Probabilidade

Definição de Probabilidade

Principais Teoremas

Probabilidades dos Espaços Amostrais

Espaços Amostrais Equiprováveis

Renata Souza

Centro de Informática UFPE

Probabilidade

- É um conceito matemático que permite a quantificação da incerteza. É aquilo que torna possível se lidar de forma racional com problemas envolvendo o imprevisível (aleatoriedade).

- Principais definições:
    - 1 - Clássico;
    - 2 – Frequentista;
    - 3 – Subjetivo;
    - 4 – Formal.

Introdução

- 1 - Conceito Clássico
  - Se uma experiência tem N resultados possíveis e igualmente prováveis e n_A é o número de resultados de um evento A então a probabilidade de A é $$P(A) = \frac{n_A}{N}$$
  - Exemplos:
    - Lançamento de um dado. Seja A o evento que registra a saída par.

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

    - Lançamento de uma moeda. Seja A o evento que registra coroa

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Centro de Informática UFPE

Introdução

- 2 – Conceito Frequentista
  - Se em N realizações de um experimento, o evento A ocorre n_A vezes, então a freqüência relativa de A nas N realizações é

$$F_A = \frac{n_A}{N}$$

e a probabilidade é

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

  - Exemplo: Uma experiência que consiste em observar o sexo de um recém-nascido. Tal experiência já se realizou diversas vezes e existem registros do seu resultado.

Ω = {masculino, feminino}
P(masculino)=0,52 e P(feminino)=0,48

Usando a definição clássica, temos:
P(masculino)=0,50 e P(feminino)=0,50

Introdução

- 3 – Conceito subjetivo
  - A probabilidade é dada por um grau de crença ou de confiança que cada pessoa dá a realização de um evento.
  - Exemplo: O ministro afirma que a inflação para o próximo ano será de 3% com uma probabilidade de 90%.

4 - Definição Formal de Probabilidade

- Dado um experimento aleatório E e um evento A do espaço amostral Ω. A probabilidade de A P(A) é uma função que associa um evento um número real, satisfazendo os seguintes axiomas:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Sendo A e B dois eventos mutuamente exclusivos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, tem-se que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Centro de Informática UFPE

Probabilidade de um evento

- Indica a chance de um determinado evento ocorrer dentre todos os eventos possíveis (espaço amostral);

- Exemplo:
  - Considere um experimento de seleção de cartas de um baralho. Cada carta tem a probabilidade 1/52.
    - A: a carta selecionada é um AS
    - P(A) = 1/52+1/52+1/52+1/52=4/52

Principais Teoremas

- 1. Se ϕ é o conjunto vazio então $P(\phi)=0$

- Demonstração:
  - Seja A um evento qualquer. Considerando que $A \cap \phi = \phi$ temos que $P(A \cup \phi)=P(A)+P(\phi)$ (Axioma 3)
  - Como $A \cup \phi = A$ então, $P(A) = P(A) + P(\phi)$. Logo $P(\phi)=0$

Principais Teoremas

- 2. Se A_c é o complemento do evento A, então $P(A_c) = 1 - P(A)$.

- Demonstração:
  - Considere que $\Omega = A \cup A_c$ e $A \cap A_c = \phi$. Então $P(A \cup A_c) = P(A) + P(A_c)$.
  - Assim, $P(\Omega) = P(A \cup A_c) = P(A) + P(A_c)$;
  - $1 = P(A) + P(A_c)$.
  - $P(A_c) = 1 - P(A)$.

Exemplo Teorema 2

- Exemplo:
  - Um agente de compras declara que há uma probabilidade de 0,90 de que um fornecedor enviará uma carga livre de peças defeituosas.
  - Usando o complemento podemos afirmar que há uma probabilidade de 1-0,90 = 0,10 de que a carga conterá peças defeituosas.

Principais Teoremas

- 3. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

- Demonstração:
  - Considere $B = A \cup (A_c \cap B)$. Ora A e $A_c \cap B$ são mutuamente exclusivos.
  - Logo, $P(B) = P(A) + P(A_c \cap B)$.
  - $P(A_c \cap B) = P(B) - P(A)$.
  - Como $P(B) - P(A) \geq 0$ por axioma 1.
  - $P(A) \leq P(B)$.

Exemplo Teorema 3

- Exemplo:
  - Jogar um dado e observar o resultado. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
    - Sejam os eventos A={a face é potência de 2} B={a face é par}.
    - Então, $A=\{2,4\}$ e $B=\{2,4,6\}$ e $P(A)=2/6$ e $P(B)=3/6$

Principais Teoremas

- 4. Teorema da Soma (Lei da Adição)
  - É útil quando temos dois eventos e estamos interessados em conhecer a probabilidade de pelo menos um deles ocorra.
  - Dados dois eventos A e B, estamos interessados em conhecer a probabilidade de que o evento A ou evento B ocorra, ou ambos ocorram:
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - Demonstração:
    - a) Se A e B são mutuamente exclusivos
      - $P(A \cap B) = 0$.
      - Recai-se axioma 3

Principais Teoremas

- b) Se $A \cap B \neq \phi$.
  - A e $(A_c \cap B)$ são mutuamente exclusivos
  - Pelo Axioma 2, $P(A \cup A_c \cap B) = P(A \cup B) = P(A) + P(A_c \cap B)$ (i);
  - Considerando que B é a união dos eventos mutuamente exclusivos $(B \cap A)$ e $(B \cap A_c)$.
    Logo, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A_c)$;
    $P(B \cap A_c) = P(B) - P(B \cap A)$ (ii)
  - Substituindo (ii) em (i), $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Centro de Informática UFPE

Exemplo Teorema 4

- Considere uma fábrica com 50 empregados. Um empregado não tem êxito em satisfazer os padrões de desempenho, se completa o trabalho mais tarde e/ou monta produtos com defeito.

- Foi observado que 5 dos 50 tinham completado o trabalho mais tarde, 6 dos 50 trabalhadores tinham montado peças defeituosas e 2 dos 50 tinham tanto completado mais tarde como montado produtos defeituosos.

Centro de Informática UFPE

Exemplo Teorema 4

A – o evento que o trabalho termina mais tarde
B – o evento que o produto montado é defeituoso.

$P(A) = 5/50 = 0,10$
$P(B) = 6/50 = 0,12$
$P(A \cap B) = 2/50 = 0,04$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,10 + 0,12 - 0,04 = 0,18$

$A \cup B$ significa a probabilidade de um trabalhador terminar mais tarde ou montar produtos defeituosos.

Probabilidades dos Espaços Amostrais

- Seja $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Considera-se cada evento formado por um resultado simples $A=\{a_i\}$.

- Cada evento simples $\{a_i\}$ associa-se um número p_i denominado probabilidade de $\{a_i\}$ satisfazendo as seguintes condições:
  a. $p_i \geq 0$ $i=1,2,\ldots,n$
  b. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Exemplo

- Três cavalos A, B e C, estão em uma corrida; A: tem duas vezes mais probabilidades de ganhar que B, e B tem duas vezes mais probabilidade de ganhar que C. Quais são as probabilidades de vitória de cada um, isto é, P(A), P(B) e P(C)?

Solução

- Considerando $P(C) = p$ então $P(B) = 2p$ e $P(A) = 2\,P(B) = 4p$. Como a soma das probabilidades é 1, então:

$$p+2p+4p=1 \quad \text{ou } 7p= 1 \quad \text{ou } p=1/7$$

Logo, temos:

- $P(A)=4/7$;
- $P(B)=2/7$;
- $P(C)=1/7$.

Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

- Quando se associa a cada ponto amostral a mesma probabilidade, o espaço amostral chama-se equiprovável ou uniforme.
- Se Ω contém *n* pontos, então a probabilidade de cada ponto será 1/n
- Se um evento A contém r pontos, então:

$$P(A) = r\left(\frac{1}{n}\right)$$

- Este método de avaliar P(A) é enunciado da seguinte maneira.

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de vezes em que o evento A pode ocorrer}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de vezes em que o espaço amostral } \Omega \text{ ocorre}}$$

ou

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis a A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ total de casos de } \Omega}$$

Exemplo

- Escolha aleatoriamente (indica que o espaço é equiprovável) uma carta de um baralho com 52 cartas. Seja o evento A: a carta é de ouros. Calcular P(A).

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de ouros}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de cartas}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Problema de Contagem

- Combinação de r elementos tomados (combinados) p a p. Calcula-se por:

$$C_{r,p} = \binom{r}{p} = \frac{r!}{p!(r-p)!}$$

Exemplo

- Num lote de 12 peças, 4 peças são defeituosas; duas peças são retiradas aleatoriamente. Calcule
- a) A probabilidade de ambas serem defeituosas. Seja A = ambas são defeituosas.
  - A pode ocorrer $\binom{4}{2} = 6$
  - Ω pode ocorrer $\binom{12}{2} = 66$
  - Logo, $P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

Exemplo

- b) A probabilidade de ambas não serem defeituosas. Seja B = ambas não serem defeituosas.
  - B pode ocorrer $\binom{8}{2} = 28$
  - Ω pode ocorrer $\binom{12}{2} = 66$
  - Logo, $P(B) = \dfrac{28}{66} = \dfrac{14}{33}$

Centro de Informática UFPE

Exemplo

- c) A probabilidade de ao menos uma ser defeituosa.Seja C = ao menos uma defeituosa. C é o complemento de B, C = B_c
  - Logo,

$$P(C) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

Exercícios

1) A, B e C são eventos de um espaço amostral. $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(C) = 5/6$, $P(A \cap B) = 1/6$, $P(A \cap C) = 2/6$ e $P(B \cap C) = 1/6$. Calcule $P(A \cup B \cup C)$. Deduza uma fórmula para achar a probabilidade P de n eventos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de forma que $P = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$.

Exercícios

2) Um grupo de 55 elementos apresenta a seguinte composição:

	Homem	Mulher
menor	15	13
adulto	15	12

Um elemento é escolhido ao acaso, responda:

a) Qual a probabilidade de ser homem?
b) Qual a probabilidade de ser adulto?
c) Qual a probabilidade de ser menor e mulher?
d) Qual a probabilidade de ser homem ou adulto?
e) Qual a probabilidade de não ser homem e nem adulto?
f) Qual a probabilidade de ser homem e não ser adulto?