

Estatística para Cursos de Engenharia e Informática

Pedro Alberto Barbetta / Marcelo Menezes Reis / Antonio Cezar Bornia
São Paulo: Atlas, 2004

Cap. 4 - Probabilidade

APOIO:

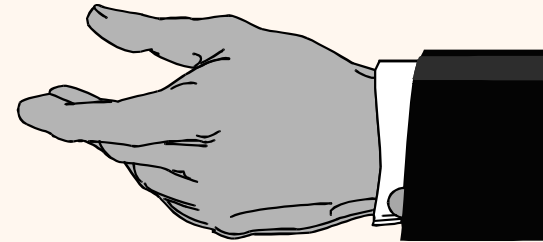
Fundação de Apoio à Pesquisa Científica e Tecnológica do Estado de Santa Catarina (FAPESC)

Departamento de Informática e Estatística – UFSC (INE/CTC/UFSC)

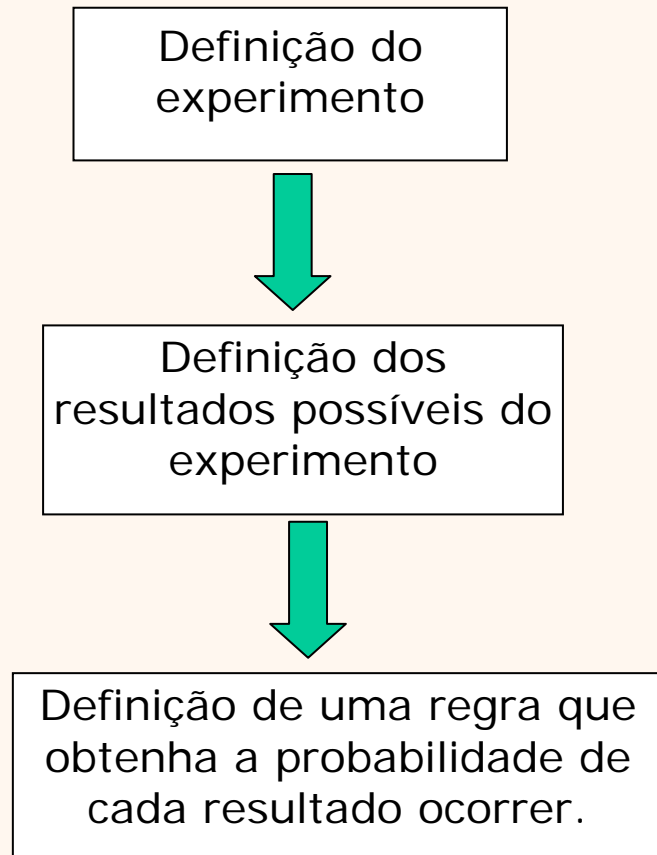
BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Modelos probabilísticos

- Construção de modelos de probabilidade para entender melhor os fenômenos aleatórios



Modelos probabilísticos



Espaço amostral

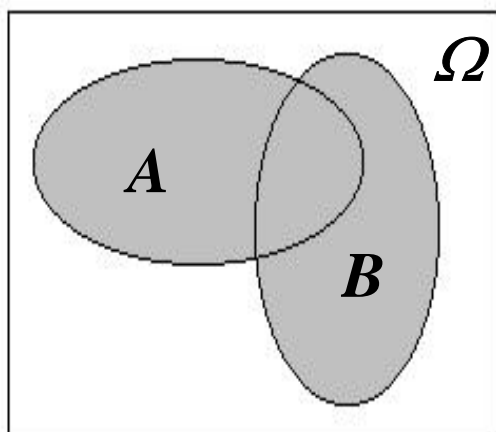
- O conjunto de *todos* os possíveis resultados do experimento é chamado de **espaço amostral** e é denotado pela letra grega Ω .
- Um espaço amostral é dito **discreto** quando ele for finito ou infinito enumerável; é dito **contínuo** quando for infinito, formado por intervalos de números reais.

Eventos

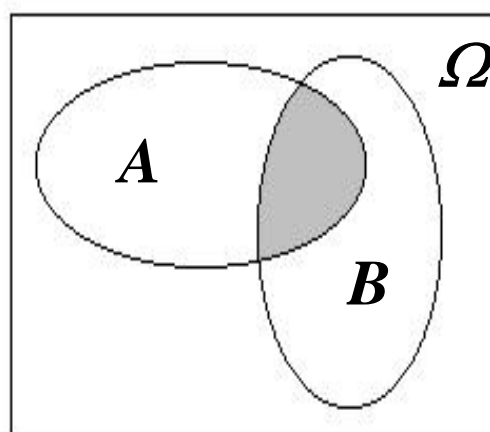
- Chamamos de **evento** a qualquer subconjunto do espaço amostral:
- A é um evento $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$

Operações entre eventos

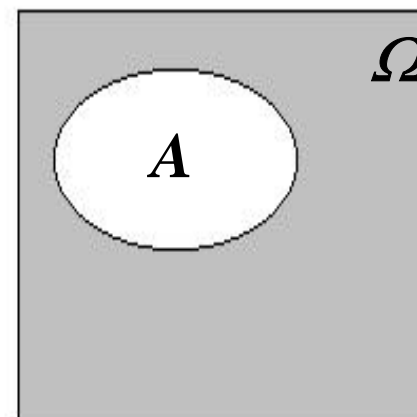
(a) União:
 $A \cup B$



(b) interseção:
 $A \cap B$



(c) complementar:
 \bar{A}

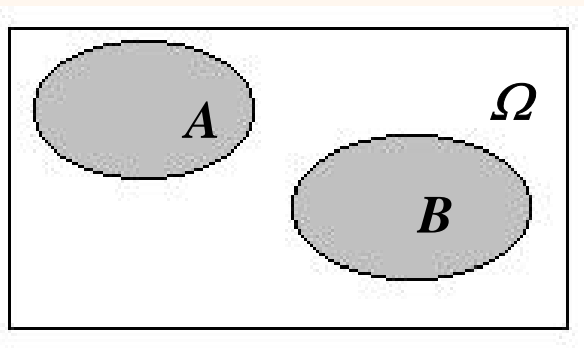


Operações entre eventos

Operação	Conjunto	Evento
a) União $A \cup B$	reúne os elementos de ambos os conjuntos	ocorre quando ocorrer pelo menos um deles (A , B ou ambos)
b) Interseção $A \cap B$	formado somente pelos elementos que estão em A e B	ocorre quando ocorrer ambos os eventos (A e B)
c) Complementar \bar{A}	formado pelos elementos que não estão em A	ocorre quando não ocorrer o evento A (<i>não</i> A)

Eventos mutuamente exclusivos

- Eventos são ditos **mutuamente exclusivos** se e só se eles não puderem ocorrer simultaneamente.
- A e B são *mutuamente exclusivos* $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$



Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos equiprováveis

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- sendo:
 - n resultados *igualmente prováveis*,
 - n_A destes resultados pertencem a um certo evento A

Probabilidade de eventos

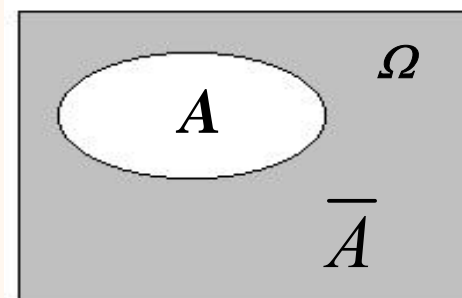
- Espaços amostrais discretos
- Se $A \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$, então:

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\omega_i)$$

Propriedades

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Probabilidade do evento complementar

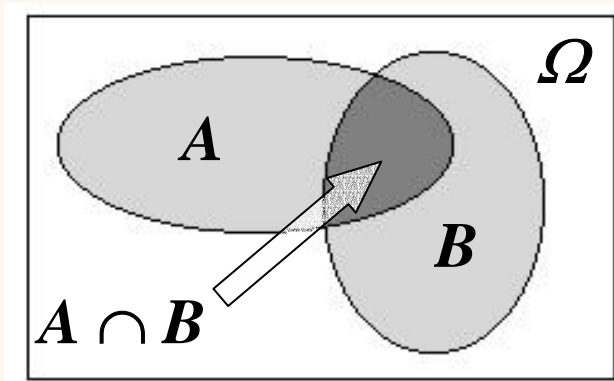
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Propriedades

- Regra da soma das probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Se A e B mutuamente exclusivos,
então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade condicional. Ex. de motivação

Condição do peso	Tipo do leite			
	B (<i>B</i>)	C (<i>C</i>)	UHT (<i>U</i>)	Total
dentro das especificações (<i>D</i>)	500	4500	1500	6500
fora das especificações (<i>F</i>)	30	270	50	350
Total	530	4770	1550	6850

$$P(F) = \frac{350}{6850} = 0,051$$

$$P(F | U) = \frac{50}{1550} = 0,032$$

Notar que:

$$P(F | U) = \frac{50}{1550} = \frac{50/6850}{1550/6850} = \frac{P(F \cap U)}{P(U)}$$

Probabilidade condicional

- Sejam A e B eventos quaisquer, sendo $P(B) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade condicional. Exemplo

- Seja o lançamento de 2 dados não viciados e a observação das faces voltadas para cima. Calcule a probabilidade de ocorrer faces iguais, sabendo-se que a soma é menor ou igual a 5.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6) \end{array} \right\}$$

$E_1 = \text{faces iguais} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
e

$E_2 = \text{soma das faces é menor ou igual a 5} =$
 $= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$

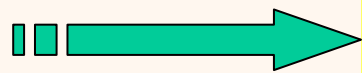
Probabilidade condicional. Exemplo

	E_2						
	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	
	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	E_1

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Regra do produto

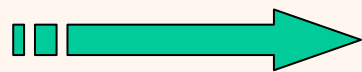
$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

ou

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



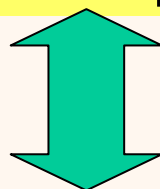
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Eventos independentes

- Dois ou mais eventos são **independentes** quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade da ocorrência dos outros. Nesse caso:

$$P(A | B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B | A) = P(B)$$

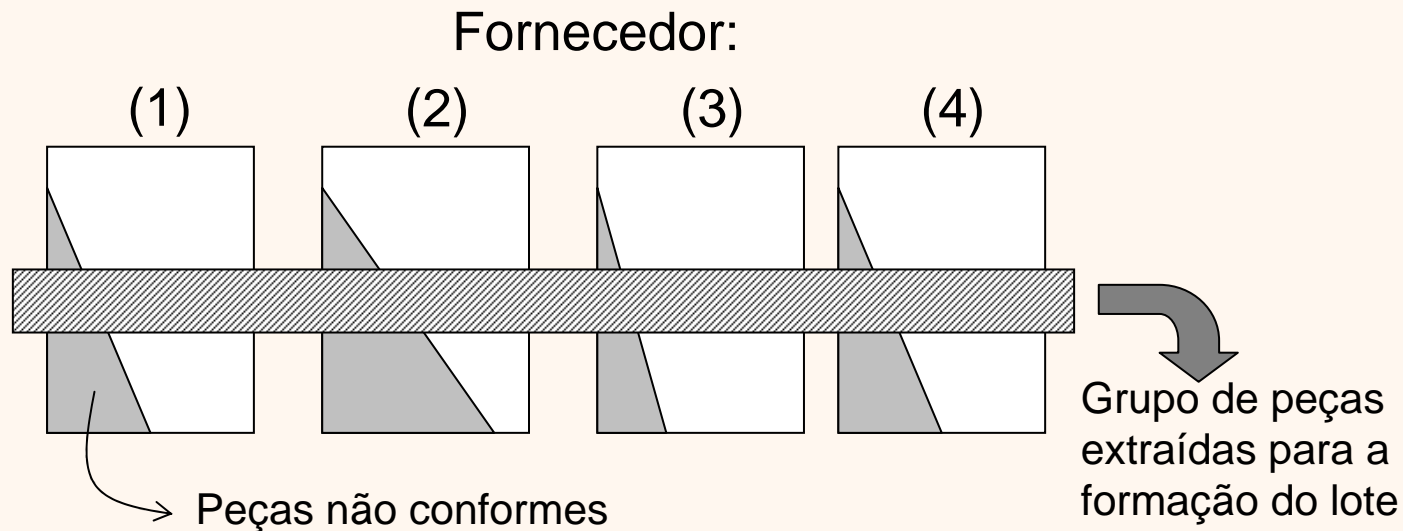
A e B são independentes



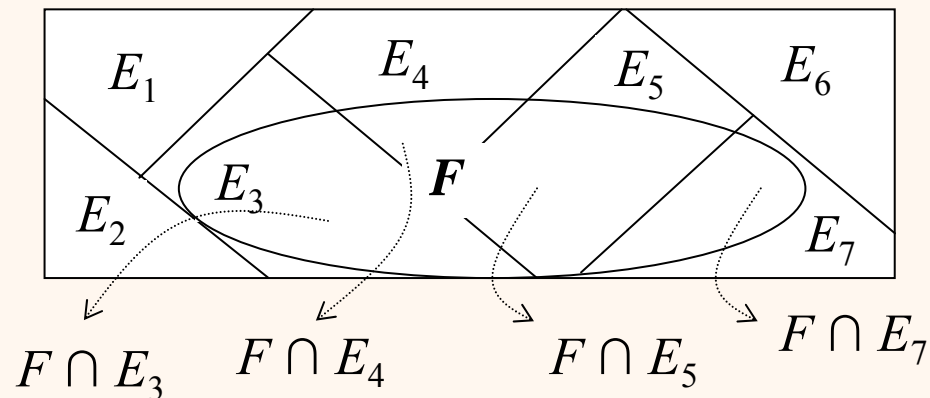
$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Teorema da probabilidade total

- Ilustração da formação de um lote de peças provindas de 4 fornecedores

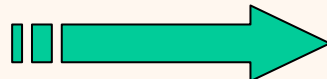


Teorema da probabilidade total

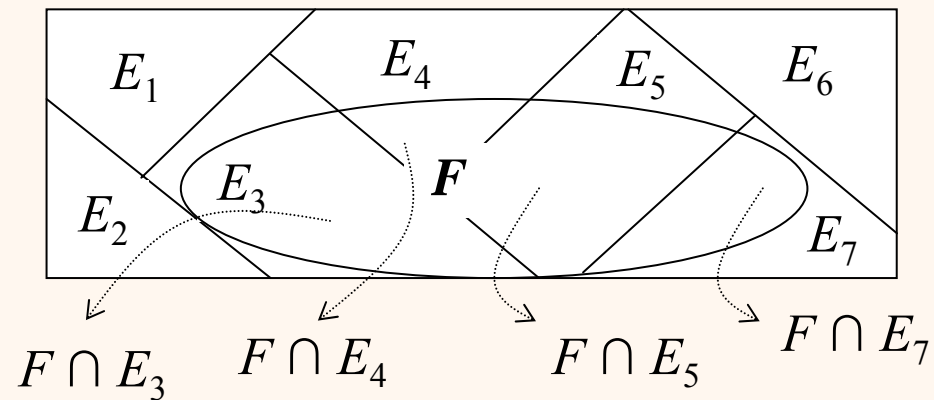


$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \dots \cup (F \cap E_k)$$

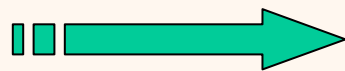
$$\begin{aligned} P(F) &= P[(F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \dots \cup (F \cap E_k)] = \\ &= P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \dots + P(F \cap E_k) \end{aligned}$$


$$P(F) = \sum_{i=1}^k P(E_i) \cdot P(F | E_i)$$

Teorema de Bayes



$$P(E_i | F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)}$$



$$P(E_i | F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F | E_i)}{P(F)}$$