Equações de diferenças finitas e aplicações

Márcia P. Dantas, Kátia P. do Nascimento
Depto de Matemática, UFRPE,
52171-900, Recife, PE
márcia.pragana@gmail.com, katia1pires@yahoo.com.br

Resumo: *As equações de diferenças finitas são uma forte ferramenta no estudo de problemas modelados em tempo discreto que se situam na teoria dos sistemas dinâmicos discretos. A diferença reside no contexto. Nos sistemas dinâmicos a abordagem é mais qualitativa. Quando a abordagem é mais quantitativa usa-se a terminologia de equações de diferenças finitas. Sua teoria segue proximamente a teoria dos sistemas dinâmicos em tempo contínuo, com as devidas adaptações.*
Apresentamos as equações de diferenças, suas soluções e aplicações de forma acessível a estudantes de graduação com uma abordagem mais moderna do que a tradicional, usando álgebra linear. A literatura atual é bastante escassa neste sentido, privilegiando uma abordagem de sistemas dinâmicos discretos em nível de pós-graduação.

Trabalhamos com modelos lineares de primeira ordem e de segunda ordem e modelos não-lineares de 1ª ordem, mais precisamente, com equações autônomas. A abordagem é quantitativa e qualitativa. Neste caso, estudamos a evolução do modelo através da análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Apresentamos problemas clássicos como a Torre de Hanói, Seqüência de Fibonacci, o número Áureo e a logística discreta bem como problemas mais contextualizados de crescimento populacional como o da reprodução da tilápias do Rio Nilo.
Palavras-chave: equações lineares, equações autônomas, estabilidade, aplicações.

1 Introdução

Uma equação de diferenças de ordem n é uma equação do tipo

$$y_{k+n} = f(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n-1}) \qquad (1)$$

onde n é um número natural, $n > 0$ e f é uma função real sobre $\mathrm{IN} \times S^n$, onde S é o espaço vetorial das seqüências reais e $\mathrm{IN} = \{0,1,2,\ldots\}$. Quando $n = 1$, temos uma **equação de diferenças de primeira ordem**

$$y_{k+1} = f(k, y_k).$$

Quando f não depende da variável independente k, temos uma **equação autônoma,**

$$y_{k+1} = f(y_k).$$

A equação de diferenças (1) é **linear de ordem n** quando tem a forma

$$L(y_k) = a^0(k)y_{n+k} + a^1(k)y_{k+n-1} + \ldots + a^{n-1}(k)y_{k+1} + a^n(k)y_k = g(k),$$

ou seja, as variáveis $y_k, \ldots y_{k+n-1}$, aparecem como combinação linear cujos coeficientes $a^0, \ldots, a^{n-1}$ e g são funções de k mas não de y_k, ou seja são seqüências de números reais, com a^0 não identicamente nula; caso contrário, a equação é **não-linear**. Se os coeficientes não dependerem de k, teremos uma **equação linear com coeficientes constantes**. Quando g for identicamente nula a equação é **homogênea**, e **não homogênea** caso contrário.

Uma **solução** da equação de diferenças (1) é uma seqüência de números $y_0, y_1, y_2, \ldots$ que satisfaz a equação para cada $k = 0,1,2,\ldots$. No caso de uma equação autônoma, temos uma **solução de equilíbrio** quando y_k é constante, ou seja, tem sempre o mesmo valor para qualquer k.

Fixado $n_0 \geq 0$, um problema de valor inicial é a equação (1) com n condições iniciais, ou seja,

$$y_{k+n} = f(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n-1}), k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$$

$$y_{n_0} = y^0, y_{n_0+1} = y^1, \ldots, y_{n_0+n-1} = y^{n-1}.$$

2 Equações de diferenças de primeira ordem linear

O problema de valor inicial para uma equação de diferenças de primeira ordem linear é,

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n,\ \ y_{n_0} = n_0, \qquad (2)$$

e no caso de uma equação homogênea,

$$y_{n+1} = a_n y_n\ ,\ \ y_{n_0} = n_0, \qquad (3)$$

onde a_n e b_n são seqüências de números reais definidos para $n \geq n_0 \geq 0$, fixado $n_0 \geq 0$.

Por indução mostra-se que a solução de (3) é dada por

$$y_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_i\right) y^0, \qquad (4)$$

e introduzindo a notação $\prod_{k+1}^{k} a^i = 1$, a equação (2) tem solução

$$y_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_i\right) y^0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right] b_r. \qquad (5)$$

2.1 Equação com coeficientes constantes, $n_0 = 0$

(I) $a_n = a$ e $b_n = b \neq 0$, para todo n:

$$y_{n+1} = a y_n + b_n \Rightarrow y_n = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b,$$

e a convergência vai depender do valor de a.

- Se $a = 1$,

  $$y_n = y_0 + nb.$$

  Não existe ponto de equilíbrio e y_n fica ilimitado quando n tende ao infinito. A solução diverge.
- Se $a \neq 1$,

  $$y_n = a^n y_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b.$$

  Se $y_0 = \dfrac{b}{1-a}$, $y_n = y_0$ é a única solução de equilíbrio da equação:
  - Se $a < 1$, então $\lim a^n = 0$, e portanto y_n converge para $\dfrac{b}{1-a}$, para qualquer y_0.
  - Se $|a| > 1$, $\lim a^n = \pm\infty$ conforme $a > 0$ ou $a < 0$, se $y_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$, e portanto y_n diverge.
  - Se $a = -1$, y_n oscila, se $y_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$, e portanto y_n diverge.

(II) $a_n = a$ e $b_n = 0$, para todo n:

$$y_{n+1} = a y_n \Rightarrow y_n = a^n y_0,$$

cuja convergência depende do valor de a. As soluções de equilíbrio são $y_n = y_0$, se $a = 1$ e $y_n = 0$, se $a \neq 1$.

- Se $a = 1$, $y_n = y_0$, $\forall n$ é a solução com condição inicial y_0. Todas as soluções são de equilíbrio.
- Se $|a| < 1$, y_n converge para 0, para qualquer y_0.
- Se $|a| > 1$, y_n diverge, se $y_0 \neq 0$.
- Se $a = -1$, $y_n = \pm y_0$ conforme n é par ou ímpar, e portanto y_n diverge.

3 Teoria geral das equações lineares

A equação de diferenças linear pode ser vista como um operador linear $L: S \to S$ que transforma uma seqüência $\{y_k\}$ na seqüência $\{z_k\}$ definida por

$$L(y_k) = a^0(k) y_{n+k} + a^1(k) y_{k+n-1} + \ldots + a^{n-1}(k) y_{k+1} + a^n(k) y_k = z_k, \qquad (6)$$

para cada valor de $k \geq 0$. Quando $\{z_k\} = 0$, temos uma equação de diferenças homogênea,

$$L(y_k) = a^0(k) y_{n+k} + a^1(k) y_{k+n-1} + \ldots + a^{n-1}(k) y_{k+1} + a^n(k) y_k = 0, \qquad (7)$$

para cada valor de $k \geq 0$.

Proposição 1. *Fixada a seqüência $\{z_k\}$, toda solução de (6) é dada por $\{y_k\} = \{h_k\} + \{p_k\}$, onde $\{h_k\}$ é uma solução da equação homogênea associada (7) e $\{p_k\}$, é uma solução particular da equação não-homogênea (6).*

Teorema 2 (Existência e Unicidade de soluções). *Se $a^0(k) \neq 0$, para todo $k \geq 0$, e se a seqüência $\{z_k\}$ é dada, a equação (6) tem solução única sempre que $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ estiverem especificados.*

Teorema 3. *O conjunto H de todas as soluções da equação de diferenças linear homogênea de ordem n é um espaço vetorial de dimensão n.*

Corolário 4 *Toda solução de (7) se expressa como uma combinação linear*

$$y_h(k) = c_1 f^1(k) + \ldots + c_n f^n(k),$$

onde $\{\{f^1(k)\},\ldots\{f^n(k)\}\}$ *, é uma base para H.*

Um conjunto de n seqüências $\{\{f^1(k)\},\ldots\{f^n(k)\}\}$ do espaço vetorial S é linearmente independente quando a equação

$$c_1 f^1(k) + \ldots + c_n f^n(k) = 0, \ \forall \ \mathrm{k}$$

só tem solução trivial, ou seja, $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Tomando valores consecutivos de k, em (10), segue que $c_1,\ldots,c_n$ satisfazem o sistema linear de ordem n,

$$A(k)c = 0, \forall \ \mathrm{k}$$

onde

$$A(k) = \begin{pmatrix} f^1(k) & f^2(k) & \ldots & f^n(k) \\ f^1(k+1) & f^2(k+1) & \ldots & f^n(k+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^1(k+n-1) & f^2(k+n-1) & \ldots & f^n(k+n-1) \end{pmatrix}$$

A matriz *A(k)* é chamada de **matriz de Casorati** das n seqüências $\{f^1(k)\},\ldots\{f^n(k)\}$, e seu determinante $C(k) = \det A(k)$, chamado de **casoratiano.**

Teorema 5. *Sejam* $\{f^1(k)\},\ldots\{f^n(k)\}$ *n soluções de uma equação de diferenças linear homogênea de ordem n. Então elas são linearmente independentes se somente se o seu casoratiano C(k) for diferente de zero em algum ponto* $\mathrm{k}_0 \in \mathrm{IN}$. *Além disso, se o casoratiano for diferente de zero em algum ponto* k_0*, então ele será diferente de zero* $\forall \mathrm{k} \in \mathrm{IN}$.

Corolário 6: *Sejam* $\{f^1(k)\},\ldots\{f^n(k)\}$ *soluções de uma equação de diferença homogênea. Então* $C(k) = 0, \forall k \geq 0$ *ou* $C(k) \neq 0, \forall k \geq 0$.

4 Equações de diferenças de segunda ordem linear homogênea

A equação de diferenças com coeficientes constantes,

$$y_{n+1} = a_n y_{n-1} + b y_{n-2}, \tag{8}$$

tem solução geral, $y(n) = A_1 u_1(n) + A_2 u_2(n)$, onde $u_1(n)$ e $u_2(n)$ são soluções linearmente independentes de (8). Se $y(n) = y_n = k\lambda^n$ é uma solução de (8),

$$k\lambda^n - ak\lambda^{n-1} - bk\lambda^{n-2} = 0 \Rightarrow k\lambda^{n-2}(\lambda^2 - a\lambda - b) = 0$$

Se $\lambda = 0$, $y_n = 0$ para todo n, que é linearmente dependente. Logo, $\lambda \neq 0$. $P(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$ é o polinômio característico associado a (8) e suas raízes λ_1 e λ_2 são os autovalores,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Caso 1 $\Delta > 0$: autovalores reais e distintos,

$$y_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n. \tag{9}$$

As funções $u_1(n) = \lambda_1^{\mathrm{n}}$ e $u_2(n) = \lambda_2^{\mathrm{n}}$ são linearmente independentes, pois o casoratiano em $n = 0$ é $C(0) = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$.

Fazendo $n = 0$ e $n = 1$ em (9), tem-se

$$A_1 = \frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ e } A_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{10}$$

onde y_0 e y_1 são condições iniciais dadas.

Caso 2 $\Delta < 0$: autovalores complexos,

$$y_n = A_1\rho^n \cos n\theta + A_2\rho^n \sin n\theta, \tag{11}$$

onde $\lambda_1 = \alpha + \beta i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

As funções $u_1(n) = (\alpha + \beta\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$ e $u_2(n) = (\alpha - \beta\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$ são linearmente independentes, pois o casoratiano em $n = 0$ é $C(0) = \lambda_2 - \lambda_1 = -2\beta i \neq 0$.

A solução

$$y_n = A_1(\alpha + \beta i)^n + A_2(\alpha - \beta i)^n$$

é complexa, mas tomando a parte real e a parte imaginária, obtém-se a solução real (11).

Caso 3 $\Delta = 0$: os autovalores são reais iguais e a e a solução é dada por

$$y_n = (A_1 + A_2 n)\lambda_1^n.$$

O casoratiano de $u_1(n) = \lambda_1^{\mathrm{n}}$ e $u_2(n) = \mathrm{n}\lambda_1^{\mathrm{n}}$ para *n =0*, é $C(0) = \lambda_1 \neq 0$.

5 Equações de diferenças de primeira ordem não lineares

A equação autônoma

$$y_{n+1} = f(y_n) \tag{12}$$

tem ponto de equilíbrio y^* se e somente se $f(y^*) = y^*$. Além disso dada uma condição inicial y_0,

$$y_n = f(y_{n-1}) = f(f^{n-1}(y_0)) = f^n(y_0)\,.$$

Definição: O ponto de equilíbrio y^* é:

(a) **Estável** quando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$|y_0 - y^*| < \delta\text{, então } |f^n(y_0) - y^*| < \varepsilon\,,$$

para todo $n > 0$.

Se y^* não é estável, ele é chamado **instável**.

(b) **Atrator** se existe $\eta > 0$ tal que

$$|y_0 - y^*| < \eta\text{, então } \lim f^n(y_0) = y^*.$$

Se $\eta = \infty$, x^* é chamado **atrator global**.

(c) **Assintoticamente estável** se além de estável é atrator.

Teorema 7: *Se y^* é um ponto de equilíbrio da equação de diferenças (12) e f é continuamente diferenciável em y^*, então,*

(i) Se $|f'(y^*)| < 1$, y^* é assintoticamente estável;
(ii) Se $|f'(y^*)| > 1$, y^* é instável.

Teorema 8 *Suponha que y^* é um ponto de equilíbrio da equação de diferenças (12) tal que $f'(y^*) = 1$ e f é duas vezes diferenciável em y^*. Então,*

(i) Se $f''(y^*) \neq 0$, então y^* é instável;

(ii) Se $f''(y^*) = 0$ e $f'''(y^*) > 0$, então y^* é instável;

(iii) Se $f''(y^*) = 0$ e $f'''(y^*) < 0$, então, y^* é assintoticamente estável.

6 Aplicações

A torre de Hanói

Diz a lenda que havia em um templo 3 estacas e n discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estavam enfiados na primeira estaca, em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. No processo de transferência, a cada vez, se move apenas um disco de uma estaca para outra, porém, jamais um disco pode ser colocado sobre um disco menor. Quantas transferências de discos de uma estaca para outra devem ser feitas para colocá-las na terceira estaca?

Seja x_n a quantidade de movimentos que fazemos com n peças:

- Para $n = 1$, $x_1 = 1$.
- Para $n = 2$, $x_2 = 3 = 2x_1 + 1$.
- Para $n = 3$, $x_3 = 7 = 2x_2 + 1$.

Suponha que para mover n peças, $x_n = 2x_{n-1} + 1$. Então para mover n+1 peças move-se as n primeiras com x_n movimentos, mais 1 da n+1-ésima, mais x_n dos n primeiros de novo. Logo, este problema pode ser formulado através da equação de diferença linear de 1ª ordem não-homogênea,

$$x_{n+1} = 2x_n + 1,\ x_1 = 1. \qquad (13)$$

onde x_n é o número necessário de movimentos com n peças, com $n \in$ IN.

A equação (13) gera a seqüência crescente, 1,3,7,15,31,63,127,... e tem solução

$x_n = 2^{n+1} - 1$ de acordo com a seção 2.1■

Seqüência de Fibonacci e o número áureo

Suponha que coelhos vivam para sempre e que cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos terão no n-ésimo mês?

Esse problema é modelado pelo problema de valor inicial

$$y_{n+1} = y_{n-1} + y_{n-2},\ y_0 = 1 \text{ e } y_1 = 1, \qquad (14)$$

onde y_n é o número de casais adultos no mês n com $n \in$ IN.

Esta equação gera a seqüência crescente 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... conhecida como seqüência de Fibonacci. Sua solução é dada por

$$y_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

de acordo com Caso1, Seção 4.

Observemos que $\lambda_1 > 1$ e $-1 < \lambda_2 < 0$; assim, o autovalor dominante é λ_1, pois $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$, o que garante que a seqüência de Fibonacci $\{y_n\}$ é crescente e não limitada e, portanto, não convergente.

A razão dos termos sucessivos da seqüência de Fibonacci fornece uma nova seqüência $b_n = y_{n+1} / y_n$ que converge para o número áureo. Definindo

$$\phi = \lim b_n > 0\,,$$

como y_n satisfaz a equação (14),

$$\phi = \lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{y_n + y_{n-1}}{y_n} = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Logo $\phi^2 = \phi + 1$. Como $\phi > 0$, então

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803...$$

que é o número áureo. ■

Crescimento das tilápias do Rio Nilo

As tilápias são peixes de água doce que apresentam, essencialmente, três estágios em seu ciclo de vida: ovos, jovens e adultos. Quando adultos, têm a capacidade de se reproduzir, o que ocorre aproximadamente aos quatro meses de idade. Em condições naturais quando a temperatura da água permanece acima de 20ºC, a tilápia pode desovar a cada 2 meses. As fêmeas põem seus ovos nos ninhos e são fecundados pelos machos. Após a fecundação, as fêmeas recolhem seus ovos na boca para a incubação, eclosão e proteção das larvas. A eclosão dá-se, aproximadamente, em 72 horas e as larvas continuam na boca por um período de 7 a 10 dias. O número de larvas produzidas depende do tamanho da fêmea, com uma taxa de mortalidade igual a 50%. Num processo contínuo de criação destes peixes é recomendável que exista um macho para cada duas fêmeas (ver [1]).

Com base nos dados, podemos fazer a seguinte construção, considerando:

- p_t , população de peixes adultos
- A_t , população de alevinos
- y_t , população total.
- t o tempo a cada dois meses.
- Em $t = 0$, temos p_0 adultos e nenhum alevino.
- Em $t = 1$, teremos a mesma população de adultos e a população de alevinos é uma porcentagem da população adulta de dois meses atrás (t = 0).

De forma geral, a dinâmica de crescimento se dá da seguinte forma:

- p_t é a soma da população de adultos com a população de alevinos no estágio anterior, ainda que esses alevinos não vão procriar no estágio seguinte:

$$p_t = p_{t-1} + A_{t-1} \tag{15}$$

- A_t é uma percentagem da população adulta do estágio anterior (uma vez que as fêmeas são parte desta).

$$A_t = \alpha p_{t-1}. \tag{16}$$

- y_t é a população total

$$y_t = p_t + A_t. \tag{17}$$

Logo, de (15), (16) e (17) segue que,

$$p_t = p_{t-1} + \alpha p_{t-2}, \quad \text{e} \quad y_t = p_{t+1} \tag{18}$$

ou seja, a quantidade de peixes adultos num estágio é igual à quantidade total dos peixes, no estágio anterior. Portanto, de (18), a equação que governa o crescimento da população total é,

$$y_t = y_{t-1} + \alpha y_{t-2}\,.$$

Note que as condições iniciais do problema de valor inicial para o crescimento da população adulta são

$$p_0 = p_1 = p^0\,, \tag{19}$$

uma vez que a equação (18) tem incluído, no total, peixes que estarão com dois meses e só desovarão no próximo estágio. De acordo com Caso 1, Seção 4,

$$p_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n,$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\ ,\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2},$$

com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e,

$$A_1 = p_0\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2\sqrt{1+4\alpha}}\ ,\ \ A_2 = p_0\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2\sqrt{1+4\alpha}}\,.\blacksquare$$

Aproximações de $\sqrt{N}$, $N \in$ IN

Considere a seqüência (a_n) tal que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{N}{a_n}\right),$$

onde $a_0 = c > 0$ qualquer.
A equação é não linear e

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{N}{x}\right).$$

Os pontos de equilíbrio são $x^* = \pm\sqrt{N}$. Como $f'(\pm\sqrt{N}) = 0 < 1$, onde $\pm\sqrt{N}$ são pontos fixos estáveis. No entanto, se a_n tem limite L, com $a_n > 0\ \forall n$, então $L \geq 0$. Portanto;

$$\lim a_n = \sqrt{N}\ .\ \blacksquare$$

O número áureo

Considere a seqüência $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $x_0 = \sqrt{N}$, onde a e N são números reais positivos.
A equação é não linear e $f(x) = \sqrt{a+x}$. Os pontos de equilíbrio são $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$. Consideramos apenas x_1, uma vez que $x_2 < 0$. Como $x_1 > 1$,

$$f'(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + a}} < \frac{1}{2} < 1\cdot$$

e x_1 é assintoticamente estável. Portanto,

$$\lim x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\,.$$

Finalmente, quando $a = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é número Áureo. ■

A equação logística discreta

Consideremos a equação de diferença não-linear

$$y_{n+1} = f(y_n) = ry_n(1 - y_n),\ \text{com}\ r > 0. \qquad (20)$$

Os pontos de equilíbrio são $y_1^* = 0$ (ponto trivial) ou $y_2^* = (r-1)/r$ (ponto não trivial), e os autovalores associados à equação (20) são dados por

$$f'(y^*) = r - 2ry^*,$$

ou seja, para $y_1^* = 0$, $\lambda_1 = r$ e para $y_2^* = (r-1)/r$, $\lambda_2 = 2 - r$.

Logo, de acordo com o Teorema 7,

(a) Se o $< r < 1$, temos

- $|f'(\lambda_1)| < 1$, y_1^* é assintoticamente estável;
- $|f'(\lambda_2)| > 1$, y_2^* é instável.

(b) Se $r > 1$,

- $|f'(\lambda_1)| > 0$, y_1^* é instável;
- $|f'(\lambda_2)| < 0$, y_2^* é assintoticamente estável.

(c) Se $r = 1$, $y_1^* = y^*_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ usamos o Teorema 8.

- $f'(y) = 1 - 2y$, $f''(y) = -2 \neq 0$. O ponto y_1^* é instável.

O modelo logístico discreto, dado pela equação (20), é um dos mais simples exemplos de equações de diferenças não-lineares e podemos notar a complexidade de seu desenvolvimento quando variamos r. ■

Observa-se que o modelo logístico discreto é um caso particular do modelo geral de May.

O modelo de May

A formulação de modelos matemáticos com equações de diferenças ganhou força a partir dos trabalhos desenvolvidos por R.M. May (1975 – 1976) sobre a dinâmica populacional de certos insetos que não têm gerações que se sobrepõem e seus elementos são gerados periodicamente (ver [1]).

As variações da população entre duas gerações sucessivas dependem do crescimento específico da população e da competição entre seus elementos.

A equação de diferenças que rege este modelo é

$$P_{t+1} - P_t = aP_t^2 - bP_t^2, a > 0, b > 0,$$

ou

$$P_{t+1} = (a+1)P_t\left(1 - \frac{b}{a+1}P_t\right). \qquad (21)$$

Definindo,

- $a+1 = \text{r}$, taxa de crescimento intra-específica,
- $\dfrac{b}{a+1}P_t = N_t$,
- $k = \dfrac{a+1}{b}$, capacidade suporte da população,

segue de (21),

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t),$$

que é a equação do modelo logístico discreto (20).

Bibliografia

[1] R. C. Bassanezi, "Ensino aprendizagem com modelagem matemática", Ed. Contexto, 2002.

[2] W. E. Boyce e R. C. di prima, "Equações diferenciais elementares e problemas de contorno", Ed. LTC, 1995.

[3] S. Elaydi, "An Introduction to difference equations", Springer, 2000.

[4] S. Goldberg, "Introduction to difference equations, John Wiley & Sons", Inc. London, 1960.

[5] D. C. Lay, "Álgebra linear e suas aplicações", LTC, 2ª ed., 1999.

[6] E. L. Lima, "Curso de Análise", Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[7] E. L. Lima, e outros, "A matemática do ensino médio", SBM, Rio de Janeiro, 2002.