Identidades de Bartlett

Edleide de Brito
Programa de Pós-Graduação em Biometria, UFRPE,
52171-900, Recife, PE
E-mail: edbnet@gmail.com,

Gauss M. Cordeiro
Programa de Pós-Graduação em Biometria, UFRPE,
52171-900, Recife, PE
E-mail: gauss@deinfo.ufrpe.br.

Resumo Esse trabalho visa mostrar como obter as Identidades de Bartlett e algumas das suas aplicações. Entre as aplicações pode-se destacar o fato das Identidades de Bartlett facilitarem a obtenção de cumulantes e como consequência de encontrar a fórmula do viés do estimador de máxima verossimilhança (EMV) no caso de variáveis independentes e identicamente distribuídas (*iid*) que é dada em termos dos cumulantes. Outra aplicação é a correção das estatísticas: razão de verossimilhança (LR), escore de Rao, estatística de Wald e estatística de Wald modificada.

Palavras-chave Identidades de Bartlett, cumulantes e verossimilhança.

Introdução

Seja $L = L(\theta)$ a verossimilhança total de um problema regular supondo que as observações são independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas, onde θ é um vetor de $\Re^p$ [1]. Será adotada a seguinte notação para as derivadas da log-verossimilhança $\ell = \ell(\theta) = \log\ L(\theta)$, onde todos os índices variam de 1 a p:

$$U_r = \frac{\partial \ell}{\partial \theta_r}, \qquad U_{rs} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_r \theta_s},$$

$$U_{r,s} = \frac{\partial \ell}{\partial \theta_r}\frac{\partial \ell}{\partial \theta_s}, \qquad U_{r,st} = \frac{\partial \ell}{\partial \theta_r}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_s \theta_t},$$

etc.

Os momentos conjuntos de derivadas de $\ell(\theta)$ são:

$$\mu_r = E(U_r), \qquad \mu_{rs} = E(U_{rs}),$$

$$\mu_{r,s} = E(U_r U_s), \qquad \mu_{r,st} = E(U_r U_s t)$$

e assim por diante.

Os correspondentes cumulantes conjuntos são expressos em termos dos momentos e assumem a notação κ. Por exemplo, o cumulante $\kappa_{r,s}$ é dado por:

$$\kappa_{r,s} = E(U_r U_s) - E(U_r)E(U_s),$$

mas a esperança da função escore é igual a zero, isto é, $E(U_r) = \mu_r = 0$. Assim,

$$\kappa_{r,s} = \mu_{r,s}.$$

Os demais cumulantes conjuntos são obtidos de maneira análoga com a seguinte notação:

$$\kappa_{rs} = \mu_{rs}, \qquad \kappa_{rs,t} = \mu_{rs,t},$$

$$\kappa_{rs,tu} = \mu_{rs,tu} - \mu_{rs}\mu_{tu}, \qquad \kappa_{r,s,t} = \mu_{r,s,t},$$

$$\kappa_{r,s,t,u} = \mu_{r,s,t,u} - \sum_{(3)} \mu_{rs}\mu_{tu}, etc.,$$

onde $\sum_{(k)}$ representa o somatório sobre todas as k combinações de índices.

Os momentos e cumulantes definidos não são independentes, mas satisfazem à certas equações, as quais facilitam seus cálculos. Estas equações, que representam condições de regularidade, são denominadas de *Identidades de Bartlett*.

Na dedução das identidades de Bartlett será usada a condição de regularidade,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E\{t(Y)\} = \int t(Y) \frac{\partial f(y;\theta)}{\partial \theta} \qquad (1)$$

ou seja, em problemas regulares pode-se inverter a ordem das operações de diferenciação em relação a θ e a integração com respeito a y.

As identidades de Bartlett são obtidas expressando a equação (1) em termos de momentos e diferenciando-a sucessivamente com relação as componentes de θ.

Principais Identidades de Bartlett

- $\kappa_r = 0$.

Para verificar esta identidade, considere $U_r = \frac{L_r}{L}$ onde $L_r = \frac{\partial L}{\partial \theta_r}$.

Como a função de verossimilhança é uma função de densidade de probabilidade, tem-se que a $\int L\ dy = 1$.

Diferenciando com relação a θ_r esta igualdade tem-se $\frac{\partial}{\partial \theta_r} \int L\ dy = 0$.

Aplicando a condição de regularidade, isto é, permutando a derivada com a integral tem-se que, $\int \frac{\partial L}{\partial \theta_r} dy = 0$. Então,

$$\kappa_r = E(U_r) = \int U_r L dy = \int L_r dy = 0$$

$$\boxed{\kappa_r = 0}$$

- $\kappa_{rs} + \kappa_{r,s} = 0$.

A sua dedução é análoga à anterior, isto é, diferenciando $\int \frac{\partial L}{\partial \theta_r} dy = \int L_r dy = 0$ com relação a θ_s, obtém-se $\int \frac{\partial}{\partial \theta_s} L_r dy = 0$, substituindo L_r por $U_r L$ tem-se que:

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta_s}(U_r L)\ dy = \int \left\{ \left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta_s} \right) L + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_s} \right) U_r \right\} dy = 0$$

Mas, $\frac{\partial U_r}{\partial \theta_s} = U_{rs}$ e $\frac{\partial L}{\partial \theta_s} = L_s = U_s L$, então tem-se que:

$$\int \{U_{rs}L + U_r U_s L\} dy = 0 \Rightarrow E(U_{rs}) + E(U_r U_s) = 0$$

$$\boxed{\kappa_{rs} + \kappa_{r,s} = 0}$$

Outras Identidades de Bartlett

- $\kappa_{r,s,t} + \kappa_{rst} + \sum_{(3)} \kappa_{r,st} = 0.$

Para deduzir essa igualdade, deve-se diferenciar $\int \{U_{rs}L + U_r U_s L\} dy = 0$ em relação a θ_t:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_t} \{ \int [U_{rs}L + U_r U_s L] dy \} = 0.$$

Mas pela condição de regularidade tem-se que:

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta_t} \{U_{rs}L + U_r U_s L\} dy = 0 \text{ e então,}$$

$$\int \{U_{rst}L + U_{rs}U_t L + U_{rt}U_s L + U_r U_{st} L + U_r U_s U_t L\}\ dy = 0$$

$$E(U_{rst}) + E(U_{rs}U_t) + E(U_{rt}U_s) + E(U_r U_{st}) + E(U_r U_s U_t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\kappa_{rst} + \kappa_{rs,t} + \kappa_{rt,s} + \kappa_{r,st} + \kappa_{r,s,t} = 0$$

$$\boxed{\kappa_{r,s,t} + \kappa_{rst} + \sum_{(3)} \kappa_{r,st} = 0}$$

- $\kappa_{r,st} + \kappa_{rst} - \kappa_{st}^{(r)} = 0.$

A dedução dessa igualdade, inicia-se pelo cálculo da derivada de $\kappa_{st} = E(U_{st}) = -E(U_s U_t)$, em relação a θ_r.

A derivada do cumulante é denotada pelo sobrescrito no mesmo, ou seja,

$$\kappa_{st}^{(r)} = \frac{\partial \kappa_{st}}{\partial \theta_r}, \qquad \kappa_{rs}^{(tu)} = \frac{\partial^2 \kappa_{rs}}{\partial \theta_t \theta_u},$$

$$\kappa_{rst}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{rst}}{\partial \theta_u}, \quad \text{etc.}$$

Logo,

$$\kappa_{st}^{(r)} = -\frac{\partial}{\partial \theta_r} E(U_s U_t) = -\frac{\partial}{\partial \theta_r} \int U_s U_t L\ dy$$

$$\kappa_{st}^{(r)} == -\int \frac{\partial}{\partial \theta_r} U_s U_t L\ dy$$

$$\kappa_{st}^{(r)} = -\int \{U_{sr}U_tL + U_sU_{tr}L + U_sU_tL_r\}\; dy$$

Como $L_r = U_rL$, fica,

$$\kappa_{st}^{(r)} = -\kappa_{t,rs} - \kappa_{s,rt} - \kappa_{r,s,t}$$

Mas pela Igualdade de Bartlett anterior, tem-se que:

$$\kappa_{rst} + \kappa_{r,st} + \kappa_{r,s,t} = -\kappa_{t,rs} - \kappa_{s,rt}\ ,$$

Então,

$$\kappa_{st}^{r} = \kappa_{rst} + \kappa_{r,st} + \kappa_{r,s,t} - \kappa_{r,s,t}$$

$$\kappa_{st}^{(r)} = \kappa_{rst} + \kappa_{r,st}$$

$$\boxed{\kappa_{r,st} + \kappa_{rst} - \kappa_{st}^{(r)} = 0}$$

Pode-se deduzir outras identidades de Bartlett de forma análoga, destacando-se:

- $\kappa_{r,s,t} - 2\kappa_{rst} + \sum_{(3)} \kappa_{rs}^{(t)} = 0,$
- $\kappa_{rst}^{(u)} = \kappa_{rst,u},$
- $\kappa_{r,stu} + \kappa_{rstu} - \kappa_{stu}^{(r)} = 0,$
- $\kappa_{r,s,tu} = \kappa_{rstu} - \kappa_{rtu}^{(s)} - \kappa_{stu}^{(r)} + \kappa_{tu}^{(rs)} - \kappa_{rs,tu}.$

Aplicação

A grande vantagem das identidades de Bartlett é facilitar a obtenção dos cumulantes κ's, já que sob determinada parametrização pode conduzir a uma cálculo simples de alguns cumulantes, sendo os demais feitos indiretamente através destas identidades. Esses cumulantes têm grande aplicabilidade no cálculo de correções de Bartlett para a estatísticas da razão de verossimilhanças, escore de Rao, estatística de Wald e estatística de Wald modificada [2]. Outra alicação é no cálculo dos cumulantes conjuntos das distribuições.

Considere a distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$ cuja log-verossimilhança $\ell = \ell(\theta)$ para $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, baseada numa amostra *iid* de tamanho n, é dada por:

$$\ell = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2.$$

Os cumulantes conjuntos para $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$ são:

- $\kappa_{\mu\mu} = -\frac{n}{\sigma^2}$

$$\kappa_{\mu\mu} = E(U_{\mu\mu}) = E(\tfrac{\partial^2\ell}{\partial\mu^2}) = -\tfrac{n}{\sigma^2} \quad\Rightarrow\quad \kappa_{\mu,\mu} = \tfrac{n}{\sigma^2}$$

- $\kappa_{\sigma^2\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^4}$

$$\kappa_{\sigma^2\sigma^2} = E(U_{\sigma^2\sigma^2}) = E(\tfrac{\partial^2\ell}{\partial(\sigma^2)^2}) = -\tfrac{n}{2\sigma^4} \quad\Rightarrow\quad \kappa_{\sigma^2,\sigma^2} = \tfrac{n}{2\sigma^4}$$

- $\kappa_{\mu\sigma^2} = 0$

$$\kappa_{\mu\sigma^2} = E(U_{\mu\sigma^2}) = E(\tfrac{\partial^2\ell}{\partial\mu\partial\sigma^2}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \kappa_{\mu,\sigma^2} = 0$$

- $\kappa_{\mu,\mu,\mu} = \kappa_{\mu,\mu\mu} = \kappa_{\mu\mu\mu} = 0$

$$\kappa_{\mu\mu\mu} = E(U_{\mu\mu\mu}) = E\left(\frac{\partial^3\ell}{\partial\mu^3}\right) = 0$$

$$\kappa_{\mu\mu}^{(\mu)} = \frac{\partial\kappa_{\mu\mu}}{\partial\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{n}{\sigma^2}\right) = 0$$

Então substituindo na igualdade $\kappa_{\mu,\mu\mu} + \kappa_{\mu\mu\mu} + \kappa_{\mu\mu}^{(\mu)} = 0$ tem-se que $\kappa_{\mu,\mu\mu} = 0$. E utilizando a igualdade $\kappa_{\mu,\mu,\mu} + \kappa_{\mu\mu\mu} + 3\kappa_{\mu,\mu\mu} = 0$ encontra-se que $\kappa_{\mu,\mu,\mu} = 0$.

Logo,

$$\kappa_{\mu,\mu,\mu} = \kappa_{\mu,\mu\mu} = \kappa_{\mu\mu\mu} = 0$$

- $\kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2} = \frac{2n}{\sigma^6}$

$$\kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2} = E(U_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2}) = E\left(\frac{\partial^3 \ell}{\partial(\sigma^2)^3}\right) = E\left(-\frac{n}{(\sigma^2)^3} + \frac{3\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{(\sigma^2)^4}\right)$$

$$\kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2} = -\frac{n}{(\sigma^2)^3} + \frac{3n}{(\sigma^2)^3} = -\frac{2n}{\sigma^6}$$

- $\kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2} = -\kappa_{\sigma^2,\sigma^2\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^6}$
- $\kappa_{\mu,\mu\sigma^2} = -\kappa_{\mu\mu\sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^4}$
- $\kappa_{\mu,\mu,\sigma^2} = \frac{3n}{\sigma^4}$
- $\kappa_{\mu\mu\sigma^2\sigma^2} = -\frac{2n}{\sigma^6}$, etc.

Muitos desses cumulantes são encontrados mais facilmente através das identidades de Bartlett.

Além de facilitar a obtenção dos cumulantes conjuntos, as identidades de Bartlett podem ser utilizadas para obter a fórmula do viés do estimador de máxima verossimilhança (EMV) no caso de variáveis aleatórias *iid*, pois está é dada em termos dos cumulantes.

Referências

[1] G. M. Cordeiro, "Introdução à Teoria Assintótica", IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1999.

[2] G. M. Cordeiro, & B. D. Stosic, Correcting Four Test Statistics for One-parameter Distributions Using Mathematica, *submetido no Communications in Statistics, Simulation and Computation* (2007).

[3] I. T. S. Previdelli, Estimadores Corrigidos para Modelos Não-Lineares Generalizados Superdispersados, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina (2005).

[4] R. G. Santana,Matriz de Covariância Corrigida para os Modelos Não-Lineares da Família Exponencial, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina (2005).

[5] M. C. T. Udo, Melhoria dos Estimadores de Máxima Verossimilhança dos Submodelos Não-Lineares da Família Exponencial de Dispersão, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina (2005).