Probabilidade

1 – Probabilidade Condicional

2 – Teorema do Produto

3 – Independência Estatística

4 – Teorema de Bayes

Renata Souza

Centro de Informática UFPE

Probabilidade Condicional

- Seja E: lançar um dado, e o evento A={sair o número 3}. Então P(A) = 1/6.
- Considere o evento B={sair um número impar}. Então P(A/B) (lê-se a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu) é igual a 1/3
- Definição: Dado dois eventos A e B, denota-se

  NCF = número de casos favoráveis

  NCT = número de casos total

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{NCF(A \cap B)}{NTC}}{\dfrac{NCF(B)}{NTC}} = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)}$$

Exemplo: Lançamento de dois dados

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Exemplo 1

- A={$(x_1,x_2)/x_1 + x_2 = 10$},
- B={={$(x_1,x_2)/x_1 > x_2$} onde x_1 é o resultado do dado 1 e x_2 é o resultado do dado 2.
- Calcular P(A), P(B), P(A/B) e P(B/A)

$$P(A) = \frac{NCF(A)}{NCT} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \qquad P(B) = \frac{NCF(B)}{NCT} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$P(A/B) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)} = \frac{1}{15} \qquad P(A/B) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(A)} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2

- Considere a situação promocional de oficiais dos Estados Unidos.

Status de Promoção dos Oficiais de Polícia

	Homens	Mulheres	Total
Promovidos	288	36	324
Não Promovidos	672	204	876
Total	960	240	1200

Exemplo 2

H- evento em que um oficial seja um homen
M – evento em que um oficial seja uma mulher
I – evento em que um oficial é promovido
$\bar{I}$ – evento em que um oficial não é promovido

Tabela de Probabilidade Associada

	Homens	Mulheres	Total
Promovidos	0,24	0,03	0,27
Não Promovidos	0,56	0,17	0,73
Total	0,80	0,20	1

$P(H \cap I) = 288/1200 = 0,24$

$P(H \cap \bar{I}) = 672/1200 = 0,56$

$P(M \cap I) = 36/1200 = 0,03$

$P(M \cap \bar{I}) = 204/1200 = 0,17$

Exemplo 2

Qual a probabilidade P(A/H)?

$$P(A/H) = \frac{288}{960} = \frac{288/1200}{960/1200} = \frac{0{,}24}{0{,}80} = 0{,}30$$

$$P(A/H) = \frac{288}{960} = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}24}{0{,}80} = 0{,}30$$

Teorema do Produto

- A probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos, A e B, do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Exemplo 3

- Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas, 2 peças são retiradas um após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas são sejam boas?
- A={a primeira é boa}, B={a segunda é boa}

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

Independência Estatística

- Um evento A é considerado independente de um outro evento B se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B, isto é
  - $P(A)=P(A/B)$
  - $P(B)= P(B/A)$
  - $P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$

Exemplo 4

- Sendo $\Omega=\{1,2,3,4\}$ um espaço amostral equiprovável e $A=\{1,2\}$; $B=\{1,3\}$; $C=\{1,4\}$ três eventos de S. Verificar se os eventos A, B e C são independentes.
- Solução;
  - $P(A)=1/2$; $P(B)=1/2$; $P(A\cap B)=1/4$; logo, $P(A \cap B)=1/2 \times 1/2 =1/4$.
  - $P(A)=1/2$; $P(C)=1/2$; $P(A\cap C)=1/4$; logo, $P(A \cap C)=1/2 \times 1/2 =1/4$.
  - $P(B)=1/2$; $P(C)=1/2$; $P(B\cap C)=1/4$; logo, $P(B \cap C)=1/2 \times 1/2 =1/4$.
  - $P(A)=1/2$; $P(B)=1/2$; $P(C)=1/2$; $P(A \cap B \cap C)=1/4$. Logo A, B e C não são independentes

Teorema de Bayes

- Sejam $A_1,...,A_n$ um conjunto de eventos mutuamente disjuntos de um espaço amostral Ω, isto é, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ..., A_n$. Seja B um evento de , então para cada i

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{P(B / A_1)P(A_1) + ... + P(B / A_n)P(A_n)}$$

Exemplo 5

- Considere uma empresa fabricante que recebe embarques de peças de dois diferentes fornecedores.
- A_1 = evento em que uma peça é do fornecedor 1 : P(A) = 0,65
- A_2 = evento em que uma peça é do fornecedor 2: P(B) = 0,35
- B = evento em que uma peça é boa
- R = evento em que uma peça é ruim
- $P(B/A_1) = 0{,}98$, $P(R/A_1) = 0{,}02$, $P(B/A_2) = 0{,}95$ $P(R/A_2) = 0{,}05$

Exemplo 5

- Dado que uma peça é ruim, qual é a probabilidade da peça ser do fornecedor 1 e qual é a probabilidade da peça ser do fornecedor 2?
- $P(A_1/R)=?$ e $P(A_2/R)=?$

Exercícios

- Um dado é viciado de tal forma que a probabilidade de sair uma certa face é proporcional ao seu valor (o valor 6 é seis vezes mais provável de sair do que o 1, por exemplo). Calcule:

  a) a probabilidade de sair 5, sabendo que saiu um número ímpar

  b) a probabilidade de tirar um número par, sabendo que foi um número maior que 3

Exercícios

- Dada a seguinte tabela, calcule a probabilidade de uma mulher ter sido escolhida, dado que ela tem menos de 25 anos.

Idade\Sexo	**Homens**	**Mulheres**	**Total**
Idade < 25	2000	800	2800
25 =< Idade < 40	4500	2500	7000
Idade => 40	1800	4200	6000
Total	8300	7500	15800

Exercícios

- Verifique se os eventos A e I são independentes, dada a tabela de probabilidade de eventos.

	I	**Ī**	**Total**
A	0,04	0,06	0,10
Ā	0,08	0,82	0,90
Total	0,12	0,88	1,00