



Aplicações da distribuição Gama em dados climatológicos: Modelagem da precipitação pluviométrica do Recôncavo Baiano.

Gilênio B. Fernandes

Silvia Regina R. Lemos,

Departamento de Estatística, IM, UFBA,

40170-110, Salvador, BA

E-mail: gilenio@ufba.br, silviareginalemos@ig.com.br,

Andrea A. Prudente

Maristela D. de Oliveira

Departamento de Estatística, IM, UFBA,

40170-110, Salvador, BA

E-mail: deaprudente@gmail.com, maridias@ufba.br

Resumo Este estudo tratou da modelagem probabilística da precipitação pluviométrica do Recôncavo Baiano, através da distribuição gama incompleta, com dois parâmetros. O objetivo foi determinar a estrutura probabilística da ocorrência de chuvas utilizando dados do Município de Cruz das Almas, Bahia. Foram utilizadas as precipitações pluviométricas diárias de uma série de 55 anos das estações meteorológicas da Escola de Agronomia da UFBA no período de 1950 a 1972 e no Centro Nacional de Pesquisa em Mandioca e Fruticultura da EMBRAPA de 1973 até 2004. No Recôncavo Baiano as chuvas ocorrem durante o ano todo com maior concentração de março a julho e menor entre agosto e fevereiro denominados período chuvoso e seco, respectivamente. Observou-se que a precipitação anual foi bastante variável com um mínimo de 694.0 mm em 1993 e um máximo de 1886.3 em 1964. As estimativas dos parâmetros obtidas podem ser usadas para determinar as probabilidades de ocorrências de chuvas de diferentes intensidades nos meses do ano, bem como estabelecer um padrão probabilístico pluviométrico para caracterizar a região. Como impactos deste trabalho, espera-se que órgãos públicos e privados utilizem estes resultados para planejamento urbano, ações sociais e especialmente o gerenciamento das atividades agropecuárias da região.

Palavras-chave Fatores climáticos; Probabilidade de chuva; Modelos probabilísticos.

como um dos principais componentes do clima pode promover situações críticas de instabilidade tanto por deficiência, provocando secas para a agricultura, deficiência no abastecimento de água, geração de energia, como por excesso para as populações urbanas das grandes cidades causando grandes enchentes, inundações, deslizamento de terra, desmoronamento e muitos outros danos nas edificações urbanas, bem como dificuldades para aviação, navegação, transportes rodoviários, etc. O presente estudo teve como objetivo a modelagem probabilística da precipitação pluviométrica do Recôncavo Baiano, através da distribuição gama incompleta, com dois parâmetros. Obteve-se as estimativas da probabilidade de ocorrência de chuva de diferentes intensidades, na região do Recôncavo Baiano, onde inúmeras atividades agropecuárias carecem de estudos estatísticos mais aprofundados das séries pluviométricas, como por exemplo, a distribuição probabilística das precipitações em diferentes períodos do mês. O planejamento agropecuário e outras ações de instituições públicas e privadas quando existe são feitas com base em simples estatísticas descritivas como médias mensais. O estudo das precipitações diárias e grupadas em períodos através da distribuição gama fornece informações probabilísticas de capital importância para um planejamento racional das ações de instituições públicas e empreendimentos privados no Recôncavo baiano.

Introdução

Desde a antiguidade o homem fazia observações e estudos dos fenômenos atmosféricos através da natureza. Atualmente, a climatologia tornou-se cada vez mais necessária para a agricultura, para os estudos ecológicos, e para os estudos e planejamento sócio-econômico. A quantidade quanto à distribuição das precipitações pluviométricas é de capital importância para a produção de alimentos, geração de energia, abastecimento de água para consumo humano e animal, etc. A chuva

Metodologia

Os dados a serem utilizados no presente estudo foram às precipitações diárias medidas na estação agro meteorológica localizada na Escola de Agronomia da UFBA no período de 1950 a 1972 e no Centro Nacional de Pesquisa em Mandioca e Fruticultura—CNPMP da EMBRAPA de 1973 até 2004, Município de Cruz das Almas—BA. Estas estações dispõem de longa série de dados diários de precipitação pluviométrica e outras variáveis climáticas.

A variável que foi modelada neste estudo corres-

ponde às precipitações pluviiais diárias expressas em altura da lâmina d'água (mm) abrangendo o período de janeiro de 1950 a dezembro de 2004, num total de 55 anos. Os dados foram grupados em dez períodos dentro de cada mês.

Os períodos foram constituídos pelos seguinte agrupamentos das observações: 1–3, 1–6, 1–9, 1–12, 1–15, 1–18, 1–21, 1–24, 1–27, 1–30 (ou 1–31) no total de dez períodos dentro de cada mês. O período 1–3, por exemplo, significa totalizar as precipitações nos dias 1, 2 e 3 dentro do mês. Os dados foram também agrupados em seis períodos dentro de cada mês sendo os períodos constituídos pelos seguintes agrupamentos das observações: 1–5, 6–10, 11–15, 16–20, 21–25, 26–30 (28, 29 ou 31). O período 1–5, por exemplo, significa totalizar as precipitações nos dias 1, 2, 3, 4 e 5 dentro do mês.

Para uma variável aleatória X ($0 \leq X < \infty$) com distribuição gama com de parâmetros $\alpha > 0$ (parâmetro de forma), $\beta > 0$ (parâmetro de escala) sua função densidade de probabilidade é expressa da forma: (Jonhson, Kotz & Balakrishnan, 1994)

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}. \quad (1)$$

A média e variância da variável aleatória X são obtidas por $E(X) = \mu = \alpha\beta$ e $E(X - \mu)^2 = \alpha\beta^2$, respectivamente. A estimação dos parâmetros foi feita através do método da máxima verossimilhança. Para uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n de variáveis independentes com distribuição gama (1) a função de verossimilhança é escrita como:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta : x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha-1} e^{-x_i/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \\ &= \beta^{-n\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-n} \times \\ &\quad \prod_{i=1}^n x_i \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\beta\right). \end{aligned}$$

Fazendo $l(\alpha, \beta : x_1, x_2, \dots, x_n) = \log(L(\alpha, \beta : x_1, x_2, \dots, x_n))$ o desenvolvimento algébrico de $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$ usando de algumas expansões em série chega-se a:

$$\hat{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4A/3}}{4A} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}},$$

com $A = \log(\bar{x}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i)$.

As variâncias e covariâncias dos estimadores são:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\alpha}) &= \frac{\hat{\alpha}}{n[\hat{\alpha}\psi'(\hat{\alpha}) - 1]}, \quad \text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\beta}^2\psi'(\hat{\alpha})}{n[\hat{\alpha}\psi'(\hat{\alpha}) - 1]}, \\ \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \frac{-\hat{\beta}}{n[\hat{\alpha}\psi'(\hat{\alpha}) - 1]}. \end{aligned}$$

Quando a variável aleatória X assume o valor zero, o que não é raro no caso de precipitação pluviométrica há uma dificuldade na estimação dos parâmetros porque o logaritmo não existe. Uma maneira de contornar o problema é excluir os valores zero da série. No presente estudo a proporção de valores nulos (\bar{Q}) foi computada por $\bar{Q} = \frac{m}{n}$, sendo m o número de zeros e n o tamanho da amostra.

As probabilidades de ocorrências de precipitações pluviométricas $P(X \geq x_1)$, $P(X \leq x_2)$ e $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ foram calculadas integrando a função densidade de probabilidade da distribuição gama com os parâmetros substituídos pelas correspondentes estimativas.

Resultados e Discussão

Numa etapa inicial procedeu-se a análise descritivas dos dados envolvidos na modelagem. Notou-se que a precipitação total anual foi bastante variável observando-se um mínimo de 694.0 mm em 1993 e um máximo de 1886.3 em 1964. Em 1964 as maiores precipitações mensais foram observadas nos meses de abril (271.1 mm), maio (202.6 mm) e agosto (233.0 mm). A média da precipitação total anual observada no período foi de 1169.2 mm e o desvio padrão 252.3 mm.

No Recôncavo Baiano as chuvas ocorrem durante o ano todo com maior concentração de precipitação nos meses de abril, maio, junho e julho. As precipitações médias mensais no período 1950 a 2004 nos referidos meses foram de 134.2 mm, 143.0mm, 129.6 mm e 122.9 mm respectivamente. Observou-se também para o período em estudo, a média mínima de 50.5 mm para o mês de outubro e a máxima de 143.0 mm para maio.

Para as precipitações acumuladas em períodos de três dias consecutivos, verificou-se que as estimativas do parâmetro α variaram de 0.4683 (em 1 a 6 de janeiro) a 8.1586 (em 1 a 31 de agosto). Observou-se também que, em geral, nos meses de menor concentração de precipitações, como de setembro a fevereiro as estimativas de α foram menores do que nos meses de maiores concentrações de precipitações, julho e agosto. Os valores dessas estimativas para os períodos mais chuvosos variaram de 0.645 (em 1 a 3 de abril) a 8.1586 (em 1 a 31 de agosto) e nos meses menos chuvosos variaram de 0.4463 (em 1 a 6 de janeiro) a 2.3681 (em 1 a 3 setembro).

As estimativas do parâmetro β variaram de 10.4272 (em 1 a 3 setembro) a 88.5631 (em 1 a 21 janeiro). Os valores dessas estimativas nos períodos do mês de agosto foram menores quando comparados com os períodos dos outros meses do ano.

Para os meses considerados como mais chuvosos, março a julho, calculou-se as precipitações acumuladas em períodos de cinco em cinco dias, 1 a 5, 6 a 10, etc. até 26 a 30 (ou 31). As precipitações médias nestes períodos para a série 1950 a 2004 variaram de 12.4 mm (em 21 a 25 março) a 28.5 mm (em 21 a

25 abril). Para o mês de junho a maior precipitação (26.8 mm) nos períodos 26 a 30 e a menor (14.0 mm) nos períodos 6 a 10. As estimativas do parâmetro α teve o valor mínimo de 0.2812 para o período 21 a 25 março e valor máximo de 1.5221 para 26 a 30 junho. Para as estimativas do parâmetro β os valores mínimo e máximo ocorreram no mês de julho com 13.6092 no período 16 a 20 e 61.8708 no período 21 a 25, respectivamente.

Na tabela 1 e 2, encontram-se as probabilidades de ocorrências de precipitações de diferentes intensidades para períodos de 1 a 3, 1 a 6, 1 a 9 e 1 a 30 (ou 31) dias para os meses de abril, maio, junho e julho. Pode ser observado que a probabilidade de chover menos de 5 mm no período de 1 a 3 de abril é 0.40 (ou 40%) e a probabilidade de chover mais do que a média mensal do período 1950 a 2004 no mês de abril é de 0.42 e para os meses de maio, junho e julho, 0.45, como mostra nas Tabelas 1 e 2, respectivamente

Tabela 1: Probabilidades estimadas de ocorrência de chuvas de diferentes intensidades nos períodos de 1 a 3, 1 a 6, 1 a 9 e 1 a 30 (ou 31) dias nos meses de abril a junho

Mês	Período	$P(c < 5mm)$	$P(c < 10mm)$
Abril	1 a 3	0.40	0.58
	1 a 6	0.19	0.33
	1 a 9	0.10	0.20
	1 a 30	0.00	0.00
Maio	1 a 3	0.28	0.46
	1 a 6	0.11	0.24
	1 a 9	0.02	0.08
	1 a 31	0.00	0.00
Junho	1 a 3	0.29	0.47
	1 a 6	0.10	0.23
	1 a 9	0.06	0.15
	1 a 30	0.00	0.00
Julho	1 a 3	0.26	0.45
	1 a 6	0.10	0.23
	1 a 9	0.02	0.06
	1 a 31	0.00	0.00

Nas Tabelas 3 e 4, apresentam-se as precipitações acumuladas no períodos de 1 a 5, 6 a 10, 11 a 15 e 26 a 30 (ou 31) dias para os meses de abril a junho. Verifica-se que no mês de junho, a probabilidade de chover menos de 5 mm no período de 26 a 30 é de 0,09 (ou 9%) e de chover entre 5 mm e 10 mm no período de 1 a 5 é de 0.13 (Tabela 3 e 4, respectivamente). Já para o mês de julho a probabilidade de chover menos de 10 mm no período de 1 a 5 é de 0.27 (Tabela 4).

Tanto os períodos apresentados na segunda coluna bem como os valores das precipitações apresentadas na primeira linha das Tabela 1, 2, 3 e 4 foram escolhidos arbitrariamente com o objetivo de apenas ilustrar os cálculos das probabilidades.

Valores mais realísticos para aplicações práticas devem ser escolhidos com base em conhecimentos de Climatologia, Agronomia, etc. e as probabilidades de chuvas de quaisquer intensidades nos períodos desejados podem ser determinadas facilmente integrando a função densidade de probabilidade da distribuição gama com os parâmetros substituídos pelas correspondentes estimativas. Para os meses de abril a julho, a Tabela 1 reflete que nos seis primeiros dias do mês, em termos probabilísticos maio junho e julho tem características semelhantes e são um pouco mais chuvosos do que abril.

Tabela 2: Probabilidades estimadas de ocorrência de chuvas de diferentes intensidades nos períodos de 1 a 5, 6 a 10, 11 a 9 e 1 a 30 (ou 31) dias nos meses de abril a junho

Mês	Período	$P(5mm < c < 10mm)$	$P(c > \bar{x} \text{ mês})$
Abril	1 a 3	0.18	0.00
	1 a 6	0.14	0.01
	1 a 9	0.10	0.04
	1 a 30	0.00	0.42
Maio	1 a 3	0.18	0.00
	1 a 6	0.13	0.00
	1 a 9	0.06	0.01
	1 a 31	0.00	0.45
Junho	1 a 3	0.18	0.00
	1 a 6	0.12	0.00
	1 a 9	0.09	0.02
	1 a 30	0.00	0.45
Julho	1 a 3	0.19	0.00
	1 a 6	0.13	0.01
	1 a 9	0.05	0.02
	1 a 31	0.00	0.45

Tabela 3: Probabilidades estimadas de ocorrência de chuvas de diferentes intensidades nos períodos de 1 a 5, 6 a 10, 11 a 9 e 1 a 30 (ou 31) dias nos meses de abril a junho

Mês	Período	$P(c < 5mm)$	$P(c < 10mm)$
Abril	1 a 5	0.24	0.40
	6 a 10	0.18	0.32
	11 a 15	0.30	0.47
	26 a 30	0.18	0.32
Maio	1 a 5	0.19	0.34
	6 a 10	0.20	0.33
	11 a 15	0.21	0.38
	26 a 31	0.11	0.23
Junho	1 a 5	0.13	0.27
	6 a 10	0.19	0.39
	11 a 15	0.24	0.40
	26 a 30	0.09	0.22
Julho	1 a 5	0.15	0.30
	6 a 10	0.18	0.35
	11 a 15	0.15	0.31
	26 a 31	0.19	0.35

Vale ressaltar que com base nas precipitações observadas na série 1950 a 2004, em termos de probabilidade de chuvas, no dia a dia espera-se que, para os meses abril a julho de 42 a 45% das vezes ocorram chuvas maiores do que a média mensal calculada no referido período (Tabela 2). Isto é decorrente da assimetria da distribuição dos dados precipitação (distribuição gama), o que pode induzir muitos climatologistas a pensar de forma errada que as chances de ocorrências de chuvas maiores ou menores do que a média mensal seja de 50%.

Tabela 4: Probabilidades estimadas de ocorrência de chuvas de diferentes intensidades nos períodos de 1 a 5, 6 a 10, 11 a 15 e 16 a 30 (ou 31) dias nos meses de abril a junho

Mês	Período	$P(5mm < c < 10mm)$	$P(c > \bar{x} \text{ mês})$
Abril	1 a 5	0.16	0.32
	6 a 10	0.14	0.41
	11 a 15	0.17	0.26
	16 a 30	0.15	0.38
Maio	1 a 5	0.15	0.31
	6 a 10	0.13	0.37
	11 a 15	0.16	0.27
	16 a 31	0.12	0.42
Junho	1 a 5	0.14	0.36
	6 a 10	0.19	0.22
	11 a 15	0.16	0.29
	16 a 30	0.13	0.40
Julho	1 a 5	0.15	0.45
	6 a 10	0.17	0.39
	11 a 15	0.16	0.43
	16 a 31	0.16	0.40

Referências

- [1] Botelho, V. A. V. A. & A. R. de Moraes, Estimativas dos parâmetros da distribuição gama de dados pluviométricos do Município de Lavras, Estado de Minas Gerais, *Ciênc. Agrotec., Lavras*, 23 (1999) 697-706.
- [2] Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N., "Continuous Univariate Distributions", Vol. 1, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York, 1994.