Introdução à Matemática Financeira Intervalar: Análise Intervalar de Investimentos

Gabriella do Carmo Pantoja Duarte, Benjamin René Callejas Bedregal
Depto de Informática e Matemática Aplicada, CCET, UFRN
59072-970, Natal, RN
gabriellapantoja@yahoo.com.br, bedregal@dimap.ufrn.br

Resumo: *O seguinte trabalho apresenta um estudo de como aplicar os conceitos da matemática intervalar, uma teoria cujo foco é o tratamento de imprecisões, a alguns conceitos de análise de investimento da matemática financeira tradicional. Aborda as razões pelas quais a matemática intervalar é considerada tão importante, bem como suas características e definições, além de mostrar como sua aderência aos conceitos financeiros pode servir para o aprimoramento de resultados empresariais.*

Palavras-chave*: matemática financeira intervalar, análise intervalar de investimentos, matemática intervalar, matemática financeira..*

1 Introdução

O sucesso de um processo de tomada de decisão consiste na capacidade de antecipar os acontecimentos futuros. Tal processo reflete a essência da dinâmica empresarial, na qual o êxito de qualquer negócio depende da qualidade das decisões tomadas por seus administradores nos vários níveis organizacionais. As decisões nesses processos são tomadas a partir de dados e informações levantados a partir do comportamento do mercado e do desempenho interno da empresa. Entretanto, esse processo decisório assume certas complexidades e riscos, uma vez que vigora em um ambiente de incertezas. Desequilíbrios nas taxas de juros, competitividade acirrada, desajustes de mercado, dentre outros fatores exigem uma maior capacidade analítica das unidades decisórias com relação aos riscos que corre uma empresa.

Tem-se a matemática financeira como uma forte aliada no auxílio da maximização e qualificação de resultados empresariais. No entanto, apurar de modo exato e, conseqüentemente, seguro os custos de uma empresa torna-se uma tarefa difícil, devido à imprecisão e variabilidade dos fatores necessários para tal. Tradicionalmente, a incerteza na economia e nas finanças é descrita por modelos estatísticos. Essa descrição é a base da matemática financeira atual. Contudo, em muitos casos seria mais viável obter uma solução contida em um intervalo, uma vez que nem sempre é possível se ter conhecimento do valor exato com o qual se deve trabalhar. Assim, uma solução seria aplicar os conceitos da matemática intervalar, uma teoria cujo foco é o tratamento de imprecisões, aos conceitos da matemática financeira, ferramenta imprescindível na análise de gestão empresarial.

2 Matemática Intervalar

A matemática intervalar surgiu no final da década de 50 com Ramon E. Moore [7] visando dar suporte a problemas que lidam com a incerteza. Os números representados como intervalos servem como controladores da propagação do erro, uma vez que garantem que a resposta correta de determinado problema pertence ao intervalo obtido. Assim, pode-se afirmar que sua utilização consiste no controle rigoroso da propagação dos erros dos dados e parâmetros iniciais ao longo do processo computacional provocada por sucessivos erros de arredondamentos e/ou truncamentos.

O sistema de ponto flutuante dos computadores atuais não é capaz de representar exatamente os números reais, tampouco os resultados de operações com esses números. Esse tipo de representação apresenta diversas desvantagens, dentre elas [6]:

a. Ausência de controle de erros nas computações numéricas, fato que, muitas vezes, proporciona resultados errôneos com a aparência de serem corretos. Isto é, o procedimento é realizado corretamente, entretanto o resultado perde o significado em virtude da inexatidão da representação numérica e de arredondamentos e/ou truncamentos aplicados nas operações;

b. Ausência de métodos responsáveis por julgar ou estabelecer a qualidade dos resultados gerados por operações em ponto flutuante;

c. A variedade de sistemas existentes em ponto flutuante disponíveis no mercado, o que acarreta no fato de que cálculos efetuados em máquinas distintas proporcionam resultados distintos.

Dessa forma, como o computador é uma máquina finita, ele é capaz de representar somente uma aproximação finita do número real. Caso não são sejam tomados cuidados especiais, um algoritmo numérico implementado em um computador pode produzir aproximações da solução com pouca ou nenhuma exatidão [6].

Atualmente, os computadores modernos desempenham as operações básicas em ponto flutuante com um alto grau de exatidão, no entanto os resultados de algumas computações podem se apresentar de maneira demasiadamente errônea. Um exemplo disso é apresentado a seguir [4]:

$$\frac{1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832}{107751}$$

em que x = 192119201 e y = 35675640.

Quando calculado em um ambiente de programação comum, o resultado da expressão, ao substituir os valores de x e y, é o valor 0.0077215. No entanto, o valor correto seria 1783.

Esse tipo de exemplo nos leva a crer que a computação em ponto flutuante pode ser extremamente perigosa, principalmente se for levado em consideração que vidas podem depender de aplicações computacionais que levam a resultados incorretos. O *Míssil Patriot* em fevereiro de 1991, o acidente na plataforma *Sleipner* em agosto de 1991 e a explosão do foguete *Ariane5* em junho de 1996 são exemplos marcantes de problemas de representação. Tais catástrofes são resultado da limitação da máquina em não conseguir tratar os números em toda a sua extensão, posto que a representação do número real não pode ser feita de forma finita. Com isso, o uso da matemática intervalar torna-se uma forte alternativa na resolução de problemas caracterizados pela falta de exatidão.

2.1 Definições Básicas da Matemática Intervalar

2.1.1 Intervalo de Números Reais

Um intervalo de reais é uma representação da forma A = [a; b], em que a e b pertencem ao conjunto dos números reais R, e tal que $a \leq b$. Logo, o conjunto $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ é **um intervalo de números reais** ou simplesmente um **intervalo**.

$$A = [a; b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

Sabendo-se que um intervalo é representado por um par de elementos em que o primeiro elemento do par representa o limite inferior e o segundo, o limite superior, quando esses dois extremos são iguais, o intervalo é dito **degenerado**. Dessa forma, o intervalo [2; 2] apenas representa o número real 2, uma vez que o único elemento desse intervalo é o próprio número 2.

2.1.2 Conjunto IR

Define-se o **conjunto IR** como sendo o conjunto de todos os intervalos reais, ou seja:

$$IR = \{[a; b] \mid a, b \in R,\ a \leq b\}$$

Assim, vale a seguinte cadeia de inclusões: $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq IR$.

2.2 Operações Aritméticas em IR

Sejam $A = [a_1; a_2]$ e $B = [b_1; b_2] \in IR$, as operações aritméticas com intervalos são executadas sobre os extremos de seus intervalos. Assim, as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão em IR são definidas por: $A \oplus B = \{a \oplus b / a \in A \wedge b \in B\}$, em que $\oplus \in \{+, -, /, *\}$. No caso da divisão, assume-se que $0 \notin B$ para que a operação seja bem definida.

Assim, as operações entre os intervalos A e B são dadas a seguir:

Soma Intervalar:
$A + B = [(a_1 + b_1); (a_2 + b_2)]$

Subtração Intervalar:
$A - B = [(a_1 - b_2); (a_2 - b_1)]$

Multiplicação Intervalar:
$$A * B = [min(a_1 * b_1,\ a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2);\ max(a_1 * b_1,\ a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2)]$$

Divisão Intervalar:
$$\frac{A}{B} = \left[min\left(\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right); max\left(\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right) \right],$$

com $0 \notin [b_1; b_2]$.

2.3 Função Intervalar

Seja f: X → Y uma função.
X → F(X)

Se X = Dom(f) $\subseteq$ IR e Y = CD(f) $\subseteq$ IR, então diz-se que f é uma **função intervalar** de uma variável intervalar.

2.3.1 Extensão Intervalar

A **extensão intervalar** é definida da seguinte forma [9]: uma função F: IR $\rightarrow$ IR é uma extensão intervalar de uma função f: R $\rightarrow$ R se para todo $x \in$ R, $F([x;x]) = [f(x); f(x)]$.

2.3.2 Inclusão Monotônica

A **inclusão monotônica** é definida da seguinte forma [9]: sejam A e B dois intervalos de números reais $\in$ IR, se A $\subseteq$ B, então F(A) $\subseteq$ F(B). Tal propriedade é importante, uma vez que admite que quanto menor for o erro nos dados de entrada, menor será o erro do intervalo resultante.

2.3.3 Representação Intervalar

A **representação intervalar** (ou corretude) é definida da seguinte maneira [9]: uma função intervalar F é correta com respeito a uma função real f se satisfaz a seguinte propriedade: $x \in [a; b] \Rightarrow f(x) \in F([a; b])$.

2.3.3.1 Representação Canônica Intervalar

Enquanto que a representação intervalar diz respeito à propriedade da corretude, a representação canônica intervalar (*CIR*), além da corretude, diz respeito à otimalidade, uma vez que sempre retorna o melhor intervalo contendo a imagem de f.

Teorema 2.3.3.1.1 [9]: Seja f: R $\rightarrow$ R uma função real. Se f é uma função real não-assintótica , então a função intervalar:

$$CIR(f)([a; b]) = [min\ f([a; b]);\ max\ f([a; b])]$$

é bem definida e é uma representação intervalar chamada **representação canônica intervalar** para f.

obs.: Uma função é dita assintótica se para qualquer intervalo $[a; b]$, o conjunto $\{f(x) \,/\, a \leq x \leq b\}$ ou não tem *supremum* ou não tem *infimum.*

2.3.4 Algumas Funções Intervalares Básicas

2.3.4.1 Função Quadrado Intervalar

Seja um intervalo de números reais A $\in$ IR, em que A = $[a; b]$. Define-se o quadrado de A como sendo: $A^2 = \{x^2 \,/\, x \in A\}$. E o quadrado do intervalo A é dado por [8]:

F: IR$\rightarrow$ IR
A $\rightarrow$ F(A) em que:

$$F(A) = A^2 = [a; b]^2 = \begin{cases} [a^2; b^2], \text{ se } 0 \leq a \\ [b^2; a^2], \text{ se } b < 0 \\ [0; max\ (a^2, b^2)], \text{ senão.} \end{cases}$$

2.3.4.2 Função Potência Intervalar

Seja um intervalo de números reais A $\in$ IR, em que A = $[a; b]$. Define-se a função potência intervalar de A como sendo: $A^n = \{ x^n \,/\, x \in A\}$.E é dada por [8]:

F: IR $\rightarrow$ IR
A $\rightarrow$ F(A) em que:

$$F(A) = A^n = \begin{cases} [0; max\,(|a|, |b|)^n], \text{ se } n \text{ é par e } 0 \in A \\ [b^n; a^n], \text{ se } n \text{ é par e } b < 0 \\ [a^n; b^n], \text{ senão.} \end{cases}$$

3 Matemática Financeira: Análise de Investimentos

Diariamente, diretores, gestores e controladores têm a tarefa de tomar decisões a respeito de aspectos relacionados à empresa que dirigem. É imprescindível que uma tomada de decisão de investimento empresarial passe previamente por uma análise econômica, a qual pode atender os seguintes objetivos: definir, dentre vários projetos, o mais rentável; calcular a rentabilidade de um determinado projeto de investimento; determinar o volume mínimo de vendas que um projeto de investimento precisa gerar para que seja considerado rentável ou definir o tamanho ideal de um projeto de investimento. Dessa forma, a análise de investimentos visa permitir que o administrador financeiro tome a decisão ótima, isto é, aquela que maximiza a riqueza do investidor, considerando a vida útil do projeto envolvido.

Alguns métodos são utilizados para que seja feita essa análise de investimentos, sendo os mais utilizados o *Valor Presente Líquido* (*VPL*) e a *Taxa Interna de Retorno* (*TIR*).

3.1 Valor Presente Líquido

O método do **Valor Presente Líquido** (*VPL*) para análise de fluxos de caixa é obtido através da diferença entre o valor presente dos benefícios (ou pagamentos) previstos de caixa e o valor presente do fluxo de caixa inicial (valor do investimento). O cálculo do *VPL* é expresso da seguinte forma [1]:

$$VPL = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{FC_j}{(1+i)^j} \right) - FC_0$$

em que FC_j representa o valor de entrada de caixa previsto para cada intervalo de tempo e FC_0 é o fluxo de caixa verificado no momento inicial.

Podem-se ter as seguintes possibilidades para o *Valor Presente Líquido* (*VPL*) de um projeto de investimento:

- ***VPL*>0**: Significa que o investimento é economicamente atrativo, pois o valor presente das entradas de caixa é maior que o valor presente das saídas de caixa;
- ***VPL* = 0**: O investimento é indiferente;
- ***VPL*<0**: Indica que o investimento não é economicamente viável.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando um investimento no valor de R$750.000,00 do qual se esperam benefícios anuais de caixa de R$250.000,00 no primeiro ano, R$320.000,00 no segundo ano, R$380.000,00 no terceiro ano e R$280.000,00 no quarto ano. A empresa definiu que a taxa de desconto a ser aplicada aos fluxos de caixa do investimento é de 20%. Dessa maneira*:

i = 0,20 e FC_0 = R$750.000,00

$$VPL = \left[\frac{250.000}{(1,20)^1} + \frac{320.000}{(1,20)^2} + \frac{380.000}{(1,20)^3} + \frac{280.000}{(1,20)^4} \right] - 750.000$$

***VPL* = R$ 35.493,82**

Como o valor do *VPL* é maior do que zero, o investimento é considerado viável.

3.2 Taxa Interna de Retorno

A **Taxa Interna de Retorno** (*TIR*) é a taxa de juros (desconto) a qual iguala, em determinado momento do tempo, o valor presente das entradas (recebimentos) com o das saídas (pagamento) previstas de caixa [1]. Em outras palavras, a *TIR* corresponde à taxa de desconto que faz com que todas as receitas sejam equivalentes a todas as despesas de um fluxo de caixa, ao longo do tempo.

A *Taxa Interna de Retorno* (*TIR*) pode ser calculada através da seguinte expressão [1]:

$$FC_0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{FC_j}{(1+i)^j} \right)$$

em que FC_0 é o valor do fluxo de caixa no momento zero, FC_j são fluxos previstos de entradas de caixa em cada período de tempo e i é a taxa de desconto que iguala, em determinada data, as entradas com as saídas de caixa previstas. Em outras palavras, i representa a *TIR*.

A *Taxa Interna de Retorno* de um investimento pode ser comparada com a *Taxa Mínima de Atratividade*:

- ***TIR* > *TMA***: Significa que o investimento é economicamente viável;
- ***TIR* = *TMA***: O investimento está em uma situação econômica de indiferença;
- ***TIR* < *TMA***: O investimento não é economicamente atrativo.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando um investimento de R$70.000,00 com expectativa de benefícios de caixa de R$20.000,00 no primeiro ano, R$40.000,00 no segundo ano, R$45.000,00 no terceiro ano e R$30.000,00 no quarto ano. Para apurar a Taxa Interna de Retorno:*

FC_0 = R$70.000,00

$$70.000 = \frac{20.000}{(1+i)^1} + \frac{40.000}{(1+i)^2} + \frac{45.000}{(1+i)^3} + \frac{30.000}{(1+i)^4}$$

Efetuando esse cálculo, apura-se uma *Taxa Interna de Retorno i* = 30% ao ano. Isso quer dizer que ao se descontarem os vários fluxos previstos de caixa pela *TIR* calculada, o valor atualizado será exatamente igual ao montante do investimento de R$70.000,00.

3.3 Dificuldades na Análise de Investimentos

A principal dificuldade na análise de investimentos é a obtenção de dados confiáveis, principalmente as projeções de entradas de caixa. Estas se originam, basicamente, das estimativas de vendas. Entretanto, a precisão nunca chega a ser máxima e, uma análise, para ser eficaz, deve estar fundamentada em projeções corretas.

Na prática, decisões financeiras não são tomadas em ambiente de total certeza com relação a seus resultados. Como essas decisões estão fundamentalmente voltadas para o futuro, a variável incerteza torna-se um dos mais significativos aspectos do estudo das operações do mercado financeiro e das finanças corporativas.

Os métodos de análise de investimentos vistos anteriormente são comumente enriquecidos com algumas técnicas mais sofisticadas, como árvores de decisão, regras de Laplace, análise de Monte Carlo, análise de sensibilidade, método de Hertz, regra de Hurwicz, dentre outras. No presente trabalho, no entanto, serão utilizados os conceitos intervalares para lidar com o risco e a incerteza relacionados com os dados de projetos empresariais.

4 Análise Intervalar de Investimentos

Como já foi visto, para uma eficaz tomada de decisão na análise de investimento, é imprescindível que se obtenham dados de confiança. Entretanto, há uma certa dificuldade na obtenção desses dados, uma vez que se originam de estimativas e especulações. Sabe-se que aproximações no ambiente financeiro podem levar a resultados desastrosos e, assim, acarretar em decisões errôneas de projetos.

Dessa forma, a fim de prestar auxílio à abordagem convencional de análise de investimentos, esse capítulo tem o intuito de mostrar como os fundamentos da matemática intervalar podem ser aderidos a essa parte constituinte da matemática financeira tradicional.

4.1 Metodologia

Utilizando-se os fundamentos de matemática intervalar a fim de se maximizar a qualidade dos resultados empresariais, tem-se que uma variável cuja determinação não possa ser feita de modo preciso irá ser representada por um intervalo, no qual ela ocorra com determinada margem de segurança. Variáveis que não se encaixam nesse perfil, ou seja, portadoras de valores pontuais, terão tais valores transformados em intervalos degenerados.

Outra observação é que para os intervalos obtidos será considerada uma precisão de duas casas decimais, uma vez que se está lidando com valores monetários. Para isso, será usado **arredondamento direcionado**, a fim de que se garanta a corretude do intervalo, ou seja, a obtenção do melhor intervalo possível em termos de extensão, o qual, seguramente, contenha a solução real. Nesse tipo de arredondamento, dado um intervalo [*a*; *b*], o limite inferior do intervalo é arredondado para baixo, ou seja, para o maior número representável menor do que *a*. O limite superior, por sua vez, é arredondado para o maior número representável maior do que *b*. Por exemplo, seja o intervalo [0,178654; 0,588754]. A fim de se obter um intervalo com uma precisão de duas casas decimais e utilizando o arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo [0,17; 0,59].

4.2 Métodos de Análise Intervalar de Investimentos

4.2.1 Valor Presente Líquido Intervalar

No *VPL*, a determinação de fluxos de caixa futuros compreende uma das grandes dificuldades na análise de investimentos, visto que são embasados em estimativas e especulações.

Dessa forma, fluxos de caixa futuros serão tratados como intervalos. As demais variáveis que constituem o cálculo do *VPL*: taxa de retorno, investimento inicial e períodos, serão tidas, no exemplo, como pontuais. Para que sejam feitas as operações aritméticas intervalares adequadamente, tais valores serão, posteriormente, transformados em intervalos degenerados.

A fórmula do *VPL Intervalar* é dada a seguir:

$$VPLI = CIR(VPL) =$$

$$\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC}_j}{(1+\overline{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC}_l}{(1+\underline{I})^l}\right)-\overline{I}_0;\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC}_j}{(1+\underline{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC}_l}{(1+\overline{I})^l}\right)-\underline{I}_0\right]$$

em que $\underline{EC}_j$ e $\overline{EC}_j$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*; $\underline{SC}_l$ e $\overline{SC}_l$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às saídas de caixa no período *l*; $\underline{I}$ e $\overline{I}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de retorno e $\underline{I}_0$ e $\overline{I}_0$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao investimento inicial.

É imprescindível mencionar que a fórmula do *VPLI* sempre emitirá o melhor intervalo possível, em termos de corretude e otimalidade, visto que retorna a representação canônica intervalar (*CIR*) da função. Assim, tem-se como resultado um intervalo com a menor extensão possível, o qual contém, seguramente, o valor real do *VPL*.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando uma proposta de projeto, cujas informações estão descritas a seguir:*

Projeto	A
I_0 (R$)	150.000,00
Anos	**Fluxos Esperados de Caixa (A) em R$**
1	[75.000,00; 81.100,00]
2	[67.000,00; 71.000,00]
3	[-6.000,00; -5.500,00]

Tabela 1: exemplo *VPL Intervalar*

A taxa de desconto mínima aceitável é de 20%, representada pelo intervalo degenerado [0,20; 0,20].

Dessa forma, o cálculo do *VPL Intervalar* do projeto A é dado da seguinte maneira:

Projeto A:

$$VPLI_A =$$

$$\left(\frac{\overbrace{[75.000;\ 81.100]}^{EC_1}}{([1;1]+[0,20;0,20])^1}+\frac{\overbrace{[67.000;\ 71.000]}^{EC_2}}{([1;1]+[0,20;0,20])^2}+\frac{\overbrace{[-6.000;\ -5.500]}^{SC_1}}{([1;1]+[0,20;0,20])^3}\right)$$

$$-\overbrace{[150.000;150.000]}^{\text{Invest. Inicial}}$$

É importante notar que todos os denominadores $([1;1]+[0,20;0,20])^1$, $([1;1]+[0,20;0,20])^2$ e $([1;1]+[0,20;0,20])^3$ caem no mesmo caso da Função Potência Intervalar:

$$F(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^n = \begin{cases} [0; max(|\ a\ |, |\ b\ |)^n],\ \text{se } n \text{ é par e } 0 \in \mathrm{A} \\ [b^n; a^n],\ \text{se } n \text{ é par e } b < 0 \\ [a^n; b^n],\ \text{senão.} \end{cases}$$

em que A $\in$ IR.

Ou seja, como é inerente da função somar o valor da taxa de desconto com o número um, sempre se obterá um valor resultante maior do que zero, tanto para o limite inferior do intervalo, quanto para o limite superior, visto que a taxa de retorno nunca portará valor negativo. Dessa forma, a resolução dos denominadores sempre cairá na terceira situação: $[a^n; b^n]$.

Assim, tem-se:

$$VPLI_A = \left(\frac{[75.000; 81.100]}{[1,20; 1,20]}+\frac{[67.000; 71.000]}{[1,44; 1,44]}+\frac{[-6.000; -5.500]}{[1,728; 1,728]}\right)$$

$$-[150.000; 150.000]$$

De acordo com a fórmula do *VPLI* são calculados os limites inferior e superior do intervalo, como segue:

1º) Cálculo do limite inferior do intervalo ($\underline{VPLI}_A$):

$$\underline{VPLI}_A = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC}_j}{(1+\bar{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC}_l}{(1+\underline{I})^l}\right)-\overline{I}_0$$

$$\underline{VPLI}_A = \left(\frac{75.000}{1,20}+\frac{67.000}{1,44}+\frac{(-6.000)}{1,728}\right)-150.000$$

$$\underline{VPLI}_A = 105.555,55 - 150.000$$

$$\underline{VPLI}_A = -44.444,45$$

2º) Cálculo do limite superior do intervalo ($\overline{VPLI}_A$):

$$\overline{VPLI}_A = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC}_j}{(1+\underline{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC}_l}{(1+\bar{I})^l}\right)-\underline{I}_0$$

$$\overline{VPLI}_A = \left(\frac{81.100}{1,20}+\frac{71.000}{1,44}+\frac{(-5.500)}{1,728}\right)-150.000$$

$$\overline{VPLI}_A = 113.706,01 - 150.000$$

$$\overline{VPLI}_A = -36.293,99$$

Assim, o *VPL Intervalar* do projeto A é dado por:

$$VPLI_A = [-44.444,45; -36.293,99]$$

Como no intervalo obtido tanto o valor do limite inferior quanto o valor do limite superior são menores do que zero, tem-se que o investimento não é economicamente viável.

Dessa forma, quando se obtém um intervalo cujos limites inferior e superior estão acima de zero, o investimento é viável. Quando esses limites aparecem, ambos inferiores a zero, o investimento já não é economicamente atrativo. Nesses dois casos, não se sabe com exatidão quanto é o valor do *VPL*, mas sim um intervalo no qual ele seguramente se encontra.

Além dos dois casos descritos, há a situação em que o intervalo pode apresentar limite inferior menor do que zero e limite superior maior que zero. Como, por exemplo, em [-3.000,00; 1.000,00]. Nesse caso, além de não se ter certeza do valor real do *VPL*, mas apenas um intervalo em que este se encontra, também não haverá certeza se o investimento será viável ou não.

4.2.2 Taxa Interna de Retorno Intervalar

Assim como ocorre no *VPL*, os fluxos de caixa futuros de projeto são obtidos através de estimativas, não podendo ser afirmadas com total precisão.

Dessa forma, fluxos de caixa futuros serão tratados como intervalos, ao passo que as demais variáveis do cálculo da *TIR*: investimento inicial e períodos de tempo, serão tidas, no exemplo, como valores pontuais, posteriormente transformados em intervalos degenerados.

A fórmula da *TIR Intervalar* é dada a seguir:

$$[\underline{I_0};\overline{I_0}] = \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC_j}}{(1+i_1)^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC_l}}{(1+i_1)^l}\right);\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC_j}}{(1+i_2)^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC_l}}{(1+i_2)^l}\right)\right]$$

em que $\underline{I_0}$ e $\overline{I_0}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao investimento inicial, $\underline{EC_j}$ e $\overline{EC_j}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*; $\underline{SC_l}$ e $\overline{SC_l}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às saídas de caixa no período *l*; i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à *Taxa Interna de Retorno*.

É importante memcionar que a fórmula da *TIR Intervalar* sempre emitirá o melhor intervalo possível, em termos de corretude e otimalidade, visto que retorna a representação canônica intervalar (*CIR*) da função. Assim, tem-se como resultado um intervalo com a menor extensão possível, o qual contém, seguramente, o valor real do *TIR*.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando uma proposta de projeto, cujas informações estão descritas a seguir:*

Projeto	**A**
I_0 (R$)	5.400,00
Anos	**Entradas Esperadas de Caixa (A) em R$**
1	[10.050,00; 10.700,00]
2	[-4.000,00; -3.600,00]

Tabela 2: exemplo *TIR Intervalar*

Dessa forma, a fim de calcular a *TIR Intervalar* do Projeto A, tem-se:

Projeto A:

$$\underbrace{[5.400;5.400]}_{\text{Invest. Inicial}} = \left(\frac{\overbrace{[10.050;10.700]}^{EC_1}}{([1;1]+[i_1;i_2])^1}+\frac{\overbrace{[-4.000;-3.600]}^{SC_1}}{([1;1]+[i_1;i_2])^2}\right)$$

Novamente, é importante observar que os denominadores $([1;1]+[i_1;i_2])^1$ e $([1;1]+[i_1;i_2])^2$ caem no mesmo caso $[a^n;b^n]$ da Função Potência Intervalar. A partir disso, tem-se que:

$$[5.400;\ 5.400] = \left(\frac{[10.050;\ 10.700]}{[(1+i_1)^1;(1+i_2)^1]}+\frac{[-4.000;\ -3.600]}{[(1+i_1)^2;(1+i_2)^2]}\right)$$

De acordo com a fórmula da *TIR Intervalar* são calculados os limites inferior e superior do intervalo, como segue:

1º) Cálculo do limite inferior i_1:

$$\underline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC_j}}{(1+i_1)^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC_l}}{(1+i_1)^l}\right)$$

$$5.400 = \left(\frac{10.050}{(1+i_1)^1}+\frac{(-4.000)}{(1+i_1)^2}\right)$$

$$5.400 = \frac{10.050*(1+i_1)-4.000}{(1+i_1)^2}$$

$$5.400 i_1^2 + 750 i_1 - 650 = 0$$

Simplificando, tem-se: $54 i_1^2 + 7{,}5 i_1 - 6{,}5 = 0$.

$$i_1 = \frac{-7{,}5 \pm \sqrt{(7{,}5)^2 - 4*54*(-6{,}5)}}{2*54} = 0{,}2843816$$

2º) Cálculo do limite superior i_2:

$$\overline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC_j}}{(1+i_2)^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC_l}}{(1+i_2)^l}\right)$$

$$5.400 = \left(\frac{10.700}{(1+i_2)^1}+\frac{(-3.600)}{(1+i_2)^2}\right)$$

$$5.400 = \frac{10.700 * (1 + i_2) - 3.600}{(1 + i_2)^2}$$

$$5.400 i_2^2 + 100 i_2 - 1.700 = 0$$

Simplificando, tem-se: $54 i_2^2 + 1 i_2 - 17 = 0$.

$$i_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 54 * (-17)}}{2 * 54} = 0{,}5519007$$

Desse modo, a *TIR Intervalar* do projeto A é igual a [0,2843816; 0,5519007]. Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [0,28; 0,56].

Isso significa dizer que o valor real da *TIR* estará, provavelmente, de acordo com as estimativas realizadas, dentro do intervalo obtido como solução.

5 Conclusão

Na matemática financeira atual são usadas técnicas de estatística para que seja minimizada a incerteza de dados empresariais. A experiência anterior também é uma forte aliada da matemática financeira atual. Entretanto, apesar de existirem tais subsídios, decisões errôneas ainda são tomadas constantemente. A qualidade das informações é a diretriz para a qualidade da decisão a ser tomada. Dados errados, desatualizados ou mal interpretados acarretam em decisões equivocadas.

Além disso, nem sempre é possível saber o valor exato com o qual se deva trabalhar. Nesse caso, aproximações podem levar a resultados desastrosos e acarretar em uma decisão errônea. Assim, em muitos casos é mais viável obter uma solução contida em um intervalo, como foi visto no caso do *VPL Intervalar* e da *TIR Intervalar*.

De acordo com [10], tratar custos imprecisos através de intervalos não torna o resultado final do custo mais exato, mas permite conhecer o tamanho da incerteza. Isso traz ganhos no momento de se tomar decisões baseadas nesses custos. Essa informação certamente será útil para que o gestor da empresa tome suas decisões com um maior embasamento, o que se poderá traduzir em melhores decisões para a empresa.

Ao utilizar os custos como intervalos, após serem feitas as operações tem-se a garantia de que o valor real estará dentro do intervalo dado como solução. Dessa forma, a tomada de decisão pode ser considerada mais segura, pois o risco que se está correndo é conhecido, uma vez que se têm o melhor e o pior caso.

6 Agradecimentos

Trabalho parcialmente financiado pelo CNPq (Projeto nº 401144/2005-4).

Referências

[1] ASSAF, Alexandre. **Matemática Financeira e Suas Aplicações**. 9 ed. São Paulo : Atlas, 2006.

[2] DAMODARAN, Aswath. **Avaliação de Investimentos**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1997.

[3] GALESNE, Alain; FENSTERSEIFER, Jaime; LAMB, Roberto. **Decisões de Investimentos da Empresa**. São Paulo: Atlas, 1999.

[4] GARROZI, Cícero; ALBUQUERQUE, Jones. A Aritmética Intervalar como Ferramenta para Solução de Problemas de Otimização. **Revista Eletrônica de Iniciação Científica da SBC**. 01 junho de 2002.

[5] HICKEY, Timothy; EMDEN, Maarten H. Van. Interval Arithmetic: From Principles to Implementation. **Journal of the ACM**. v.48, n.5, p.1038-1068, setembro de 2001.

[6] HOLBIG, Carlos Amaral; DIVERIO, Tiaraju Asmuz. **Sistema de Ponto Flutuante e o Padrão IEEE-754**. (Relatório de Pesquisa) - Porto Alegre: Instituto de Informática - UFRGS, 1994.

[7] MOORE, Ramon Edgar. **Interval Analysis**. New Jersey : Prentice Hall, 1966.

[8] MORAES, DALCIDIO et al. Introdução a Teoria dos Intervalos. In: ROQUE, Waldir L. (Org.). **EIMAC'96 - Escola de Inverno de Matemática Aplicada e Computacional**. Porto Alegre: UFRGS, 1996, v.1, p. 215-244.

[9] SANTIAGO, Regivan Hugo Nunes; BEDREGAL, Benjamin R. Callejas; ACIÓLY, Benedito Melo . Formal Aspects of Correctness and Optimality of Interval Computations. **Journal Formal Aspects of Computing**. New York : Berlin-Heildelberg, 2006. v. 18, p. 231-243.

[10] SILVA, Ivanosca Andrade da et al. **An Interval Approach for Imprecise Cost**. Artigo submetido ao Elsevier Science em março de 2007.