de Bézier, com  $d$ ,  $h_x$  e  $h_y$  constantes. A câmera deve apontar na direção tangente ao movimento, e a orientação vertical deve ser ortogonal à direção tangente, e estar no mesmo plano que a tangente gera com a segunda derivada. Encontre as expressões  $\mathbf{N}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{U}(t)$  e  $\mathbf{C}(t)$  para  $t \in [0, 1]$ .
19. Uma estudante de C.G. está com um objeto cujo ponto central é  $(1, 0, -1)$ . Ela posicionou a câmera com o foco igual a  $(2, 1, 1)$ . A câmera aponta na direção do ponto central do objeto, com a vertical na direção do eixo OZ (que deve ser ortogonalizado). Ela pretende rotacionar o objeto diversas vezes por um ângulo de  $10^\circ$  em torno do ponto central, com eixo de rotação OZ. Encontre as transformações que devem ser aplicadas aos parâmetros da câmera:  $N$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $C$ ,  $d$ ,  $h_x$  e  $h_y$  para produzir o mesmo efeito da citada rotação do objeto que a estudante pretende fazer.
20. Considere uma câmera configurada da seguinte forma:  $C = (0, 0, -2)$ ,  $V = (0, 1, 0)$ ,  $N = (0, 0, 1)$ ,  $d = 1$ ,  $h_x = h_y = 10$ . Pretende-se utilizar o algoritmo do Pintor para resolver o problema de visibilidade na visualização de dois triângulos: um com vértices  $(1, 1, 10)$ ,  $(2, 1, 10)$  e  $(1, 2, 10)$ , e o outro com vértices:  $(1, 7, 0)$ ,  $(7, 1, 0)$  e  $(1, 1, 15)$ . Descreva o problema que está ocorrendo, no caso de se usar a coordenada  $z$  do baricentro, ou sua distância para o foco na ordenação dos triângulos. Como os algoritmos de  $z$ -buffer, *ray tracing* básico e o BSP resolvem este problema?
21. Suponha que uma árvore de BSP foi montada para resolver a visibilidade de uma família de triângulos, resultando no seguinte conjunto de nós:  $(9\ 5\ 3)$ ,  $(10\ 9\ 7)$ ,  $(8\ 7\ 6)$ ,  $(1\ 3\ 4)$  e  $(2\ 4\ 11)$ , onde, nesta notação,  $(A\ B\ C)$ ,  $A$  é o filho da direita, que corresponde a uma face que está na frente da face do nó,  $B$  é o nó, e  $C$

é o filho da esquerda, que corresponde a uma face que está atrás da face do nó. A câmera foi posicionada numa partição tal que ela fica à frente das seguintes faces: 2, 4, 11 e 7; e atrás das demais faces. Encontre a seqüência de faces a ser utilizada, de forma a evitar que faces escondidas sejam desenhadas.

22. Considere um sistema gráfico em que o algoritmo de visibilidade é o *ray tracing* básico. Os parâmetros da câmera são  $N$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $C$ ,  $d$ ,  $h_x$  e  $h_y$ , e se pretende trabalhar com uma grade de pixels de  $400 \times 400$ . Encontre a equação de um “raio” (reta paramétrica) para o ponto que tem coordenadas de tela  $(x_0, y_0)$ , em coordenadas de vista e mundiais. Quais são as interseções desta reta com a esfera centrada em  $(0,0,0)$  de raio  $r$ ?
23. Quantas intensidades de cor podem ser apresentadas simultaneamente num dispositivo com  $m \times m$  pixels, com cada pixel com  $w$  bits?
24. Nos antigos equipamentos gráficos, a quantidade de intensidades de cor simultâneas apresentadas pelo monitor dependia da memória de vídeo disponível, que não era muito grande. A resolução poderia ser alta, como  $1024 \times 1024$ , mas não havia a correspondência de 1 pixel para cada posição de memória de vídeo. Assim, havia uma tabela de cores armazenadas na memória de vídeo, que o usuário preenchia com todas as cores que pretendia usar, limitado apenas pelo tamanho da tabela, e então o índice da tabela era utilizado para especificar a cor do pixel. Considere o cubo  $[0, 255]^3$  de cores RGB. Deste cubo, serão escolhidas  $n$  cores, onde  $n$  corresponde ao tamanho da tabela de cores.
  - (a) Se as  $n$  cores forem escolhidas uniformemente no cubo inteiro, então qual é o menor valor de  $n$  para que 128 tons de cinza estejam na tabela?
  - (b) Se a tabela possui 1024 posições e as cores a serem armazenadas são escolhidas a partir do segmento de reta que liga os pontos  $(120, 220, 60)$  e  $(30, 180, 200)$ , que cor estará na posição 256?
  - (c) Se a tabela possui 1024 posições, e as cores a serem armazenadas são escolhidas da curva de Bézier controlada por  $(20, 35, 40)$ ,  $(200, 110, 80)$  e  $(60, 180, 160)$ , que cor estará na posição 512? Que interpretação se dá para os pontos de controle?
25. No sistema de cores do CIE, três primárias cores foram arbitradas de forma que todas as cores visíveis fossem obtidas como combinações convexas (ou seja, não negativas) das primárias. Considere as seguintes aproximações polinomiais das primárias:  $\bar{x}(\lambda) = \begin{cases} 11(\lambda - 5)^2(\lambda - 7)^2, & 5 \leq \lambda \leq 7 \\ 48(\lambda - 4)^2(\lambda - 5)^2, & 4 \leq \lambda \leq 5 \end{cases}$ ,  $\bar{y}(\lambda) = 2(\lambda - 4)^2(\lambda - 7)^2$  e  $\bar{z}(\lambda) = \begin{cases} 56(\lambda - 4)^2(\lambda - 5, 5)^2, & 4 \leq \lambda \leq 5, 5 \\ 0, & 5, 5 \leq \lambda \leq 7 \end{cases}$ . As quantidades X, Y e Z de primárias necessárias para se obter a cor metamérica à cor de distribuição espectral dada por  $P(\lambda)$  são dadas por  $X = \frac{25}{81} \int_4^7 P(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda$ ,  $Y = \frac{25}{81} \int_4^7 P(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$  e  $Z = \frac{25}{81} \int_4^7 P(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$ , onde  $\lambda$  é dada em  $10^2 nm$ .
  - (a) Quais são as coordenadas (X,Y,Z) da cor branca, aqui definida como  $P(\lambda) = 20, 4 \leq \lambda \leq 7$ ?
  - (b) Encontre a distribuição espectral de uma cor cujas coordenadas são  $(25, 50, 75)$ . *Sugestão: Como estamos livres para escolher qualquer cor metamérica, pode-se utilizar uma função constante por partes. Para facilitar a integração, faça uma mudança de variável, do tipo  $u = \lambda - 4$ .*