Dedução do Princípio de Duhamel para as Equações do Calor e da Onda Usando a Função de Green

Roberto Toscano Couto
Dep. Matemática Aplicada, UFF
24020-140, Niterói, RJ
toscano@im.uff.br

Resumo: Neste trabalho, o princípio de Duhamel para as equações do calor e da onda é deduzido. O ponto de partida são as soluções dessas equações em termos das funções de Green associadas. Essas soluções também são deduzidas, e a interpretação física daquele princípio é fornecida.

Palavras-chave: Duhamel, calor, onda, função de Green.

1) Introdução

O princípio de Duhamel é comumente aplicado para resolver equações do calor e da onda *não-homogêneas* (i.e., problemas de calor e onda com fontes não-nulas). O seu uso permite que se escreva a solução em termos de uma função auxiliar que é mais fácil de ser calculada. De fato, tal função é a solução de uma equação do calor ou da onda *homogênea*, tornando-se o termo de fonte original numa condição inicial.

Uma demonstração *construtiva* do princípio de Duhamel para as equações do calor e da onda é dificilmente encontrada na literatura. A prática rotineira (e.g., Referências [1], [2], [6] e [7, Prob. 6.5 do Cap. VIII e Prob. 2.9 do Cap. IX]) consiste em enunciar o princípio de Duhamel e então verificar que ele de fato fornece a solução: a função que satisfaz todas as condições do problema. Neste trabalho, *deduzimos* o princípio de Duhamel. O ponto de partida é a solução expressa em termos da função de Green. Assim procedendo, aprofundamo-nos no significado daquele princípio, entendendo com clareza a sua formulação.

O princípio de Duhamel é um método de resolver apenas a questão da não-homogeneidade da equação diferencial. No seu estudo, portanto, basta considerar somente condições iniciais e de fronteira que sejam homogêneas. Além disso, o seu desenvolvimento é praticamente independente do número de dimensões espaciais. Assim, a dedução tridimensional aqui apresentada pode ser prontamente adaptada a problemas uni ou bidimensionais.

A Seção 2 contém a definição dos problemas de calor e onda que serão resolvidos, bem como a dedução da solução desses problemas em termos da função de Green. A Seção 3 apresenta a dedução do princípio de Duhamel. A Seção 4 fornece a interpretação física desse princípio. A Seção 5 acresce comentários finais, encerrando a exposição.

2) O Problema e sua Solução em Termos da Função Green

Considere o problema de resolver a seguinte equação, com $\vec{r}$ em $\mathcal{V}$ (um domínio do $\mathbb{R}^3$) e $t > 0$:

$$\frac{\partial^n u_n}{\partial t^n}(\vec{r},t) - a^2\,\nabla^2 u_n = b\,f(\vec{r},t)\ , \tag{1}$$

com $n = 1$ e $n = 2$. Trata-se da equação do calor se $n = 1$ (u_1 é uma temperatura) e da equação da onda se $n = 2$ (u_2 é uma medida da perturbação causada por uma onda). Na superfície $\partial\mathcal{V}$ de $\mathcal{V}$, admitimos condições de fronteira bastante genéricas, mas homogêneas, dadas por

$$\hat{\mathrm{B}}u_n(\vec{r},t) = 0 \quad \left[\vec{r} \in \partial\mathcal{V},\ t \geq 0\right]. \tag{2}$$

Nessa equação, $\hat{\mathrm{B}}$ é um operador linear [e.g., $\hat{\mathrm{B}} = 1$ e $\hat{\mathrm{B}} = \partial/\partial n$ (derivada normal), correspondendo às condições de Dirichlet e de Neumann, respectivamente].

As condições iniciais também são homogêneas:

$$u_n(\vec{r},0) = 0 \quad \left[\vec{r} \in \overline{\mathcal{V}} \equiv \mathcal{V} \cup \partial\mathcal{V}\right] \tag{3}$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(\vec{r},0) = 0 \quad \left[\vec{r} \in \overline{\mathcal{V}}\right] . \tag{4}$$

A função de Green associada, denotada por $G_n(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t')$, com $\vec{r}\,'$ em $\mathcal{V}$ e para quaisquer t e t' reais, é definida (Referência [5]) como sendo a solução de

$$\frac{\partial^n G_n}{\partial t^n}(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t') - a^2\,\nabla^2 G_n$$

$$= b\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t') \quad \left[\vec{r} \text{ in } \mathcal{V}\right] , \tag{5}$$

sob a mesma condição de fronteira,

$$\hat{\mathrm{B}} G_n(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t') = 0 \quad \left[\vec{r} \in \partial\mathcal{V}\right] . \tag{6}$$

Em vez de condições iniciais, impomos a condição de *causalidade*:

$$G_n(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t') = 0 \quad \text{se } t < t' . \tag{7}$$

Para expressar a solução do problema dado por (1) a (4) em termos da função de Green, multiplicamos (5) por $f(\vec{r}\,',t')$ e efetuamos uma integração espacial (em todos pontos $\vec{r}\,'$ de $\mathcal{V}$) e outra temporal (no intervalo desde $t' = 0$ até $t' = t^+$, onde $t^+ \equiv t + \varepsilon$, com $\varepsilon \to 0^+$), obtendo

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\int_0^{t^+} dt' \int_{\mathcal{V}} dV'\, G_n(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t')\, f(\vec{r}\,',t')\right]$$

$$-a^2\,\nabla^2\left[\int_0^{t^+} dt' \int_{\mathcal{V}} dV'\, G_n(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t')\, f(\vec{r}\,',t')\right]$$

$$= b\int_0^{t^+} dt' \int_{\mathcal{V}} dV'\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')\, f(\vec{r}\,',t') .$$

Esta equação, cujo membro direito vem a ser igual a $b\,f(\vec{r},t)$, revela que o termo entre colchetes satisfaz (1), ou seja, que

$$u_n(\vec{r},t) = \int_0^t dt' \int_{\mathcal{V}} dV'\, G_n(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t')\, f(\vec{r}\,',t') . \tag{8}$$

Por outro lado, verifica-se facilmente que (8) também satisfaz a condição de fronteira (2) [em vista de (6) e do fato de $\hat{\mathrm{B}}$ não apresentar operações diferenciais com respeito a $\vec{r}\,'$, mas somente em relação a $\vec{r}$] bem como as condições iniciais (3) e (4) [pois, de acordo com (8), os valores de u_n e $\partial u_n / \partial t$ em $t = 0$ são dados por integrais do tipo $\int_0^{0^+} dt'$, que certamente se anula]. Portanto, (8) fornece uma representação integral da solução dos problemas de calor e onda considerados.

3) O Princípio de Duhamel

Definindo

$$U_n(\vec{r},t \mid t') \equiv \int_{\mathcal{V}} dV'\, G_n(\vec{r},t \mid \vec{r}\,',t')\, f(\vec{r}\,',t') , \tag{9}$$

podemos escrever (8) na forma

$$u_n(\vec{r},t) = \int_0^t dt'\, U_n(\vec{r},t \mid t') . \tag{10}$$

Vamos deduzir quais as condições que $U_n(\vec{r},t \mid t')$ deve satisfazer.

Aplicando o operador $\partial^n / \partial t^n - a^2\,\nabla^2$ na esquerda de (9), isto é,

$$\frac{\partial^n U_n}{\partial t^n}(\vec{r},t \mid t') - a^2\,\nabla^2 U_n =$$

$$\int_{\mathcal{V}} dV'\, f(\vec{r}\,',t') \underbrace{\left[\frac{\partial^n G_n}{\partial t^n}(\vec{r},t|\vec{r}\,',t') - a^2\nabla^2 G_n\right]}_{b\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')} ,$$

e usando (5) para substituir o termo entre colchetes conforme indicamos acima, verificamos que $U_n(\vec{r},t \mid t')$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial^n U_n}{\partial t^n}(\vec{r},t\,|\,t') - a^2\,\nabla^2 U_n$$

$$= b\,f(\vec{r},t')\,\delta(t-t') \ . \qquad (11)$$

Se aplicarmos o operador $\hat{\mathrm{B}}$ na esquerda de (9) e usarmos (6), vemos que, estando $\vec{r}_S$ em $\partial\mathcal{V}$,

$$\hat{\mathrm{B}}U_n(\vec{r}_S,t\,|\,t') =$$

$$\int_{\mathcal{V}} dV'\,f(\vec{r}',t')\,\underbrace{[\hat{\mathrm{B}}G_n(\vec{r}_S,t\,|\,\vec{r}',t')]}_{0} = 0\,. \qquad (12)$$

Esta é a condição de fronteira para $U_n(\vec{r},t\,|\,t')$.

Considere agora a equação abaixo, obtida com a integração de (11) no intervalo temporal desde $t = t'^-$ $(= t'-\varepsilon$, com $\varepsilon \to 0^+)$ até t:

$$\frac{\partial^{n-1} U_n}{\partial t^{n-1}}(\vec{r},t\,|\,t') - \underbrace{\frac{\partial^{n-1} U_n}{\partial t^{n-1}}(\vec{r},t'^-\,|\,t')}_{0}$$

$$- a^2\,\nabla^2 \int_{t'^-}^{t} d\tau\ U_n(\vec{r},\tau\,|\,t')$$

$$= b f(\vec{r},t') \int_{t'^-}^{t} \delta(\tau-t')d\tau \ , \qquad (13)$$

onde igualamos o segundo termo a zero em virtude da condição de causalidade (7). Fazendo $t = t'^+$ na equação acima, ela passa a ser

$$\frac{\partial^{n-1} U_n}{\partial t^{n-1}}(\vec{r},t'^+\,|\,t')$$

$$- a^2\,\nabla^2 \underbrace{\int_{t'^-}^{t'^+} d\tau\, U_n(\vec{r},\tau\,|\,t')}_{0}$$

$$= b f(\vec{r},t') \underbrace{\int_{t'^-}^{t'^+} \delta(\tau-t')d\tau}_{1}$$

(a integral no membro esquerdo é nula, porque ela é a integral de uma função finita num intervalo infinitesimal), isto é

$$\frac{\partial^{n-1} U_n}{\partial t^{n-1}}(\vec{r},t'^+\,|\,t') = b f(\vec{r},t') \ . \qquad (14)$$

Uma outra integração temporal de (13) com $n = 2$, desde $t = t'^-$ até $t = t'^+$, produz

$$U_2(\vec{r},t'^+\,|\,t') - \underbrace{U_2(\vec{r},t'^-\,|\,t')}_{0}$$

$$- a^2\,\nabla^2 \underbrace{\int_{t'^-}^{t'^+} d\theta \int_{t'^-}^{\theta} d\tau\, U_2(\vec{r},\tau\,|\,t')}_{0}$$

$$= b f(\vec{r},t') \underbrace{\int_{t'^-}^{t'^+} d\theta \int_{t'^-}^{\theta} d\tau\, \delta(\tau-t')}_{0} \ , \qquad (15)$$

ou

$$U_2(\vec{r},t'^+\,|\,t') = 0 \ . \qquad (16)$$

A explicação de igualarmos a zero vários dos termos na Equação (15) é a seguinte: A nulidade do segundo termo é conseqüência da condição de causalidade. O terceiro é nulo por ser a integral da função finita

$$\int_{t'^-}^{\theta} d\tau\ U_2(\vec{r},\tau\,|\,t')$$

num intervalo infinitesimal (de $\theta = t'^-$ a $\theta = t'^+$). Por esta mesma razão, a integral dupla da função delta se anula: a primeira integração da função delta produz um resultado finito, e a segunda integração é efetuada num intervalo infinitesimal; alternativamente, podemos calcular tal integral dupla invertendo-se, antes, a ordem das duas integrações, obtendo

$$\int_{t'^-}^{t'^+} d\tau\, \delta(\tau-t') \int_{\tau}^{t'^+} d\theta$$

$$= \int_{t'^-}^{t'^+} d\tau\ \delta(\tau-t')\,(t'^+ - \tau)$$

$$= \ t'^+ - \ t' = \ 0 \ .$$

Finalmente, coletando todas as condições sobre $U_n(\vec{r},t\,|\,t')$ que foram deduzidas acima, podemos dizer que a solução do problema definido por (1) até (4) é dado por (10), sendo $U_n(\vec{r},t\,|\,t')$ a solução do problema definido por (11) (uma equação homogênea quando $t > t'$), (12), (14) e (16).

Isto é, a solução dos problemas de calor e onda considerados é dado por

$$u_n(\vec{r},t) = \int_0^t dt'\, U_n(\vec{r},t\,|\,t') \ ,$$

onde $U_n(\vec{r},t\,|\,t')$ é a solução dos seguintes problemas de calor (se $n = 1$) e onda (se $n = 2$):

$$\frac{\partial^n U_n}{\partial t^n}(\vec{r},t|t') - a^2\nabla^2 U_n = 0 \quad \left[\vec{r} \text{ em } \mathcal{V},\ t > t'\right], \quad (17)$$

$$\hat{\mathrm{B}} U_n(\vec{r},t\,|\,t') = 0 \quad \left[\vec{r} \in \partial\mathcal{V}, t \ge t'\right], \quad (18)$$

$$U_1(\vec{r},t'\,|\,t') = b f(\vec{r},t') \quad \left[\vec{r} \in \overline{\mathcal{V}}\right], \quad (19)$$

$$U_2(\vec{r},t'\,|\,t') = 0 \quad \left[\vec{r} \in \overline{\mathcal{V}}\right], \quad (20)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}(\vec{r},t'\,|\,t') = b f(\vec{r},t') \quad \left[\vec{r} \in \overline{\mathcal{V}}\right]. \quad (21)$$

Observe que se trata de problemas de calor e onda cujo instante inicial é $t = t'$. Além disso, por serem homogêneas as equações da onda e do calor, eles são problemas mais simples do que os problemas originais, que podem ser resolvidos por separação de variáveis (no caso de $\mathcal{V}$ ser todo o espaço, U_2 pode ser calculado através da fórmula de Kirchhoff (cf. Referência [7, Ch. VIII, Sec. 5]).

4) Interpretação Física do Princípio de Duhamel

Consideremos primeiramente o problema de onda. De acordo com (5) e (7), podemos interpretar a função de Green $G_2(\vec{r},t\,|\,\vec{r}',t')$ como a onda que é gerada num sistema inicialmente (desde tempos remotos do passado) sem qualquer perturbação ondulatória (i.e., intacto) por uma perturbação punctiforme e instantânea de impulso unitário em $t = t'$ e $\vec{r} = \vec{r}'$. Portanto, em vista de (9), $U_2(\vec{r},t\,|\,t')\,dt'$ é a onda observada no ponto $\vec{r}$, no instante *t*, que se originou, no instante *t'* anterior, por meio da transferência instantânea do impulso $f(\vec{r}',t')\,dV'dt'$ a cada ponto $\vec{r}'$ do sistema ainda intacto. Da superposição de todas as ondas que assim se originam no intervalo de tempo desde 0 até *t*, resulta, segundo (10) com $n = 2$, a solução do problema, isto é, a onda $u_2(\vec{r},t)$ que se observa no ponto $\vec{r}$, no instante *t*.

$U_2(\vec{r},t\,|\,t')\,dt'$, descrevendo uma onda, deve satisfazer uma equação da onda: aquela dada por (17) com $n = 2$ (e multiplicada por dt'), a qual deve ser resolvida para $t > t'$. As condições iniciais dessa onda em $t = t'$ são dadas pelas Equações (20) e (21) (multiplicadas por dt'). A continuidade da variação de U_2 no tempo a partir de um sistema inicialmente intacto (no qual $U_2 = 0$) justifica a primeira condição inicial. As velocidades iniciais que são produzidas pelo impulso por unidade de massa instantâneo $b f dt'$, no instante inicial *t'*, justificam a segunda condição inicial.

Analogamente, com respeito ao problema de calor, mudando-se algumas palavras dos parágrafos acima, podemos afirmar o seguinte: (5) e (7) permitem que se interprete $G_1(\vec{r},t\,|\,\vec{r}',t')$ como a temperatura que é produzida num sistema inicialmente à temperatura zero (desde tempos remotos do passado) pela inserção instantânea de uma unidade de calor no ponto $\vec{r} = \vec{r}'$, no instante $t = t'$. Conseqüentemente, de acordo com (9), $U_1(\vec{r},t\,|\,t')\,dt'$ é a temperatura observada no ponto $\vec{r}$, no instante *t*, que foi produzida, no instante *t'* anterior, pela inserção instantânea da quantidade de calor $f(\vec{r}',t')\,dV'dt'$ em cada ponto $\vec{r}'$ do sistema ainda à temperatura zero. A superposição de todas as temperaturas que são assim produzidas no intervalo temporal de 0 a *t* fornece, segundo (10) com $n = 1$, a solução do problema, isto é, a temperatura $u_1(\vec{r},t)$ no ponto $\vec{r}$, no instante *t*.

$U_1(\vec{r},t\,|\,t')\,dt'$, sendo uma temperatura, deve satisfazer uma equação do calor: aquela dada por (17) com $n = 1$ (e multiplicada por dt'), a qual deve ser resolvida para $t > t'$. A condição inicial em $t = t'$, dada pela Equação (19) (multiplicada por dt'), é a temperatura inicial produzida pela inserção instantânea da quantidade $b\,f\,dt'$ de calor no instante inicial t'.

5) Comentários Finais

A nossa intenção de fornecer a interpretação física do princípio de Duhamel foi a razão de restringir a sua dedução ao caso das equações do calor e da onda. Mas o método apresentado aqui pode ser facilmente adaptado ao caso de equações diferenciais parciais mais genéricas.

Sobre o uso da função delta de Dirac, diga-se que ela simplifica consideravelmente os cálculos, pois, como se sabe, a função delta pode ser vista como um método abreviado de se obterem resultados que dependem de intricados processos de limite. Além disso, as suas principais propriedades encontram-se rigorosamente estabelecidas na literatura (e.g., Referências [3] e [4]), à nossa disposição, prontas para serem usadas.

References

[1] R. Courant e D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Volume II, Interscience Publishers, New York, 1962 (Ch. III, §4, 3).

[2] F. John, Partial Differential Equations, Third Edition, Springer-Verlag, New York, 1978 (Ch. 5, 1, c).

[3] D. S. Jones, The theory of generalised functions, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.

[4] M. J. Lighthill, An introduction to Fourier analysis and generalised functions, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1958.

[5] P. M. Morse e H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953 (Sec. 7.4).

[6] H. F. Weinberger, Ecuaciones Diferenciales En Derivadas Parciales, Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1970 (Sec. 78).

[7] E. C. Zachmanoglou e D. W. Thoe, Introduction to Partial Differential Equations with Applications, The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1976.