10

Inferência Estatística Para Duas Amostras

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Depois de um cuidadoso estudo deste capítulo, você deve ser capaz de:

1. Estruturar, como testes de hipóteses, experimentos comparativos envolvendo duas amostras
2. Testar hipóteses e construir intervalos de confiança para a diferença de médias de duas distribuições normais
3. Testar hipóteses e construir intervalos de confiança para a razão de variâncias ou desvios-padrão de duas distribuições normais
4. Testar hipóteses e construir intervalos de confiança para a diferença de proporções de duas populações
5. Usar a abordagem do valor P para tomar decisões em testes de hipóteses
6. Calcular potência, a probabilidade de erro tipo II e tomar decisões em relação a tamanhos de amostra para testes de médias, variâncias e proporções considerando duas amostras
7. Explicar e usar relação entre intervalos de confiança e testes de hipóteses

10-1 Introdução

Os dois capítulos anteriores apresentaram testes de hipóteses e intervalos de confiança para o parâmetro de uma única população (a média μ, a variância σ ou uma proporção p). Este capítulo estende aqueles resultados para o caso de duas populações independentes.

A situação geral é mostrada na Fig. 10-1. A população 1 tem a média μ_1 e variância $\sigma^2{}_1$, enquanto a população 2 tem média μ_2 e variância $\sigma^2{}_2$. Inferências serão baseadas em duas amostras aleatórias de tamanhos n_1 e n_2, respectivamente. Ou seja X_{11}, X_{12}, p, X_{1n1} é uma amostra aleatória de n_1 observações provenientes da população 1 e X_{21}, X_{22}, p, X_{2n2} é uma amostra aleatória de n_2 observações provenientes da população 2. A maioria das aplicações práticas dos procedimentos deste capítulo aparece no contexto de experimentos simples comparativos, em que o objetivo é estudar a diferença nos parâmetros das duas populações.

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

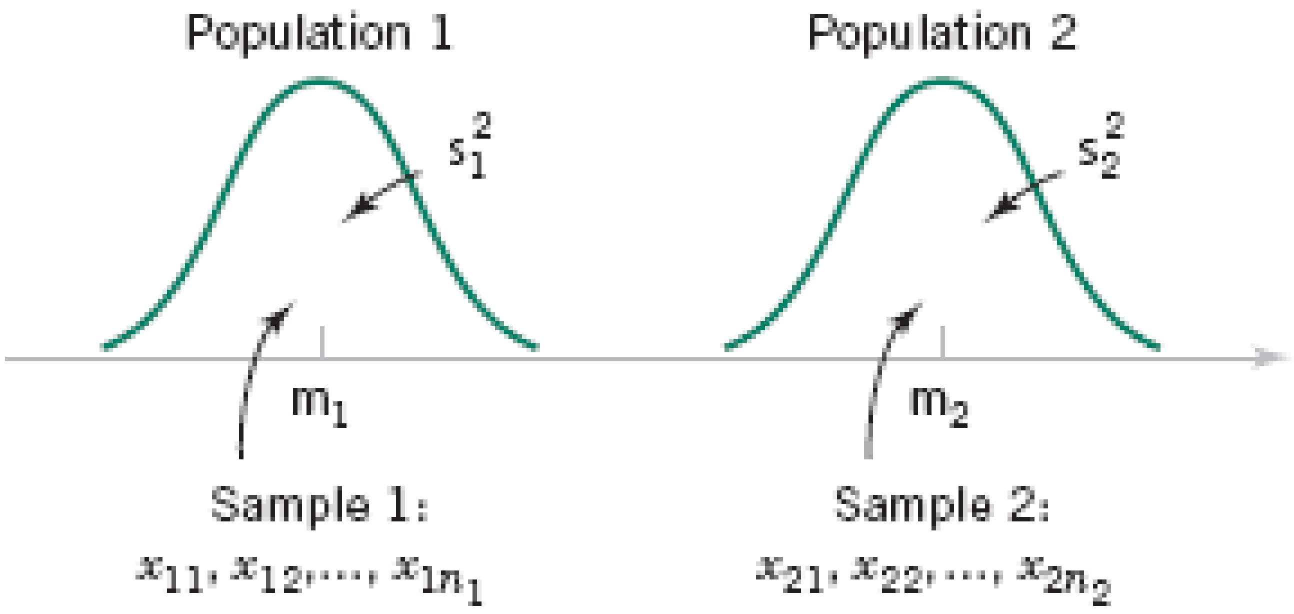

Figure 10-1 Duas populações independentes.

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Suposições

1. $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n1}$ é uma amostra aleatória proveniente da população 1
2. $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n2}$ é uma amostra aleatória proveniente da população 2
3. As duas proporções representadas por X_1 e X_2 são independentes
4. Ambas as populações são normais.

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

A grandeza

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (10\text{-}1)$$

Tem distribuição N(0,1).

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

10-2.1 Testes para a Diferença de Médias, Variâncias Conhecidas

Null hypothesis: $H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Test statistic:
$$Z_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (10\text{-}2)$$

Alternative Hypotheses	Rejection Criterion
$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z_0 > z_{\alpha/2}$ or $z_0 < -z_{\alpha/2}$
$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z_0 > z_\alpha$
$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z_0 < -z_\alpha$

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Exemplo 10-1

Um idealizador de produtos está interessado em reduzir o tempo de secagem de um zarcão. Duas formulações de tinta são testadas; a formulação 1 tem uma química-padrão e a formulação 2 tem um novo ingrediente para secagem, que deve reduzir o tempo de secagem. Da experiência sabe-se que o desvio-padrão do tempo de secagem é igual a 8 minutos e essa variabilidade inerente não deve ser afetada pela adição do novo ingrediente. Dez espécimes são pintados com a formulação 1 e outros dez espécimes são pintados com a formulação 2. Os 20 espécimes são pintados em uma ordem aleatória. Os tempos médios de secagem das duas amostras são $\bar{x}_1 = 121$ min e $\bar{x}_2 = 112$ min, respectivamente. Quais as conclusões que o idealizador de produtos pode retirar sobre a eficiência do novo ingrediente, usando $\alpha = 0{,}05$?

Aplicamos o procedimento das oito etapas para resolver esse problema, conforme mostrado a seguir:

1.A grandeza de interesse é a diferença nos tempos médios de secagem, $\mu_1 - \mu_2 = 0$ e $\Delta_0=0$
2.H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H0: $\mu_1 = \mu_2$
3.H_1: $\mu_1 > \mu_2$. Queremos rejeitar H_0 se o novo ingrediente reduzir o tempo médio de secagem.
4.$\alpha = 0.05$

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Exemplo 10-1

5. A estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Onde $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = (8)^2 = 64$ e $n_1 = n_2 = 10$

6. Rejeitar $H_0: \mu_1 = \mu_2$, se $z_0 > 1{,}645 = z_{0,05}$
7. Cálculos: uma vez que $\bar{x}_1 = 121$min e $\bar{x}_2 = 112$min, a estatística de teste é:

$$z_0 = \frac{121 - 112}{\sqrt{\dfrac{(8)^2}{10} + \dfrac{(8)^2}{10}}} = 2.52$$

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Exemplo 10-1

8. Conclusão: Já que $z_0 = 2{,}52 > 1{,}645$, rejeitamos $H_0: \mu_1 - \mu_2$, com $\alpha = 0{,}05$ e concluímos que a adição do novo ingrediente à tinta reduz significativamente o tempo de secagem. Alternativamente, podemos encontrar o valor P para esse teste como

$$P\text{-value} = 1 - \Phi(2.52) = 0.0059$$

Conseqüentemente, $H_0: \mu_1 = \mu_2$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}0059$

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Exemplo 10-3

Para ilustrar o uso dessas equações de tamanho de amostra, considere a situação descrita no Exemplo 10-1 e suponha que se a diferença verdadeira dos tempos de secagem for tão grande quanto 10 minutos, queremos detectar isso com uma probabilidade de no mínimo 0.90. Sujeito à hipótese nula, $\Delta_0 = 0$. Temos uma hipótese alternativa unilateral com $\Delta=10$, $\alpha=0.05$ (assim, $z_\alpha=z_{0,05}=1.645$) e, desde que a potência seja 0.9, $\beta=0.10$ (assim $z_\beta = z_{0,10} = 1,28$). Logo podemos encontrar o tamanho requerido da amostra, a partir da Equação 10-6, como segue

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\Delta - \Delta_0)^2} = \frac{(1.645 + 1.28)^2[(8)^2 + (8)^2]}{(10 - 0)^2} = 11$$

Esse é exatamente o mesmo resultado obtido quando usamos as curvas CO.

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

10-2.3 Intervalo de Confiança para a Diferença de Médias, Variâncias Conhecidas

Definição

Se $\bar{x}_1$ - $\bar{x}_2$, forem médias de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2, provenientes de populações com variâncias conhecidas σ^2_1 e σ^2_2, respectivamente, então um intervalo de confiança 100(1-α)% para μ_1-μ_2 é

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (10\text{-}7)$$

Sendo $z_{\alpha/2}$ o ponto percentual superior α/2 da distribuição normal padrão.

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Exemplo 10-4

Testes de resistência à tensão foram feitos em dois tipos diferentes de estruturas de alumínio. Essas estruturas foram usadas na fabricação das asas de um avião comercial. De experiências passadas com o processo de fabricação dessas estruturas e com o procedimento de testes, os desvios-padrão das resistências à tensão são considerados conhecidos. Os dados obtidos são os seguintes: $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 87.6$, $\sigma_1=1$, $n_2=12$, $\bar{x}_2=74,5$, $\sigma_2=1,5$. Se μ_1 e μ_2 denotarem as resistências médias verdadeiras à tensão para os dois tipos da estrutura, então podemos achar um intervalo de confiança de 90% para a diferença na resistência média $\mu_1-\mu_2$, conforme a seguir

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$87.6 - 74.5 - 1.645\sqrt{\frac{(1)^2}{10} + \frac{(1.5)^3}{12}} \le \mu_1 - \mu_2 \le 87.6 - 74.5 + 1.645\sqrt{\frac{(1^2)}{10} + \frac{(1.5)^2}{12}}$$

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Exemplo 10-4

Desse modo, o intervalo de confiança de 90% para a diferença na resistência média à tensão (em quilogramas por milímetro quadrado) é

$$12.22 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 13.98 \text{ (in kilograms per square millimeter)}$$

Note que o intervalo de confiança não inclui o zero, implicando que a resistência média da estrutura 1 (μ_1) excede a resistência média da estrutura 2 (μ_2). De fato podemos estabelecer que estamos 90% confiantes de que a resistência média à tensão da estrutura 1 excede a resistência média à tensão da estrutura 2 por um valor entre 12,22 e 13,98 quilogramas por milímetro quadrado.

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Escolha do Tamanho da Amostra

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \qquad (10\text{-}8)$$

10-2 Inferência na Diferença de Médias de Duas Distribuições Normais, Variâncias Conhecidas

Limites Unilaterais de Confiança

Limite Unilateral Superior de Confiança

$$\mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (10\text{-}9)$$

Limite Unilateral Inferior de Confiança

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \qquad (10\text{-}10)$$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

10-3.1 Testes de Hipóteses para a Diferença de Médias, Variâncias Desconhecidas

Caso 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Desejamos Testar:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

10-3.1 Testes de Hipóteses para a Diferença de Médias, Variâncias Desconhecidas

Caso 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

O Estimador combinado de σ^2:

O Estimador combinado de σ^2, denotado por S^2_p, é definido por

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (10\text{-}12)$$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

10-3.1 Testes de Hipóteses para a Diferença de Médias, Variâncias Desconhecidas

Caso 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Dadas as suposições desta seção, a grandeza

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \qquad (10\text{-}13)$$

Tem uma distribuição *t* , com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Definição: Teste *t* Combinado*

Null hypothesis: H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Test statistic:
$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \tag{10-14}$$

Alternative Hypothesis	Rejection Criterion
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-5

Dois catalisadores estão sendo analisados para determinar como eles afetam o rendimento médio de um processo químico. Especificamente, o catalisador 1 está correntemente em uso, mas o catalisador 2 é aceitável. Uma vez que o catalisador 2 é mais barato, ele deve ser adotado, desde que ele não mude o rendimento do processo. Um teste é feito em uma planta-piloto, resultando nos dados mostrados na Tabela 10-1. Há alguma diferença entre os rendimentos médios? Use α=0.05 e considere variâncias iguais.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-5

Tabela 10-1 Dados do Rendimento dos Catalisadores, Exemplo 10-5

Observation Number	Catalyst 1	Catalyst 2
1	91.50	89.19
2	94.18	90.95
3	92.18	90.46
4	95.39	93.21
5	91.79	97.19
6	89.07	97.04
7	94.72	91.07
8	89.21	92.75
	$\bar{x}_1 = 92.255$	$\bar{x}_2 = 92.733$
	$s_1 = 2.39$	$s_2 = 2.98$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-5

A solução usando o procedimento das oito etapas para o teste de hipóteses é dada a seguir:

1. Os parâmetros de interesse são μ_1 e μ_2, o rendimento médio do processo usando os catalisadores 1 e 2, respectivamente. Queremos saber se $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
2. $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ou $H_0: \mu_1 = \mu_2$
3. $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
4. $\alpha = 0.05$
5. A estatística de teste é

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

6. Rejeitar H_0 se $t_0 > t_{0.025;14} = 2.145$ ou se $t_0 < -t_{0.025;14} = -2.145$.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-5

7. Cálculos: da Tabela 10-1, temos $\bar{x}_1$=92.255, s_1 = 2.39, n_1 = 8, $\bar{x}_2$ = 92,733, s_2 = 2.98, n_2 = 8. Conseqüentemente

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(7)(2.39)^2 + 7(2.98)^2}{8 + 8 - 2} = 7.30$$

$$s_p = \sqrt{7.30} = 2.70$$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2.70\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{92.255 - 92.733}{2.70\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} = -0.35$$

8. Conclusões: já que -2.145< t_0 = -0,35 < 2.145, a hipótese nula não pode ser rejeitada. Ou seja, no nível de significância de 0.05, não temos evidência forte para concluir que o catalisador 2 resulta em um rendimento médio que difere do rendimento médio quando o catalisador 1 é usado.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Saída do Minitab para o Exemplo 10-5

Minitab Computations

Two-Sample T-Test and CI: Cat 1, Cat 2

Two-sample T for Cat 1 vs Cat 2

	N	Mean	StDev	SE Mean
Cat 1	8	92.26	2.39	0.84
Cat 2	8	92.73	2.99	1.1

Difference = mu Cat 1 − mu Cat 2

Estimate for difference: −0.48

95% CI for difference: (−3.37, 2.42)

T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = −0.35 P-Value = 0.730 DF = 14

Both use Pooled StDev = 2.70

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

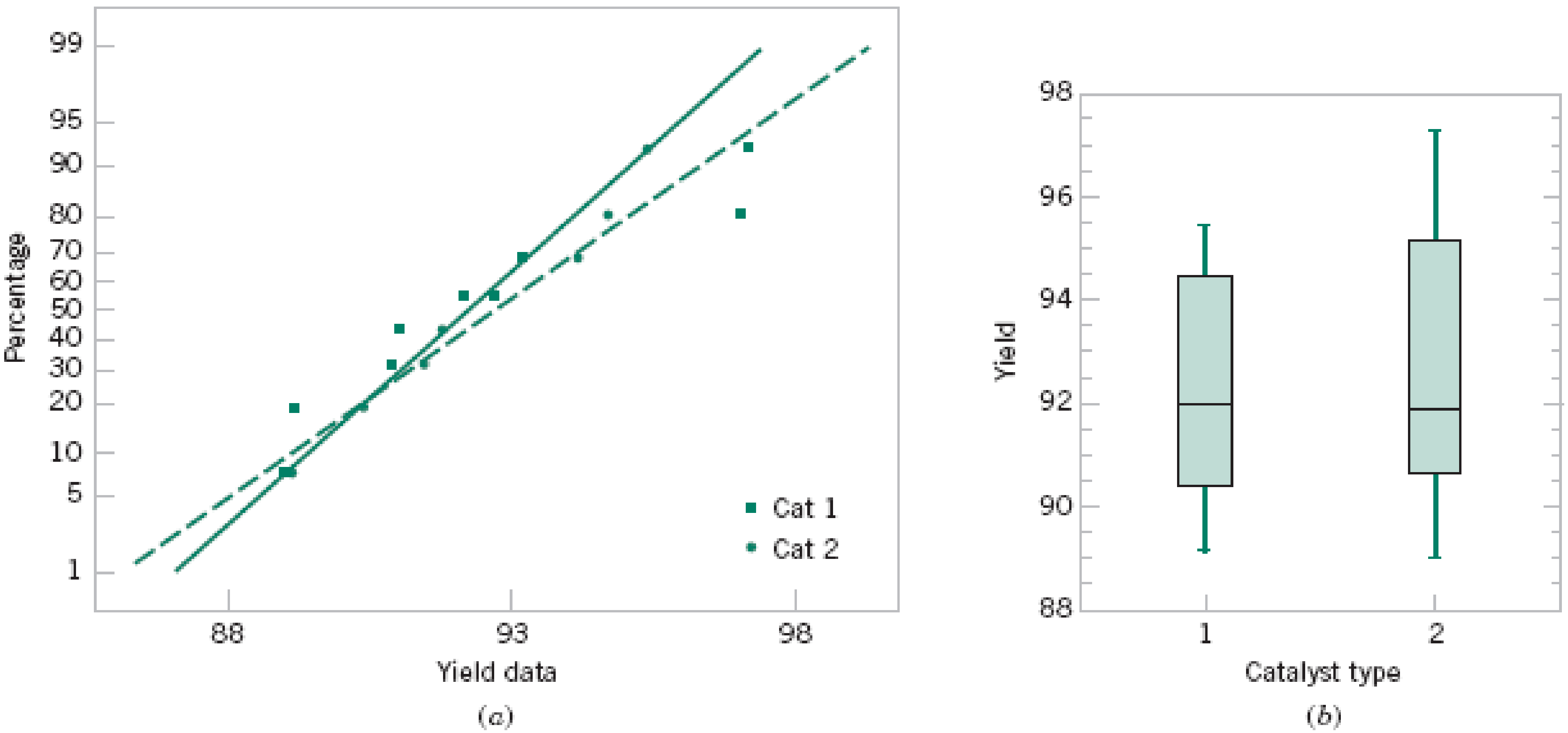

Figure 10-2 Gráfico de probabilidade normal e diagrama de caixa comparativos para os dados de rendimento do catalisador do Exemplo 10-5.(a)Gráfico de Probabilidade Normal,(b)Box plot.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

10-3.1 Testes de Hipóteses para a Diferença de Médias, Variâncias Desconhecidas

Caso 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$T_0^* = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \tag{10-15}$$

será distribuída normalmente como *t* com graus de liberdade dados por mínimo entre n_1-1 e n_2 -1 ou

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

10-3.1 Testes de Hipóteses para a Diferença de Médias, Variâncias Desconhecidas

Caso 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$v = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \tag{10-16}$$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-6

A concentração de arsênio em suprimentos públicos de água potável é um risco potencial à saúde. Um artigo no jornal *Arizona Republic* (Domingo, 27 de maio de 2001) reportou as concentrações, em partes por bilhão (ppb), de arsênio em água potável para 10 comunidades metropolitanas de Fênix e 10 comunidades rurais do Arizona. Eis os dados:

Metro Phoenix ($\bar{x}_1 = 12.5, s_1 = 7.63$)	Rural Arizona ($\bar{x}_2 = 27.5, s_2 = 15.3$)
Phoenix, 3	Rimrock, 48
Chandler, 7	Goodyear, 44
Gilbert, 25	New River, 40
Glendale, 10	Apachie Junction, 38
Mesa, 15	Buckeye, 33
Paradise Valley, 6	Nogales, 21
Peoria, 12	Black Canyon City, 20
Scottsdale, 25	Sedona, 12
Tempe, 15	Payson, 1
Sun City, 7	Casa Grande, 18

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-6 (Continuação)

Desejamos determinar se há alguma diferença nas concentrações médias de arsênio entre as comunidades metropolitanas de Fênix e as comunidades rurais do Arizona. A Fig 10.3 mostra uma gráfico de probabilidade normal para as duas amostras de concentração de arsênio. A suposição de normalidade parece bem razoável, porém uma vez que as inclinações das duas linhas retas são muito diferentes, é improvável que as variâncias das populações sejam as mesmas.

Aplicando o procedimento das oito etapas temos:

1. Os parâmetros de interesse são as concentrações médias de arsênio para as duas regiões geográficas, μ_1 e μ_2. Estamos interessados em sabe se $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$
3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
4. $\alpha = 0.05$ (digamos)

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-6 (Continuação)

5. A estatística do teste é:

$$t_0^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

6. Os graus de liberdade t_0^* são encontrados a partir da equação 10-16 como

$$v = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left[\dfrac{(7.63)^2}{10} + \dfrac{(15.3)^2}{10}\right]^2}{\dfrac{[(7.63)^2/10]^2}{9} + \dfrac{[(15.3)^2/10]^2}{9}} = 13.2 \simeq 13$$

Logo, usando $\alpha = 0.05$, rejeitaremos H_0: $\mu_1 = \mu_2$ se $t_0^* > t_{0.025;13} = 2.160$ ou se $t_0^* < -t_{0.025;13} = -2.160$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-6 (Continuação)

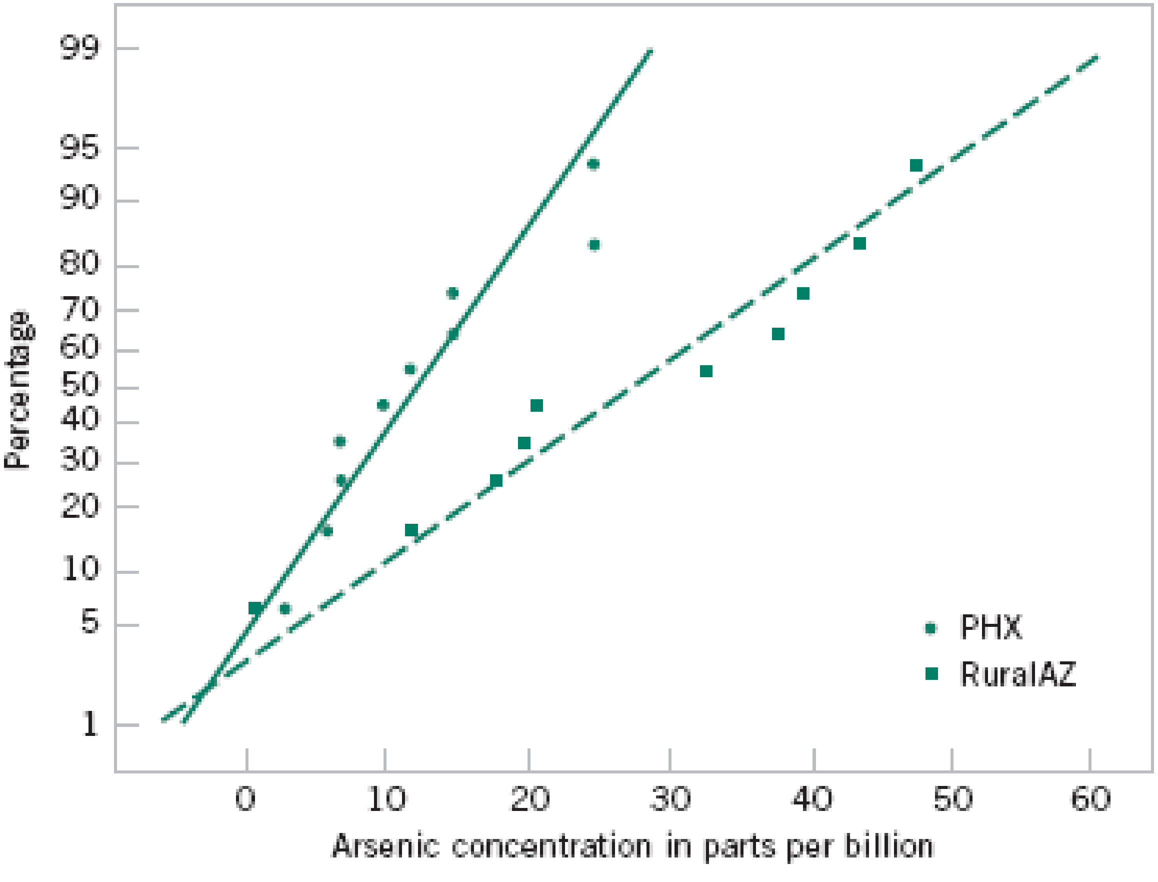

Figure 10-3 Gráfico de probabilidade normal dos dados de concentração de arsênio do Exemplo 10-6.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Exemplo 10-6 (Continuação)

7. Cálculos: usando os dados amostrais, temos

$$t_0^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{12.5 - 27.5}{\sqrt{\frac{(7.63)^2}{10} + \frac{(15.3)^2}{10}}} = -2.77$$

8. Conclusões: já que $t_0^* = -2.77 < t_{0.025;13} = -2.160$, rejeitamos a hipótese nula. Logo, há evidência para concluir que a concentração média de arsênio na água potável na zona rural do Arizona é diferente da concentração média de arsênio na água potável da área metropolitana de Fênix. Além disso, a concentração média de arsênio é maior nas comunidades rurais do Arizona. O valor P para este teste é aproximadamente P = 0.016 .

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

10-3.3 Intervalo de Confiança para a Diferença de Médias, Variâncias Desconhecidas

Caso 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Se $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s21 e s22 forem médias e as variâncias amostrais de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2, respectivamente, provenientes de populações normais independentes, com variâncias desconhecidas, porém iguais, então um intervalo de confiança 100(1-α)% para diferença de média μ_1-μ_2 é:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \qquad (10\text{-}19)$$

Em que $s_p = \sqrt{[(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2]/(n_1 + n_2 - 2)}$ é a estimativa combinada do desvio-padrão comum da população e $t_{\alpha/2,n1+n2+2}$ é o ponto percentual superior α/2 da distribuição *t* , com $n_1 + n_2 + 2$ graus de liberdade.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Case 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Exemplo 10-8

Um artigo no jornal *Hazardous Waste and Hazardous Materials (Vol.6,1989)* reportou os resultados de uma análise do peso de cálcio em cimento-padrão e em cimento contendo chumbo. Níveis reduzidos de cálcio indicariam que o mecanismo de hidratação no cimento estaria bloqueado, permitindo à água atacar várias localizações na estrutura do cimento. Dez amostras de cimento-padrão tiveram um teor médio percentual em peso de cálcio de $\bar{x}_1 = 90.0$, com um desvio-padrão amostral de $s_1 = 5$ enquanto 15 amostras do cimento com chumbo tiveram um teor médio percentual em peso de cálcio de $\bar{x}_2=87.0$, com um desvio-padrão amostral de $s_2 = 4.0$.

Consideraremos que o teor percentual em peso de cálcio seja normalmente distribuído e encontraremos 95% para a diferença de médias, $\mu_1 - \mu_2$, para os dois tipos de cimento. Além disso, consideraremos que ambas as populações tenham o mesmo desvio-padrão.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Case 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Exemplo 10-8 (Continuação)

A estimativa combinada do desvio-padrão comum é encontrada usando a Equação 10-12, conforme segue:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{9(5.0)^2 + 14(4.0)^2}{10 + 15 - 2}$$

$$= 19.52$$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Case 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Exemplo 10-8 (Continuação)

Por conseguinte, a estimativa combinada do desvio-padrão comum é $s_p = \sqrt{19.52} = 4.4$. O intervalo de confiança de 95% é encontrado usando a Equação 10-19:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{0.025,23}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{0.025,23}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Ou substituindo os valores das amostras e usanto $t_{0.025;23} = 2{,}069$

$$90.0 - 87.0 - 2.069(4.4)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} \le \mu_1 - \mu_2$$

$$\le 90.0 - 87.0 + 2.069(4.4)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}$$

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

Case 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Exemplo 10-8 (Continuação)

Que reduz para

$$-0.72 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 6.72$$

Note que o intervalo de confiança de 95% inclui o zero; assim, nesse nível de confiança, não podemos concluir que haja uma diferença entre as médias. Dizendo de outra forma, não há evidência de que o cimento contendo chumbo tenha afetado o percentual médio em peso de cálcio; desse modo, não podemos afirmar que a presença de chumbo afete esse aspecto do mecanismo de hidratação, com um nível de 95% de confiança.

10-3 Inferência na Diferença de Média de Duas Distribuições Normais, Variâncias Desconhecidas

10-3.3 Intervalo de Confiança para a Diferença de Médias, Variâncias Desconhecidas

Se $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s21 e s22 forem médias e as variâncias de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2, respectivamente, provenientes de populações normais independentes, com variâncias desconhecidas e desiguais, então um intervalo de confiança 100(1-α)% para diferença de média μ_1-μ_2 é:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad (10\text{-}20)$$

Em que *v* é dado pela Equação 10-16 e $t_{\alpha/2,v}$ é o ponto percentual superior α/2 da distribuição *t* , com *v* graus de liberdade.

10-4 Teste *t* Emparelhado

- Um caso especial de testes t para duas amostras da Seção 10-3 ocorre quando as observações nas duas populações de interesse são são coletados em **pares**.

- Cada par de observações, como (X_{1j} , X_{2j}), é tomado sob condições homogêneas, mas essas condições podem mudar de um par para outro.

10-4 Teste *t* Emparelhado

O Teste *t* Emparelhado

Null hypothesis: H_0: $\mu_D = \Delta_0$

Test statistic: $$T_0 = \frac{\overline{D} - \Delta_0}{S_D/\sqrt{n}} \tag{10-22}$$

Alternative Hypothesis	Rejection Region
H_1: $\mu_D \neq \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$
H_1: $\mu_D > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
H_1: $\mu_D < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$

10-4 Teste *t* Emparelhado

Exemplo 10-9

Um artigo no Journal of Strain Analysis (1983, Vol 18, No.2) compara vários métodos para prever a resistência ao cisalhamento em traves planas metálicas. Dados para dois desses métodos, os procedimentos de Karlsruhe e Lehigh, quando aplicados a nove traves específicas, são mostrados na Tabela 10-2. Desejamos determinar se há qualquer diferença (na média) entre dois métodos.

Tabela 10-2 Previsões de Resistência para Nove Traves Planas de Aço (Carga Prevista/Carga Observada)

Girder	Karlsruhe Method	Lehigh Method	Difference d_j
S1/1	1.186	1.061	0.119
S2/1	1.151	0.992	0.159
S3/1	1.322	1.063	0.259
S4/1	1.339	1.062	0.277
S5/1	1.200	1.065	0.138
S2/1	1.402	1.178	0.224
S2/2	1.365	1.037	0.328
S2/3	1.537	1.086	0.451
S2/4	1.559	1.052	0.507

10-4 Teste *t* Emparelhado

Exemplo 10-9

Procedimento de oito etapas é aplicado a seguir:

1. O parâmetro de interesse é a diferença na resistência média ao cisalhamento entre os dois métodos, como $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$.
2. H_0: $\mu_d = 0$
3. H_1: $\mu_d \neq 0$
4. $\alpha = 0.05$
5. A estatística do teste é

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}}$$

6. Rejeitar H_0 se $t_0 > t_{0.025} = 2.306$ ou se $t_0 < -t_{0.025} = -2.306$

10-4 Teste *t* Emparelhado

Exemplo 10-9

7. Cálculos: a média e o desvio-padrão amostrais das diferenças d_j são $\overline{d}$ = 0,2739 e s_D = 0,1351; logo, de modo que a estatística de teste é

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{0.2736}{0.1356/\sqrt{9}} = 6.05$$

8. Conclusões: uma vez que t_0=6,08 > 2,306, concluímos que os métodos de previsão da resistência fornecem resultados diferentes. Especificamente, os dados indicam que o método de Karlsruhe produz, em média, previsões maiores para resistência do que o método de Lehigh. O valor P para t_0 = 6,08 é P = 0,0003; logo, a estatística de teste está bem dentro da região crítica.

10-4 Teste *t* Emparelhado

Comparações Emparelhadas *versus* Desemparelhadas

Assim, como decidimos conduzir o experimento? Devemos ou não emparelhar as observações? Embora não haja uma resposta geral a essa questão, podemos dar algumas regras baseadas na discussão anterior.

1. Se as unidades experimentais forem relativamente homogêneas (σ pequena) e a correlação intrapares (within) for pequena, o ganho na precisão atribuído ao emparelhamento será compensado pela perda de graus de liberdade; por conseguinte, o experimento com amostra independente deve ser usado.
2. Se as unidades experimentais forem relativamente heterogêneas (σ grande) e se houver uma grande correlação positiva intrapares (within), o experimento emparelhado deve ser usado. Tipicamente, esse caso ocorre quando as unidades experimentais forem as mesmas para ambos os tratamentos. Como no Exemplo 10-9, as mesmas traves foram usadas para testar os dois métodos.

10-4 Teste *t* Emparelhado

Um Intervalo Confiança para μ_D

Definição

Se $\bar{d}$ e s_D forem a média e o desvio-padrão amostrais da diferença de n pares aleatórios de medidas distribuídas normalmente, então um intervalo de confiança 100(1-α)% para diferença de média μ_1-μ_2 é:

$$\bar{d} - t_{\alpha/2,n-1} s_D/\sqrt{n} \le \mu_D \le \bar{d} + t_{\alpha/2,n-1} s_D/\sqrt{n} \qquad (10\text{-}23)$$

Sendo $t_{\alpha/2,n-1}$ o ponto percentual superior α/2% da distribuição *t* , com *n-1* graus de liberdade.

10-4 Teste *t* Emparelhado

Exemplo 10-10

Periódico *Human Factors (1962, pp. 375-380)* reporta um estudo em que se pediu a n = 14 pessoas para estacionarem dois carros, de forma paralela, tendo barras de direção e raios de giro muito diferentes. O tempo em segundos para cada pessoa foi registrado, sendo apresentado na Tabela 10-3. Da coluna das diferenças observadas, calculamos $\bar{d}$=1.21 e s_D = 12.68 . O intervalo de confiança de 90% para $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ é encontrado a partir da Equação 10-23 conforme segue:

$$\bar{d} - t_{0.05,13} s_D / \sqrt{n} \le \mu_D \le \bar{d} + t_{0.05,13} s_D / \sqrt{n}$$

$$1.21 - 1.771(12.68)/\sqrt{14} \le \mu_D \le 1.21 + 1.771(12.68)/\sqrt{14}$$

$$-4.79 \le \mu_D \le 7.21$$

Note que o intervalo de confiança para μd inclui o zero. Isso implica que, com um nível de confiança de 90%, os dados não confirmam a afirmação de que os dois carros têm diferentes tempos médios, μ_1 e μ_2, para estacionar. Ou seja, o valor $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$ é consistente com os dados observados.

10-4 Teste t Emparelhado

Exemplo 10-10

Tabela 10-3 Tempo em segundos para Estacionar Dois Automóveis Paralelamente

	Automobile		Difference
Subject	$1(x_{1j})$	$2(x_{2j})$	(d_j)
1	37.0	17.8	19.2
2	25.8	20.2	5.6
3	16.2	16.8	−0.6
4	24.2	41.4	−17.2
5	22.0	21.4	0.6
6	33.4	38.4	−5.0
7	23.8	16.8	7.0
8	58.2	32.2	26.0
9	33.6	27.8	5.8
10	24.4	23.2	1.2
11	23.4	29.6	−6.2
12	21.2	20.6	0.6
13	36.2	32.2	4.0
14	29.8	53.8	−24.0

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

10-5.1 A Distribuição *F*

Desejamos testar as hipóteses:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

• O desenvolvimento de um procedimento para essas hipóteses requer uma nova distribuição de probabilidades, a distribuição F.

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

10-5.1 A Distribuição *F*

Sejam W e Y variáveis aleatórias independentes qui-quidrado, com *u* e *v* graus de liberdade, respectivamente. Então a razão

$$F = \frac{W/u}{Y/v} \qquad (10\text{-}26)$$

Tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2} x^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left[\left(\frac{u}{v}\right)x + 1\right]^{(u+v)/2}}, \qquad 0 < x < \infty \qquad (10\text{-}27)$$

E é dito seguir a distribuição F com *u* graus de liberdade no numerador e *v* graus de liberdade no denominador. É geralmente abreviada como $F_{u,v}$.

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

10-5.1 A Distribuição *F*

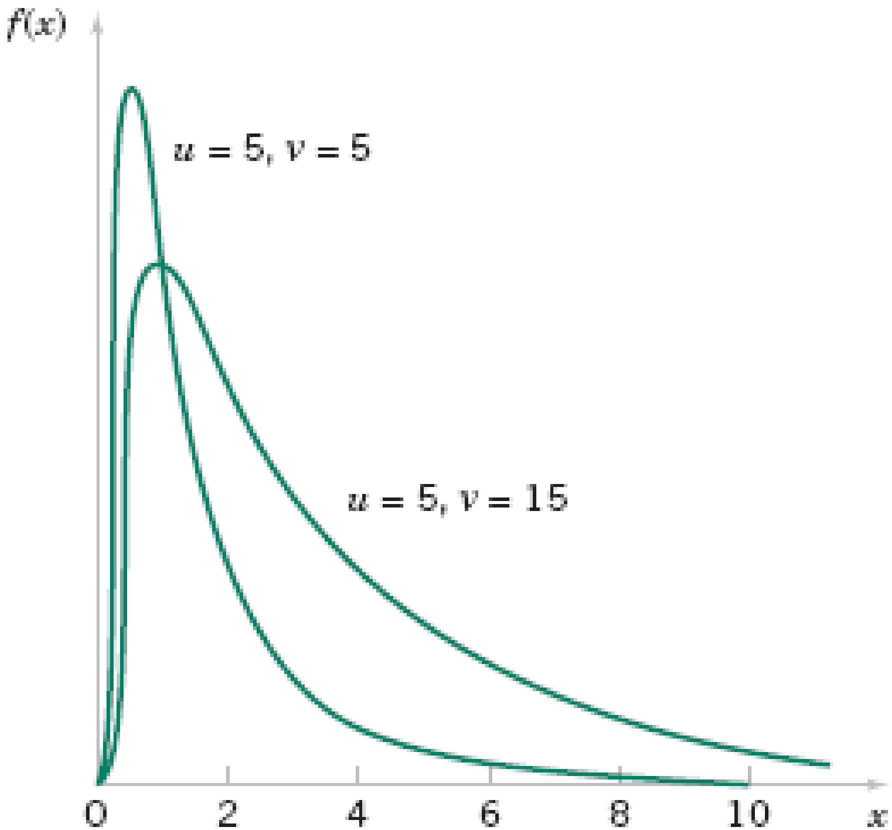

Figura 10-4 Funções densidade de probabilidade de duas distribuições F

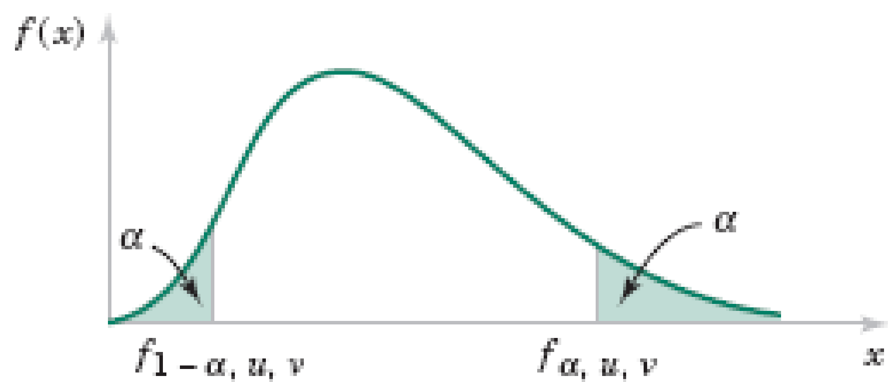

Figura 10-5 Pontos percentuais superior e inferior da distribuição F

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

10-5.1 A Distribuição *F*

Os pontos percentuais na extremidade inferior $f_{1-\alpha,u,\nu}$
Podem ser encontrados como se segue.

$$f_{1-\alpha,u,v} = \frac{1}{f_{\alpha,v,u}} \tag{10-28}$$

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

10-5.2 Testes de Hipóteses para a Razão de Duas Variâncias

Seja $X_{11}, X_{12},..., X_{1n1}$ uma amostra aleatória proveniente de uma população normal, com média μ_1 e variância σ^2_1. Seja $X_{21},X_{22},...,X_{1n2}$ uma amostra aleatória proveniente de uma população normal, com média μ_2 e variância σ^2_2. Considere que ambas as populações normais sejam independentes. Sejam S^2_1 e S^2_2 as variâncias das amostras. Então a razão

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

Tem uma distribuição F, com $n_1 - 1$ graus de liberdade no numerador e n_2-1 graus de liberdade no denominador.

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

10-5.2 Testes de Hipóteses para a Razão de Duas Variâncias

Null hypothesis: $H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test statistic: $$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (10\text{-}29)$$

Alternative Hypotheses	Rejection Criterion
$H_1\colon \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ or $f_0 < f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$
$H_1\colon \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$
$H_1\colon \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$f_0 < f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

Exemplo 10-11

Camadas de óxidos em pastilhas de semicondutores são atacadas com uma mistura de gases, de modo a atingir a espessura apropriada. A variabilidade na espessura dessas camadas de óxidos é uma característica crítica da pastilha. Uma baixa variabilidade é desejada para as etapas subseqüentes do processo. Duas misturas diferentes de gases estão sendo estudadas para determinar se uma delas é superior na redução da variabilidade de espessura das camadas de óxido. Vinte pastilhas são atacadas com cada gás. Os devios-padrão da espessura de óxido são s_1=1.96 ângstroms e s_2 = 2,13 ângstroms, respectivamente. Há qualquer evidência que indique ser um gás preferível em relação ao outro? Use α = 0.05 .

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

Exemplo 10-11

Procedimento de oito etapas para o teste de hipóteses pode ser aplicado a esse problema conforme a seguir:

1. Os parâmetros de interesse são as variâncias, σ^2_1 e σ^2_2, da espessura das camadas de óxido. Consideraremos que a espessura de óxido seja uma variável aleatória normal para ambas as misturas de gases.
2. H_0: $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$
3. H_1: $\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$
4. $\alpha = 0.05$
5. A estatística de teste é dada pela Equação 10-29:

$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

Exemplo 10-11

6. Uma vez que $n_1 = n_2 = n$, rejeitaremos H_0: $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$ se $f_0 > f_{0.025;19;19} = 2.53$ ou se $f_0 < f_{0.975;19;19} = 1/2.53 = 0.40$.
7. Cálculos: já que $s^2{}_1 = (1,96)^2 = 3,84$ e $s^2{}_2 = (2,13)^2 = 4.54$, a estatística de teste é

$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3.84}{4.54} = 0.85$$

8. Conclusões: uma vez que $f_{0.p75;19;19} = 0.40 < f_0 = 0.85 < f_{0.025;19;19} = 2.53$, não podemos rejeitar a hipótese nula H_0: $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$ com nível de significância de 0.05. Conseqüentemente, não há evidência forte para indicar que um gás que resulte e m uma variância menor da espessura de óxido.

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

10-5.4 Intervalo de Confiança para a Razão de Duas Variâncias

Se s^2_1 e s^2_2 forem as variâncias de amostras aleatórias de tamanhos n_1 e n_2, respectivamente, provenientes de duas populações normais independentes, com variâncias desconhecidas σ^2_1 e σ^2_2, então um **intervalo de confiança de 100 (1 – α)% para razão σ^2_1/σ^2_2** será:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \qquad (10\text{-}31)$$

Em que $f_{\alpha/2,n2-1,n1-1}$ e $f_{1-\alpha/2,n2-1,n1-1}$ são os pontos percentuais $\alpha/2$ superior e inferior da distribuição F, com n_2-1 graus de liberdade no numerador e n_1-1 graus de liberdade no denominador, respectivamente. Um intervalo de confiança para razão de dois desvios-padrão pode ser obtido extraindo a raiz quadrada da Equação 10-31.

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

Exemplo 10-13

Uma companhia fabrica propulsores para uso em motores de turbinas a jato. Uma das operações envolve dar um acabamento, esmerilhando uma determinada superfície de um componente feito com liga de titânio. Dois processos diferentes para esmerilhar podem ser usados, podendo produzir peças com iguais rugosidades médias na superfície. Uma amostra aleatória de $n_1 = 11$ peças proveniente do primeiro processo, resulta em um desvio-padrão de $s_1=5.1$ micropolegadas. Uma amostra aleatória $n_2 = 16$ peças, proveniente do segundo processo, resulta em um desvio-padrão de $s_2= 4.7$ micropolegadas. Encontraremos um intervalo de confiança de 90% para a razão de dois desvios-padrão σ_1/σ_2.

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

Exemplo 10-13

Considerando que os dois processos sejam independentes e que a rugosidade na superfície seja normalmente distribuída, podemos usar a Equação 10-31 como a seguir:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0.95,15,10} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0.05,15,10}$$

$$\frac{(5.1)^2}{(4.7)^2} 0.39 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{(5.1)^2}{(4.7)^2} 2.85$$

10-5 Inferências Para Variâncias de Duas Distribuições Normais

Exemplo 10-13

Ou fazendo os cálculos e extraindo a raiz quadrada,

$$0.678 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq 1.887$$

Note que temos usado a equação 10-28 para achar $f_{0.95;15;10} = 1/f_{0.05;10;15} = 1/2.54 = 0.39$. Uma vez que esse intervalo de confiança inclui a unidade, não podemos afirmar que os desvios-padrão da rugosidade da superfície para os dois processos sejam diferentes com um nível de confiança de 90%.

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

10-6.1 Testes para a Diferença nas Proporções de uma População, Amostras Grandes

Estamos interessados em testar as hipóteses:

$$H_0: p_1 = p_2$$
$$H_1: p_1 \neq p_2$$

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

10-6.1 Testes para a Diferença nas Proporções de uma População, Amostras Grandes

A estatística de teste que segue é distribuída aproximadamente como uma normal padrão e este é o teste básico:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \qquad (10\text{-}32)$$

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

10-6.1 Testes para a Diferença nas Proporções de uma População, Amostras Grandes

Null hypothesis: $H_0: p_1 = p_2$

Test statistic:

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \tag{10-33}$$

Alternative Hypotheses	Rejection Criterion
$H_1: p_1 \neq p_2$	$z_0 > z_{\alpha/2}$ or $z_0 < -z_{\alpha/2}$
$H_1: p_1 > p_2$	$z_0 > z_\alpha$
$H_1: p_1 < p_2$	$z_0 < -z_\alpha$

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

Exemplo 10-14

Extratos de erva-de-são-joão são largamente usados para tratar depressão. Um artigo na edição de 18 de abril de 2001 da revista *Journal of the American Medical Association ("Effectiveness of St. John's Wort on Major Depression: A Randomized Controlled Trial" – Eficiência da erva-de-são-joão em Depressão Unipolar: Uma tentativa Aleatorizada Controlada)* comparou a eficácia de um extrato-padrão de erva-de-são-joão com um placebo em 200 pacientes diagnosticados com depressão unipolar. Pacientes foram designados aleatoriamente em dois grupos: um grupo recebeu a erva-de-são-joão e o outro recebeu placebo. Depois de oito semanas, 19 dos pacientes tratados com placebo mostraram melhorias, enquanto 27 daqueles tratados com a erva-de-são-joão melhoraram. Há alguma razão para acreditar que a erva-de-são-joão seja efetiva no tratamento de depressão unipolar? Use $\alpha = 0.05$.

O procedimento de oito etapas para o teste de hipóteses conduz aos seguintes resultados:

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

Exemplo 10-14

1. Os parâmetros de interesse são p_1 e p_2, as proporções de pacientes que melhoraram depois do tratamento com erva-de-são-joão (p_1) e com o placebo (p_2).
2. H_0: $p_1 = p_2$
3. H_1: $p_1 \neq p_2$
4. $\alpha = 0.05$
5. A estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Onde $\hat{p}_1 = 27/100 = 0.27, \hat{p}_2 = 19/100 = 0.19, n_1 = n_2 = 100$, e

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{19 + 27}{100 + 100} = 0.23$$

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

Exemplo 10-14

6. Rejeitar H_0: $p_1 = p_2$ se $z_0 > z_{0.025} = 1.96$ ou se $z_0 < -z_{0.025} = -1.96$

7. Cálculos: o valor da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{0.27 - 0.19}{\sqrt{0.23(0.77)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 1.35$$

8. Conclusões: uma vez que $z_0 = 1.35$ não excede $z_{0.025}$, não podemos rejeitar a hipótese nula. Note que o valor de P é $P \cong 0.179$. Não há evidências suficientes para confirmar que a erva-de-são-joão seja efetiva no tratamento de depressão unipolar.

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

Saída do Minitab para o Exemplo 10-14

Minitab Computations

Test and CI for Two Proportions

Sample	X	N	Sample p
1	27	100	0.270000
2	19	100	0.190000

Estimate for p(1) − p(2): 0.08

95% CI for p(1) − p(2): (−0.0361186, 0.196119)

Test for p(1) − p(2) = 0 (vs not = 0): Z = 1.35 P-Value = 0.177

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

10-6.3 Intervalo de Confiança para a Diferença de Proporções de Populações

Se $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$ forem as proporções amostrais de observações em duas amostras aleatórias e independentes, de tamanhos n_1 e n_2 que pertençam a uma classe de interesse, então um **intervalo aproximado de confiança de 100 (1 - α)% nas proporções verdadeiras $p_1 - p_2$** será

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \le p_1 - p_2 \le \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \quad (10\text{-}39)$$

Sendo $z_{\alpha/2}$ o ponto percentual superior $\alpha/2$ da distribuição normal padrão.

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

Example 10-15

Considere o processo descrito no Exemplo 8-7 sobre a fabricação de mancais para eixos de manivela. Suponha que uma modificação seja feita no processo de acabamento da superfície e que , subseqüentemente, obtenha-se uma segunda amostra aleatória de 85 eixos. O número de eixos defeituosos nessa segunda amostra é 8. Por conseguinte, uma vez que $n_1 = 85$, $\hat{p}_1 = 0.12$, $n_2 = 85$, $\hat{p}_2 = 8/85 = 0.09$, podemos obter um intervalo aproximado de confiança de 95% para a diferença da proporção de mancais defeituoso produzidos pelos dois processos a partir da equação 10-39 conforme se segue:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$\leq p_1 - p_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

10-6 Inferências Para Proporções de Duas Populações

Exemplo 10-15

Ou

$$0.12 - 0.09 - 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85} + \frac{0.09(0.91)}{85}} \leq p_1 - p_2 \leq 0.12 - 0.09 + 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85} + \frac{0.09(0.91)}{85}}$$

Isso simplifica para

$$-0.06 \leq p_1 - p_2 \leq 0.12$$

Esse intervalo de confiança inclui o zero: assim, baseado nos dados das amostras, parece improvável que mudanças feitas no processo de acabamento da superfície tenham reduzido a proporção de mancais com eixos defeituoso sendo produzidos.