



Discretização do dimensionamento de um problema de fluxo multiproduto

Carlos A. Silva Fábio P. Mourão, Sérgio R. de Souza,

Programa de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, CEFET-MG,

30510-00, Belo Horizonte, MG

E-mail: carlos@dppg.cefetmg.br, fabiomourao@dppg.cefetmg.br, sergio@dppg.cefetmg.br,

Resumo Os problemas de fluxo multiproduto (PFM) são relatados na literatura desde o início da década de 60, e possuem uma larga variedade de aplicações, sobretudo, nas áreas de transporte e telecomunicação, refletindo em questões de forte impacto econômico. Em geral, essa classe de problemas apresenta um elevado dimensionamento em relação à quantidade de variáveis envolvidas, tornando atrativo a utilização de técnicas heurísticas na tentativa de solucionar a questão, já que métodos exatos tendem a apresentar uma convergência lenta, em detrimento da alta complexidade combinatorial inerente ao problema. Neste trabalho, o intuito é o de apresentar um detalhamento sobre a dimensão de um problema de fluxo multiproduto com variáveis inteiras, onde o espaço solução corresponde a um conjunto enumerável e finito e pode ser explorado por heurísticas e metaheurísticas.

Palavras-chave problemas de fluxo multiproduto com variáveis inteiras, enumeração, restrição de capacidade, metaheurísticas.

Introdução

Os primeiros trabalhos envolvendo problemas de fluxo multiproduto, datam do início dos anos 60, com as contribuições iniciais de [2] e [4]. Dentre algumas aplicações, pode-se citar:

- sequenciamento de suprimentos militares [6];
- roteamento de veículos [3];
- sequenciamento de operações em refinarias de petróleo [5];
- roteamento de tráfego na internet [1].

O problema é modelado através de uma rede identificada por um grafo, cujos nós representam pontos de oferta e demanda de determinados produtos, os quais trafegam pelos arcos da rede. Os arcos são capacitados e possuem um custo associado a cada produto. O problema surge quando vários produtos compartilham os arcos da rede e competem pela capacidade dos mesmos, sendo o objetivo o de determinar, ao menor custo, o fluxo dos produtos na rede, de maneira a atender basicamente quatro conjuntos de restrições: restrição de conservação de fluxo,

restrição de capacidade, restrição de linearidade e restrição de integralidade.

A restrição de conservação de fluxo desempenha o papel de gerenciar o fluxo dos produtos pelos arcos da rede que saem de um ponto de oferta e chegam em um ponto de demanda. A restrição de capacidade, limita o fluxo dos produtos, de modo que, em nenhum arco trafegue uma quantidade de produtos superior a capacidade suportada por ele. A restrição de linearidade vem da formulação matemática do problema e a restrição de integralidade, garante que as variáveis de interesse sejam valores positivos e inteiros.

Análise matemática do dimensionamento

Considere o seguinte Problema de Fluxo Multiproduto:

$$\min \quad z = cx \quad (1)$$

$$sa \quad Nx^i = b^i, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2)$$

$$I.x \leq u \quad (3)$$

$$x \in Z_+ \quad (4)$$

Seja o número de arcos igual a **a**, o número de nós igual a **n** e o número de produtos igual a **p**. A expressão (1) representa a função objetivo de minimização. A expressão (2) refere-se a restrição de conservação de fluxo, onde:

- $N \in Z^{n \times a}$ é a matriz de incidência nó-arco;
- $x^i \in Z^a$ é o vetor de fluxo do produto i ;
- $b^i \in Z^n$ é o vetor oferta/demanda para o produto i .

A expressão (3) refere-se a restrição de capacidade, onde:

- $I \in Z^{a \times pa}$ é um vetor composto de matrizes identidades ($a \times a$);
- $x \in Z^{pa}$ é o vetor composto pelos vetores de fluxo de cada produto;
- $u \in Z^a$ é o vetor capacidade dos arcos.

A expressão (4) representa as restrições de integralidade e positividade.

O objetivo do problema é determinar o fluxo dos produtos em cada arco ao menor custo possível, atendendo as restrições (2), (3) e (4). As informações disponíveis na literatura em relação a dimensão deste tipo de problema, se limitam à menção de sua complexidade combinatorial. Neste trabalho é proposto um estudo sobre o espaço solução de um problema de fluxo multiproduto, que atende as restrições listadas anteriormente.

Pode-se compor o espaço solução pela interseção de dois conjuntos. Seja \mathcal{C} o conjunto formado pelas restrições (2) e (4) e o conjunto \mathcal{A} formado pelas restrições (3) e (4). O diagrama do espaço solução é dado pela Figura 1.

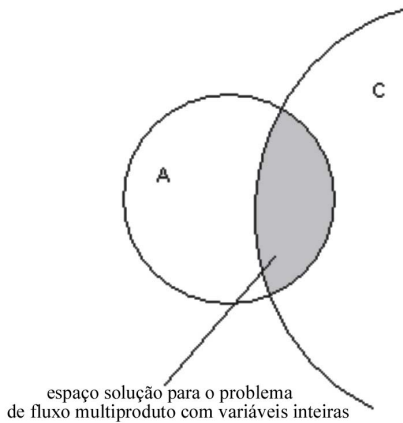


Figura 1: Diagrama do espaço solução

Note que o conjunto \mathcal{C} é infinito. Como $N \in \mathbb{R}^{n \times a}$ tem posto completo e o número de variáveis é maior que o número de restrições, logo tem-se infinitas soluções. Já o conjunto \mathcal{A} é compacto e discreto, características geradas pelas restrições (3) e (4). Logo, \mathcal{A} é passível de enumeração.

Na utilização de heurísticas para a resolução deste problema, é necessário a construção de regiões de vizinhanças para se obter a solução. Motivado por essa idéia, será feita a análise do espaço solução do conjunto \mathcal{A} .

Seja $u[i]$ a capacidade do arco i . Defina a seguinte função auxiliar de contagem:

$$k_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 1 \\ k_{i-1}^1 + i & \text{se } j = 1 \text{ e } i \neq 1 \\ \sum_{m=1}^i k_m^{j-1} & \text{se } j \neq 1 \end{cases}$$

Os elementos do conjunto \mathcal{A} , são as combinações das linhas, cujos elementos satisfazem o seguinte sistema de inequações:

$$x_1^1 + x_1^2 + \dots + x_1^p \leq u[1]$$

$$\vdots$$

$$x_a^1 + x_a^2 + \dots + x_a^p \leq u[a]$$

onde x_i^j representa a quantidade do produto j que passa no arco i .

Os passos a seguir, refletem sobre a desigualdade referente a um dado arco i . Note que o conjunto solução para essa desigualdade é formada por elementos pertencentes ao intervalo $[0, u[i]]$.

Enumeração do espaço solução

Nesta seção, será enumerado o espaço representado pelo conjunto \mathcal{A} através de construção.

1º Passo

Esse passo será chamado de bloco 2, devido as permutações atingirem apenas as duas últimas posições do vetor de fluxo corrente. Analogamente, o passo bloco k , atinge as k últimas posições.

Inicialmente é preenchido todas as variáveis com o valor zero e em seguida é permutado as duas últimas posições em todas as combinações possíveis de valores cuja soma não exceda $u[i]$. Procedendo desta maneira, tem-se o número de soluções igual a:

$$\#solucoes = 1 + 2 + \dots + u[i] + (u[i] + 1)$$

ou

$$\#solucoes = k_{u[i]}^1 + (u[i] + 1)$$

2º Passo

Neste passo é feito a análise para o bloco 3, onde as permutações incidem nas três últimas posições. Logo:

$$\#solucoes = [1 + (1 + 2) + \dots + (1 + 2 + \dots + (u[i] - 1)) + (1 + 2 + \dots + u[i])] + 1$$

ou

$$\#solucoes = [k_1^1 + k_2^1 + \dots + k_{u[i]-1}^1 + k_{u[i]}^1]$$

3º Passo

Assim como no passo anterior, a quantidade de soluções geradas na primeira configuração das permutações na primeira posição, é igual a $u[i]$, diferentemente do passo 1, o qual previa a configuração na totalidade nula. Logo, o número de soluções produzidas neste passo é :

$$\#solucoes = [1] + [1 + (1 + 2)] + [1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3)] \dots + [1 + (1 + 2) + \dots + (1 + 2 + \dots + u[i])] + 1$$

ou

$$\#solucoes = k_1^1 + [k_1^1 + k_2^1] + [k_1^1 + k_2^1 + k_3^1] + \dots + [k_1^1 + \dots + k_{u[i]}^1]$$

ou

$$\#solucoes = [k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{u[i]-1}^2 + k_{u[i]}^2]$$

Prosseguindo de maneira indutiva, para cada desigualdade do conjunto \mathcal{A} , tem-se:

$$\#solucoes = k_{u[i]}^1 + (u[i] + 1) + \sum_{m=1}^{p-2} \sum_{n=1}^{u[i]} k_n^m \text{ (arco i)}$$

Levando em consideração o número de combinações possíveis de soluções, pode-se concluir que o tamanho do espaço solução de \mathcal{A} é dado por:

$$\prod_{i=1}^a \left[k_{u[i]}^1 + (u[i] + 1) + \sum_{m=1}^{p-2} \sum_{n=1}^{u[i]} k_n^m \right] \quad (5)$$

Validação do dimensionamento

Para validar a expressão (5) será feito dois testes, supondo um arco com capacidade igual a três e com três produtos envolvidos, e num segundo caso, um arco com capacidade igual a dois e com cinco produtos inseridos na rede.

$$\left. \begin{array}{c} \# \text{ solucoes} \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 2 \ 2 \\ 0 \ 2 \ 1 \\ 0 \ 3 \ 0 \\ 0 \ 3 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \\ 2 \ 0 \ 0 \\ 2 \ 0 \ 0 \\ 2 \ 1 \ 0 \\ 3 \ 0 \ 0 \end{array} \right\} 20$$

Fórmula:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^1 \left(k_{u[i]}^1 + (u[i] + 1) + \sum_{m=1}^{3-2} \sum_{n=1}^{u[i]} k_n^m \right) \\ &= (1 + 2 + 3) + (4) + [k_1^1 + k_2^1 + k_3^1] = \\ &= (1 + 2 + 3) + (4) + [1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3)] = \\ &= 10 + 10 = 20 \end{aligned}$$

Para o segundo caso, tem-se: $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{p} = 5$ e $u[1] = 2$.

$$\left. \begin{array}{c} \# \text{ solucoes} \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \right\} 21$$

Fórmula:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^1 \left(k_{u[i]}^1 + (u[i] + 1) + \sum_{m=1}^{5-2} \sum_{n=1}^{u[i]} k_n^m \right) \\ &= k_1^1 + 3 + (k_1^1 + k_2^1) + (k_1^2 + k_2^2) + \\ &+ (k_1^3 + k_2^3) = \\ &= (1 + 2 + 3) + [1 + (1 + 2)] + [k_1^1 + k_1^1 + k_2^1] + \\ &+ [k_1^2 + k_1^2 + k_2^2] = \\ &= 6 + 4 + (1 + 1 + 1 + 2) + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = \\ &= 21 \end{aligned}$$

Apesar da simplicidade dos testes realizados, pode-se constatar a validação da expressão (5) para o dimensionamento do problema tratado neste trabalho.

Análise para variação de parâmetros

Nesta seção será discutido a influência da variação dos parâmetros: arco, produto e capacidade, inseridos no problema em questão. Todas as curvas resultantes foram ajustadas exponencialmente pela expressão (6), utilizando o software Origin 6.0.

$$y = y_0 + Ae^{\left(\frac{x}{t}\right)} \quad (6)$$

As Figuras 2, 3 e 4 refletem a variação linear da quantidade de arcos, produtos e capacidade respectivamente, produzindo soluções com comportamento exponencial.

A base de dados utilizadas para realização da análise gráfica pode ser visualizada em [7]. Em poder dos parâmetros obtidos pelo Origin 6.0, que podem ser encontrados em [8], pode-se analisar através de simulações que o aumento linear na quantidade de arcos provoca maior dificuldade na resolução do problema, pois a taxa de crescimento do número de soluções é maior em relação ao número de produtos e capacidade, porém o número de arcos não é o fator que fornece maior contribuição no aumento do número de soluções. O aumento linear na

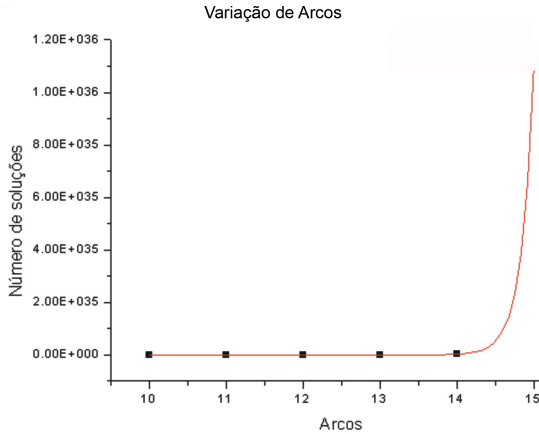


Figura 2: Variação de arcos

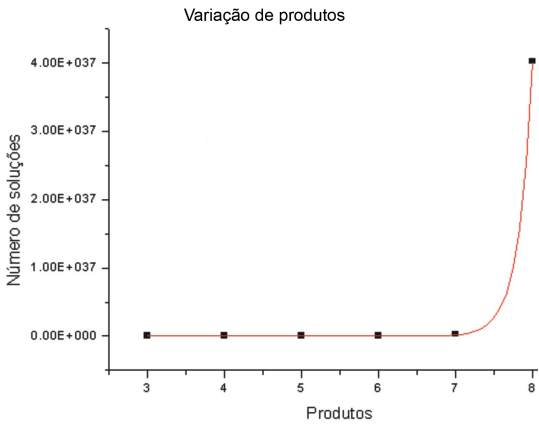


Figura 3: Variação de produtos

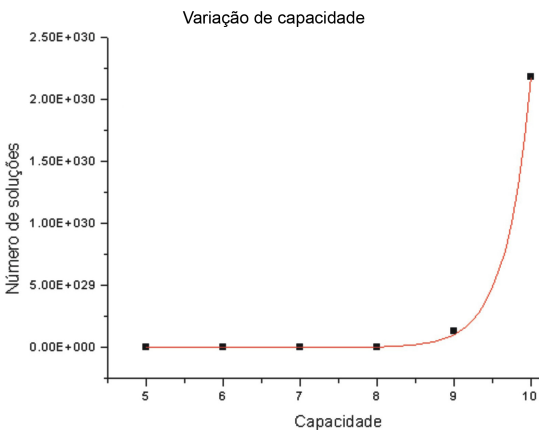


Figura 4: Variação de capacidade

quantidade de produtos provoca um maior número de soluções para o problema, porém a taxa de crescimento desse número é menor do que a gerada pelo aumento do número de arcos, isto analisado individualmente.

Para a análise na variação da capacidade, foi suposto que a capacidade dos arcos fossem iguais. Por exemplo, na instância de capacidade 5, os 10 arcos possuem essa capacidade, na instância de capacidade 6, os 10 arcos possuem capacidade 6. O fator capacidade foi o de menor impacto em relação a dimensão do problema, mesmo assim gerando altos valores.

Conclusão das análises e alguns resultados

O número de produtos geraram maior dimensão ao problema, entretanto, o número de arcos gera um crescimento maior da dimensão. Para os testes realizados aqui, essa taxa chega a ser 2:1, o que leva a concluir que o fator número de arcos é mais impactante ao problema, pois com essa taxa o número de soluções geradas pelo aumento linear do número de arcos superará os gerados pelo aumento de produtos. Como dito anteriormente, esse espaço contém efetivamente o espaço solução do problema.

Os resultados exibidos na tabela 1, refletem a dificuldade de um problema de fluxo multiproduto com variáveis inteiras, apesar do espaço aqui abordado ser muito maior do que o espaço solução do problema em questão, trata-se de um espaço o qual se consegue fazer uma enumeração e certamente será região para geração de vizinhanças na utilização de heurísticas computacionais na tentativa de solucionar o problema.

Tabela 1: Dimensão do espaço solução

#arcos	#produtos	cap. arco	#soluções
20	5	10	6.01e+87
20	10	15	4.71e+148
28	15	8	6.55e+188
30	10	8	4.40e+171

Agradecimentos

Agradecemos ao apoio financeiro da CAPES despendido nesta pesquisa.



Referências

- [1] Buriol, L. S., Roteamento do tráfego na internet: algoritmos para projeto e operação de redes com protocolo OSPF, *Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - FEEC/UNICAMP* (2003)
- [2] Fulkerson, D. R. and Ford, L. R., Flows in networks, *Technical report, Princeton University Press*, (1962)
- [3] Gambardela, L. M., Tailard, E. and Agazzi, G., A multiple ant colony system for vehicle routing problems with time windows, *In New Ideas in Optimization, McGraw-Hill. D. Corne et al. Eds.*, pp. 63–76 (1999)
- [4] Hu, T. C., Multicommodity network flows, *Operations research*, vol. 11, pp. 344–360 (1963)
- [5] Milidui, R. et al., Um algoritmo grasp para o problema de transporte de derivados de petróleo em oleodutos, *In Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 237-246 (2001)
- [6] Schultz, G. L. and Meyer, R. R., An interior point method for block angular optimization, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 42, n. 4, nov. (1991)
- [7] http://www.calex.mat.br/arquivos/MMC/multicommodity_solution_space.txt
Último acesso em 27/04/2007
- [8] <http://www.calex.mat.br/arquivos/MMC/origin.txt>
Último acesso em 27/04/2007