Modelagem com equações diferenciais

Márcia P. Dantas
Depto. de Matemática, UFRPE,
52171-900, Recife, PE
E-mail: marcia.pragana@gmail.com.

Resumo: Neste trabalho, apresentamos a modelagem matemática voltada para modelos dinâmicos e que, portanto, utilizam a derivada como ferramenta matemática para sua descrição, mais precisamente, equações diferenciais ordinárias, com uma variável independente. Introduzimos a noção de modelagem matemática em geral e em seguida, a modelagem com equações diferenciais para em seguida colocar algumas aplicações. Fazemos uma abordagem introdutória, começando com modelos clássicos unidimensionais até modelos representados por sistemas de equações diferenciais, sempre valorizando modificações introduzidas no modelo. O tipo de análise matemática é analítica (solução explícita) e qualitativa (estabilidade).

Entre os modelos clássicos, apresentamos a exponencial, a logística e aplicações a diversos fenômenos modelados por estas equações: Espécies em ambiente limitado, Espécies em competição, Propagação de um boato (proporção conjunta), Dia do juízo X extinção (proporção conjunta relativa à taxa de natalidade), Modelo predador–presa, Melhoramento do modelo predador–presa (crescimento logístico da presa na ausência do predador), Duas espécies competindo pelo mesmo alimento (crescimento logístico para ambas espécies) ([2] e [3]). Nestes dois últimos casos, apresentamos o modelo matemático para o fenômeno nos abstendo de discutir seu comportamento qualitativo.

Encerramos apresentando modelos clássicos utilizados em epidemiologia matemática onde exploramos a dedução do modelo matemático ([1]).

Palavras-chave: modelagem matemática, taxa de crescimento, dinâmica populacional, epidemiologia, solução analítica e análise qualitativa.

1 Modelagem matemática

A modelagem matemática se preocupa em descrever matemáticamente fenômenos ou sistemas que ocorrem na realidade ao nosso redor tais como físicos, sociológicos, econômicos e biológicos. Fenômenos desta natureza são complexos e dinâmicos o que os tornam, a princípio, impossíveis de serem modelados e resolvidos em toda sua complexidade. O modelo é então uma aproximação da realidade.

A identificação das variáveis é o primeiro passo na formulação do modelo, seguida da escolha das hipóteses. Estas devem ser tomadas de maneira a garantir que as características essenciais do fenômeno se mantenha. Entra em jogo os níveis de resolução que se pretende que vai depender do que se quer investigar. O modelo deve estar entre o fisicamente realista e o matematicamente possível. Em seguida, precisa-se de parâmetros para abalizar a validade do modelo como a coerência com os dados e o comportamento do sistema. Numa última etapa, procede-se à crítica do modelo seguida de ajuste. Este processo se repete até que se tenha um modelo satisfatório. Temos assim o seguinte esquema: quanto maior o nível resolução, maior a complexidade e maior a dificuldade de resolver o modelo.

Problemas dinâmicos, que envolvem mudanças, são próprios para serem interpretados através de taxa de variação (derivada). Temos portanto quantidades variávies $x(t)$ associadas a taxa de variação (derivada)

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Equações que envolvem derivadas são equações diferenciais:

- Equação diferencial ordinária de primeira ordem:
$$x' = F(t, x)$$
- Sistema de equações diferenciais:
$$\mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X}); \quad \mathbf{X}^t = (x_1, x_2, ...x_n)$$
- Uma equação diferencial parcial: duas ou mais variáveis independentes e várias variáveis dependentes $x_1, x_2, ...x_n$. Não vamos abordar este caso.

A análise matemática desses modelos varia entre os seguintes casos:

- Solução analítica: tem solução explícita
- Solução numérica: a solução é aproximada
- Análise qualitativa: estuda–se o comportamento das soluções, sem necessariamente conhecê–las.

2 Modelos clássicos

A equação geral de uma população é dada por,

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = f(t),$$

onde $f(t)$ é a taxa de variação da populaçao (taxa per capta). No caso de uma população fechada (varia apenas por nascimentos ou mortes),

$$f(t) = n(t) - m(t),$$

onde $n(t)$ e $m(t)$ representam as taxas de natalidade e mortalidade, respectivamente. Se, $N(t)$ e $M(t)$ representam o número de nascimentos e óbitos até t, respectivamente,

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{N'(t)}{x(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t x(t)}; \\ m(t) &= \frac{M'(t)}{x(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t x(t)}; \end{aligned}$$

2.1 Crescimento exponencial

Neste caso, as taxas de natalidade e mortalidade $n(t)$ e $m(t)$ são constantes de modo que $f(t) = k$. Temos o modelo Malthusiano (1798),

$$\begin{aligned} x' &= kx, \\ x(t) &= ae^{kx},\ x(0) = a. \end{aligned}$$

O modelo falha em não considerar que com o crescimento da população a mesma desencadeia mecanismos de controle da natalidade de modo que a taxa de crescimento diminui. No caso de superpopulações, podem ocorrer alterações fisiológicas que levem a uma mudança no comportamento sexual. Em intervalo de tempo pequeno, o modelo pode ser válido.

2.2 A logística

Este é um melhoramento do modelo exponencial. A função $f(t)$ decresce linearmente com a população, ou seja,

$$f(t) = a - bx(t), \quad a, b > 0.$$

Se taxa de natalidade $n(t)$ decresce linearmente com a população enquanto a taxa de mortalidade ainda é considerada constante,

$$f(t) = (n_0 - m_0) - n_1 x(t); \quad n_0 > m_0.$$

Temos o modelo de Verhulst (1834, França e Bélgica), Pearl e Reed (1920, EUA),

$$x' = x(a - bx). \tag{1}$$

O modelo falha em não considerar a reprodução por idade.

A solução explícita da equação não linear (1) pode ser obtida reduzindo–a à equação linear

$$u' + au = b,$$

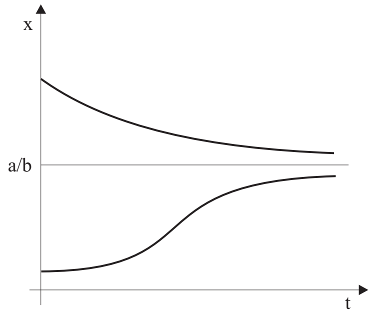

Figura 1: Curva logística.

usando a mudança de variáveis $u = x^{-1}$. Temos,

$$u(t) = \frac{b}{a} + ke^{-at}$$

e as soluções são $x(t) = 0$, ou

$$x(t) = \frac{a}{b + kae^{-at}}; \quad ka = \left(\frac{a}{x_0} - b\right) e^{at_0},$$

para todo $t \geq 0$, que é a equação da curva logística (Figura 1).

A solução $x_0 = a/b$, é uma solução de equilíbrio de (1) para a qual todas as soluções tendem em tempo infinito. De fato,

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{a}{b}, \quad x_0 > 0.$$

Camamos $x_\infty = a/b$ de população limite:

- Se $x_0 > a/b, x(t)$ diminui.
- Se $0 < x_0 < a/b, x(t)$ aumenta.

Derivando (1),

$$x'' = x'(a - bx) - bxx' = (a - 2bx)x,$$

de onde se observa que

- Se $x < a/2b, x$ cresce com $x' > 0$,
- Se $x > a/2b, x$ cresce com $x' < 0$,

Logo a equação tem ponto de inflexão em $x_\infty/2$.

3 Aplicações

3.1 Ambiente limitado

- Hipótese: espécie sujeita a um limite máximo de indivíduos M.

- Definindo o potencial para expansão da população como $M - x \geq 0$,
$$f(t) \sim M - x(t),$$
e portanto,
$$x' = kx(M - x) = x(kM - kx),$$
que é do mesmo tipo da logística (1).

3.2 Competição

Temos duas espécies competindo diretamente causando mortes (por exemplo, população canibal).

Hipóteses:

- Mortes resultam de encontros casuais.

Logo, considerando,

- A taxa de natalidade $n(t)$ constante;
- A taxa de mortalidade proporcional à população.$m(t) \sim x(t)$.

Aqui temos novamente a equação logística,
$$x' = x(a - bx).$$

3.3 Propagação de um boato

Temos uma população fechada onde se propaga um boato.

Hipótese:

- O boato se espalha a uma taxa *per capta* proporcional aos que ainda não ouviram o boato.

Logo, considerando que

- A população inicial que ouviu o boato é p_0; e M é a população total;
- A taxa de crescimento do boato no instante inicial é $p_0' = \gamma$;
- A população que ouviu o boato no instante t é $p(t)$,

$$p' = kp(M - p) \Rightarrow k = p_0'/p_0(M - p_0),$$

e temos de novo a logística,
$$p(t) = \frac{a}{b + \left(\frac{a}{p_0} - b\right) e^{-a(t - t_0)}},$$
onde $a = Mk,\ b = k$, ou seja,
$$p(t) = \frac{Mp_0}{p_0 + (M - p_0) e^{-Mkt}}. \qquad (2)$$

Suponha que no instante $t = 0$, metade de uma população de 1.000mil habitantes ouviu um boato e que o número dos que ouviram cresce a uma taxa de mil pessoas ao dia. Em quanto tempo o boato alcançará 80% da população?

- População inicial que ouviu o boato é $p_0 = M/2 = 500$, $M = 1.000$;
- Taxa de crescimento em $t = 0 : p_0' = 1$;
- Determinar T tal que $p(T) = \alpha M$, onde $0 < \alpha < 1$ e $p(t)$ é a população em mil habitantes.

Logo,
$$k = p_0'/p_0(M - p_0) = 4/M^2 = 4 \times 10^{-6},$$
e eliminando t em (2),
$$t = \frac{1}{Mk} \ln \frac{M - p_0}{\frac{Mp_0}{p} - p_0}.$$
Portanto,
$$T = \frac{M}{4} \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$
Se $\alpha = 0.7$, o boato leva aproximadamente 211 dias para se propagar. Já se $a = 0.8$, temos quase um ano para se propagar. O boato não é de grande repercussão.

3.4 Dia do juízo X extinção

Temos uma população que, para crescer, depende apenas de encontros casuais para encontrar parceiros para reproduzir (proporção conjunta relativa à taxa de natalidade).

Hipóteses:

- Encontros são proporcionais ao produto entre machos e fêmeas que são considerados em mesma quantidade.

Assim, considerando $x(t)$ a população no instante t,
$$\begin{aligned} N'(t) &\sim x^2 \Rightarrow n(t) = kx, \\ M'(t) &\sim x \Rightarrow m(t) = \mu. \end{aligned}$$

Logo, $f(t) = kx - \mu$ e temos a equação diferencial
$$x' = x(kx - \mu),$$
cuja solução é
$$x(t) = \frac{\mu}{k + Ae^{\mu t}}, \quad A = \frac{\mu}{x_0} - k.$$
Esta equação tem comportamento "oposto" ao da logística (ver Figura 2). De fato,
$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \mu/k,$$
e,

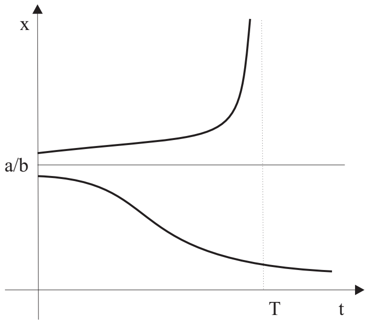

Figura 2: Extinção X juízo.

- Se $x_0 > \mu/k$,

$$k + Ae^{\mu T} = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{\mu}\ln\left(-\frac{k}{A}\right).$$

Logo,

$$\lim_{t\to T} x(t) = \infty,$$

e a população tende a infinito em tempo finito. A espécie explode.

- Se $x_0 < \mu/k$,

$$k + Ae^{\mu T} > 0 \Rightarrow x(t) < \mu/k.$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

e a população tende a zero em tempo finito. A espécie entra em extinção.

3.5 Modelo predador–presa

Temos duas espécies interagindo em um mesmo ambiente, onde uma se alimenta da outra que por sua vez encontra alimento na natureza (vegetais, algas...).

Hipóteses:

- Na ausência do predador, a presa tem crescimento exponencial; o contato com o predador leva a um decrescimento da presa proporcional aos contatos.
- Na ausência da presa, o predador tem decrescimento exponencial; o contato com a presa leva a um crescimento do predador proporcional aos contatos.

Assim, considerando $x(t)$ a população de presas no intante t e $y(t)$ a população de predador no intante t,

$$\begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -\alpha + \beta x \end{cases}.$$

ou seja temos um sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -\alpha y + \beta xy \end{cases}. \qquad (3)$$

onde,

- a, b, α, β constantes positivas.

  $b-$ susceptibilidade de x às ações predatórias;

  $\beta-$ habilidade predatória de y.

- ax crescimento da presa na ausência do predador;

  bxy decrescimento da presa pelo contato com o predador;

- αy decrescimento do predador na ausência da presa;

  βxy crescimento do predador pelo contato com a presa.

O estudo do comportamento do sistema é feito através da análise qualitativa.

- Pontos de equilíbrio: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\alpha/\beta, a/b)$,
- Linearização do sistema em (x_0, y_0) :

1. Em $P_1 = (0,0)$:

$$f(x,y) \simeq ax, \quad g(x,y) \simeq -\alpha y.$$

Então, o sistema linear associado a (3) é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - a)(\lambda + \alpha),$$

o sistema linear tem autovalores $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -\alpha < 0$. Portanto, o ponto P_1 é uma sela para os dois sistemas.

2. Em $P_2 = (\alpha/\beta, a/b)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\simeq -\frac{\alpha b}{\beta}(y - y_0) = -\frac{\alpha b}{\beta}v, \\ g(x,y) &\simeq \frac{a\beta}{b}(x - x_0) = \frac{a\beta}{b}u. \end{aligned}$$

Então, o sistema linear associado a (3) é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

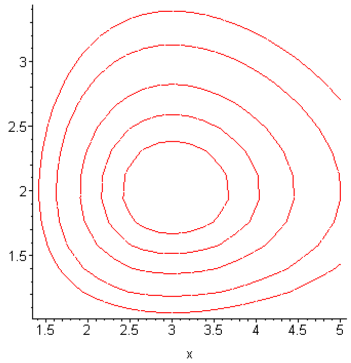

Figura 3: Sistema predador–presa.

Como

$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2+\alpha a,$$

o sistema linear tem dois autovalores complexos com parte real nula $\lambda_1=\sqrt{\alpha a}i$ e $\lambda_2=-\sqrt{\alpha a}i$. Portanto ponto P_2 é um centro para o sistema linear; mas é inconclusivo no caso não linear.

- Analisando P_2 por integração:

  O sistema tem uma quantidade que se conserva (integral primeira)

$$\alpha\ln x-\beta x+a\ln y-by=c.$$

Este modelo foi usado por Volterra em 1920, para estudar o comportamento cíclico de populações de tubarão no Mar Adriático. O espaço de fase deste sistema pode ser visto na Figura 3.

3.6 Melhoramento do modelo predador–presa

O crescimento da presa é inteligente: se autoregula.

Hipótese:

- A presa tem crescimento logístico na ausência do predador.

Logo, de acordo com (3), temos o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} x'=ax-bxy+\varepsilon x(1-x) \\ y'=-\alpha y+\beta xy \end{cases}.$$

3.7 Espécies competidoras

Temos duas espécies x,y, competindo pelo mesmo alimento.

Hipóteses:

- Na ausência de uma a outra tem crescimento limitado (logística).
- Competição leva a um declínio em cada população a uma taxa proporcional aos encontros.

Logo, o fenômeno é modelado pelo sistema de equações diferenciais,

$$x'=ax-bx^2-cxy,$$
$$y'=\alpha y-\beta y^2-\gamma xy.$$

3.8 Modelo SIR (Kermack–McKendrick)

Suponha uma população fechada (sem migração, nem nascimentos, mas com mortalidade) sujeita à uma doença infecciosa. Temos três subpopulações:

$S-$ subpopulação de susceptíveis, ou seja, aqueles passíveis de se infectarem,

$I-$ subpopulação de infectáveis, significando aqueles que podem infectar outro indivíduo,

$R-$ subpopulação de indivíduos removidos, composta dos indivíduos imunes à doença, que faleceram ou estão em quarentena, mas não são susceptíveis nem infectáveis,

$N-$ população total

$$N=S+I+R. \tag{4}$$

Hipóteses:

- A *força da infecção* é a probabilidade por unidade de tempo de um indivíduo susceptível se tornar infectado. Consideramos que a força da infecção f_i é proporcional aos infectáveis,

$$f_i=\beta I.$$

  onde β é a constante de proporcionalidade.

- Um indivíduo infectado se torna imediatamente infeccioso, ou seja o indivíduo S sujeito à infecção se torna imediatamente um indivíduo I.
- Os infectados têm uma probabilidade de se tornarem removidos constante dada por α.

Logo, os susceptíveis decrescem a uma taxa de variação por susceptível igual à força da infecção; os infectados crescem a taxa de variação por infectado igual à força da infecção menos a probabilidade de se tornarem removidos; e os removíveis crescem a uma taxa por infectado igual a α.

A equação diferencial que modela este fenômeno é portanto,

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI, \\ I' &= \beta SI-\alpha I, \\ R' &= \alpha I. \end{aligned} \tag{5}$$

A última equação em (5) pode ser obtida usando (4). Eliminando o tempo nas duas primeira equações,

$$\frac{dI}{dS}=\frac{\alpha-\beta S}{\beta S},$$

É imediato que o sistema tem uma integral primeira,

$$\alpha \ln S - \beta\,(S + I) = c.$$

3.9 Modelo SEIR

Vamos fazer um melhoramento do modelo SIR, considerando o período de latência (infectado é diferente de infecciosos). Temos uma subpopulação a mais, $E-$ subpopulação de indivíduos expostos, mas que ainda não transmitem a doença. A equação (4) *agora é*

$$N = S + E + I + R. \qquad (6)$$

Hipóteses:

- A *força da infecção* é a probabilidade por unidade de tempo de um indivíduo susceptível se tornar infectado. Consideramos que a força da infecção f_i é proporcional aos infectáveis,

  $$f_i = \beta I.$$

  onde β é a constante de proporcionalidade.

- Um indivíduo exposto tem uma probabilidade de se tornar infeccioso constante dada por γ.

- Os infecciosos foram expostos e têm uma probabilidade de se tornarem removidos constante dada por α.

Logo, os indivíduos expostos crescem a uma taxa de variação igual à força da infecção menos a probabilidade de se tornarem infecciosos; e os infecciosos crescem a uma taxa de variação dada pela diferença entre os expostos e os infectados.

O fenômeno é modelado pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I, \\ E' &= \beta S I - \gamma E, \\ I' &= \gamma E - \alpha I, \\ R' &= \alpha I. \end{aligned}$$

Referências

[1] O. Diekmann e J. A. Heesterbeek, “Mathematical Epidemiolgy of Infectious Diseases”, pp. 15 e 48, JOHN WILEY&SON, LTD, 2000.

[2] H. Edwards e D. E. Penney, “Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno”, pp. 61–66, LTC, 1995.

[3] D. G. Figueiredo, A. F. Neves, “Equações Diferenciais Aplicadas”, pp.18 –21,Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2001.