9

Teste de Hipótese para uma Amostra Única

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Depois de um cuidadoso estudo deste capítulo, você deve ser capaz de:

1. Estruturar problemas de engenharia de tomada de decisão, como testes de hipóteses
2. Testar hipóteses para a média de uma distribuição normal, usando tanto um procedimento de teste Z como um de teste *t*
3. Testar hipóteses para a variância ou o desvio-padrão de uma distribuição normal
4. Testar hipóteses para a proporção de uma população
5. Usar a abordagem do valor P para tomar decisões em testes de hipóteses
6. Calcular potência, probabilidade de erro tipo II e tomar decisões a respeito do tamanho da amostra em testes para médias, variâncias, e proporções
7. Explicar e usar a relação entre intervalo de confiança e teste de hipóteses
8. Usar o teste qui-quadrado de adequação de ajuste para verificar suposições de distribuição
9. Usar testes de tabelas de contingência

Motivação

- Um fabricante alega a vida média das pilhas AA é de 300 minutos. Se você suspeita-se que essa alegação não é válida, como poderia mostrar que ela é falsa?
- Mesmo que estivesse seguro de que a vida média de uma pilha não é 300, a vida média real pode ser muito próximo desse valor e a diferença não é importante.

Fundamentos de testes de hipóteses

- Um teste de hipótese é um procedimento da estatística amostral para testar uma alegação sobre um valor de um parâmetro populacional.
- Uma alegação sobre um parâmetro populacional é chamada de hipótese estatística.
- Um par de hipóteses deve ser estabelecido:
  - Uma hipótese nula H_0 que contém uma afirmativa de igualdade, tal como $\leq$ = $\geq$.
  - Uma hipótese alternativa $H_á$ que é o complemento da hipótese nula.

Estabelecendo as hipóteses

- 1. Uma universidade alega que a proporção de seus alunos formados em quatro anos é de 82%
  - H_0: p=82%
  - $H_á$: p≠ 82%
- 2. Um fabricante de torneiras alega que a taxa de fluxo médio de um determinado tipo é inferior ou igual a 2,5 galões por minuto
  - H_0: μ = 2,5
  - $H_á$: μ > 2,5

Tipos de erros

- Suponha que alguém afirma que determinada moeda não é viciada. Então, você joga a moeda 100 vezes e obtém 49 caras e 51 coroas. Não há evidência suficiente para rejeitar a alegação.
  - Qual seria a sua conclusão se o resultado fosse 21 caras e 79 coroas?
  - É possível que a moeda não é viciada e você tenha extraído uma amostra incomum.
  - Uma maneira de ter certeza é testar toda a população.
  - Uma vez que o resultado é baseado em uma amostra, deve-se aceitar o fato que sua decisão pode estar incorreta.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.1 Hipóteses Estatísticas

Estimação de parâmetros com teste estatístico de hipóteses e com intervalos de confiança são métodos fundamentais usados no estágio de análise dos dados de um **experimento comparativo**, em que o engenheiro está interessado, por exemplo, em comparar a média de uma população com um certo valor especificado.

Definição

Uma **hipótese estatística** é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.1 Hipóteses Estatísticas

Por exemplo, suponha que estejamos interessados na taxa de queima de um propelente sólido usado para fornecer energia aos sistemas de escapamento de aeronaves.

- A taxa de queima é um variável aleatória que pode ser descrita por uma distribuição de probabilidade.

- Suponha que nosso interesse esteja focado na taxa **média** de queima (um parâmetro dessa distribuição).

- Especificamente, estamos interessados em decidir se a taxa média de queima é ou não 50 centimétros por segundo.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.1 Hipóteses Estatísticas

Hipótese Alternativa Bilateral

H_0: μ=50 cm/s
H_1: $\mu \neq$50 cm/s

Hipótese Nula

Hipótese Alternativa

Hipótese Alternativa Unilateral

H_0: μ=50 cm/s
H_1: $\mu \ngtr$50 cm/sv

H_0: μ=50 cm/s
H_1: $\mu <$50 cm/s

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.1 Hipóteses Estatísticas

Teste de uma Hipóteses

• Um procedimento levando a uma decisão acerca de uma hipótese em particular é chamado de **teste de hipótese**.

• Procedimentos de teste de hipótese se apoiam no uso de informações de uma **amostra aleatória proveniente da população de interesse**.

• Se essa informação for *consistente* com a hipótese, não rejeitaremos a hipótese; no entanto, se essa informação for *inconsistente* com a hipótese, concluiremos que a hipótese é **falsa**.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.2 Testes de Hipóteses Estatístico

H_0: μ=50 cm/s
H_1: $\mu \neq$50 cm/s

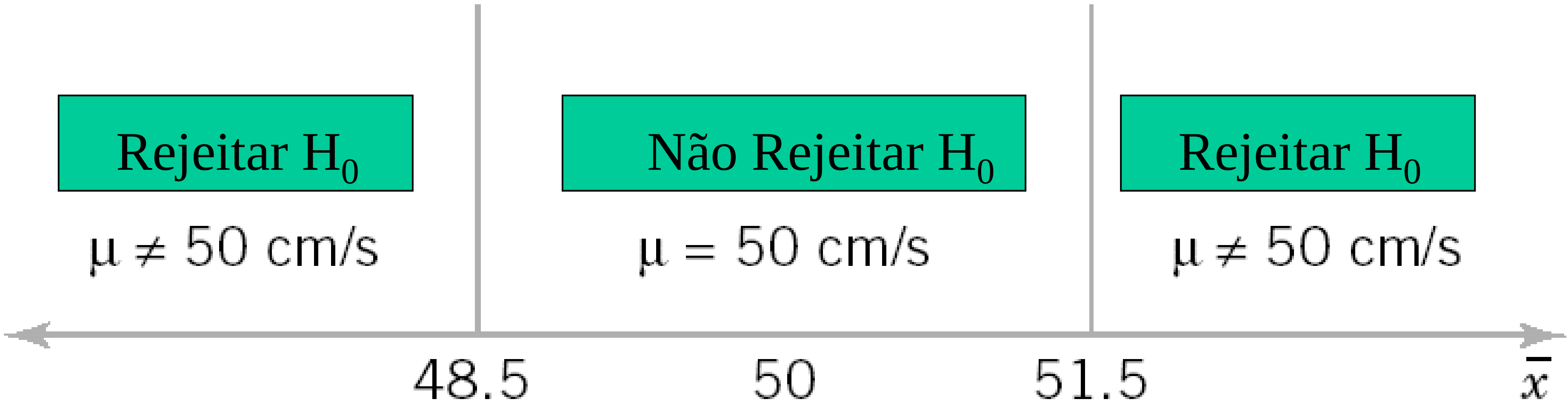


Figura 9-1 Critérios de decisão para testar $H_0:\mu = 50$ centímetros por segundo versus $H_1:\mu \neq 50$ centímetros por segundo.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.2 Testes de Hipóteses Estatístico

Definições

A rejeição da hipótese nula H_0 quando ela for verdadeira é definida como um **erro tipo I.**

A falha em rejeitar a hipótese nula H_0 quando ela for falsa é definida como **erro tipo II**.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.2 Testes de Hipóteses Estatístico

decisão	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
não rejeitar H_0	Decisão Correta	erro tipo II
rejeitar H_0	erro tipo I	Decisão Correta

Algumas vezes, a probabilidade do erro tipo I é chamada de **nível de significância**, ou **error-α**, ou **tamanho do teste**.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.2 Testes de Hipóteses Estatístico

$$\alpha = P(\overline{X} < 48.5 \text{ when } \mu = 50) + P(\overline{X} > 51.5 \text{ when } \mu = 50)$$

Os valores de z que correspondem aos valores críticos 48.5 e 51.5 são

$$z_1 = \frac{48.5 - 50}{0.79} = -1.90 \qquad \text{and} \qquad z_2 = \frac{51.5 - 50}{0.79} = 1.90$$

Logo,

$$\alpha = P(Z < -1.90) + P(Z > 1.90) = 0.028717 + 0.028717 = 0.057434$$

9-1 Testes de Hipóteses

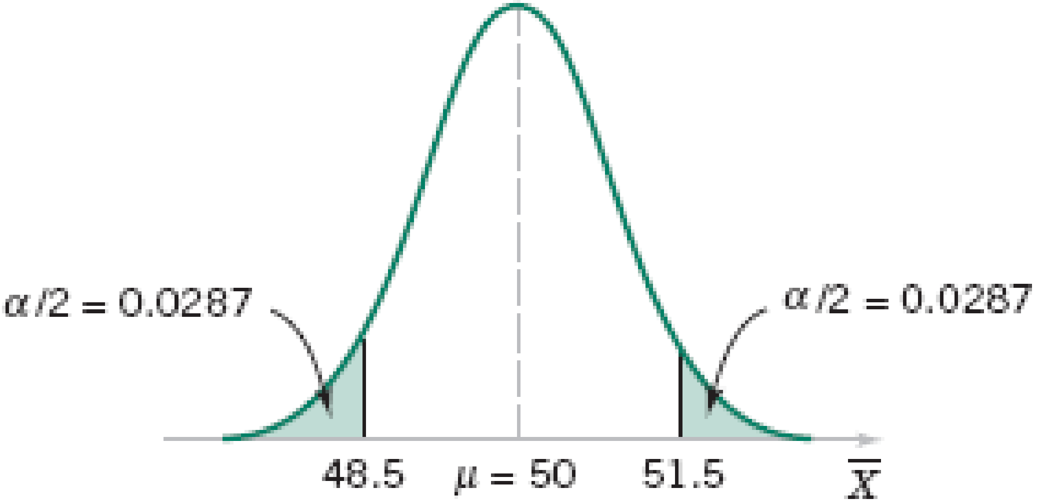


Figure 9-2 The critical region for H_0: $\mu = 50$ versus H_1: $\mu \neq 50$ and $n = 10$.

α = P(Erro tipo I) = P(rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira) (9-3)

9-1 Testes de Hipóteses

β = P(Erro tipo II) = P(falha em rejeitar H_0 quando H_0 é falsa)   (9-4)

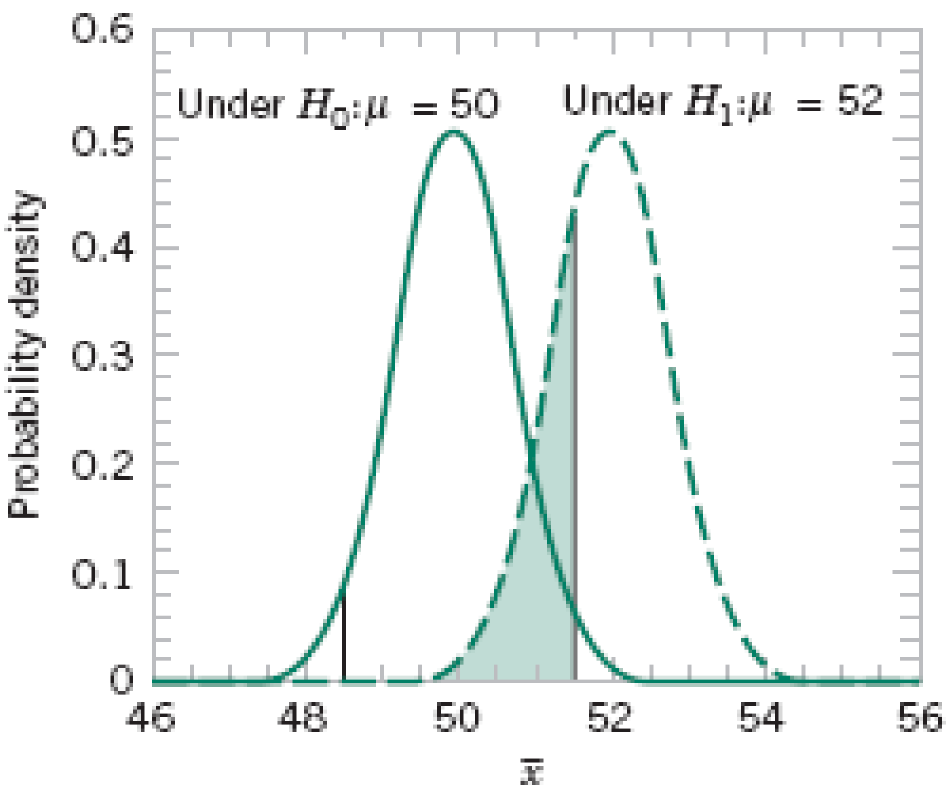


Figura 9-3 A probabilidade do erro tipo II quando $\mu = 52$ e $n = 10$.

9-1 Testes de Hipóteses

$$\beta = P(48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5 \text{ when } \mu = 52)$$

Os valores z, correspondentes a 48.5 e 51.5 quando μ=52 são

$$z_1 = \frac{48.5 - 52}{0.79} = -4.43 \qquad z_2 = \frac{51.5 - 52}{0.79} = -0.63$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta &= P(-4.43 \leq Z \leq -0.63) = P(Z \leq -0.63) - P(Z \leq -4.43)\\ &= 0.2643 - 0.0000 = 0.2643\end{aligned}$$

9-1 Testes de Hipóteses

$$\beta = P(48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5 \text{ when } \mu = 50.5)$$

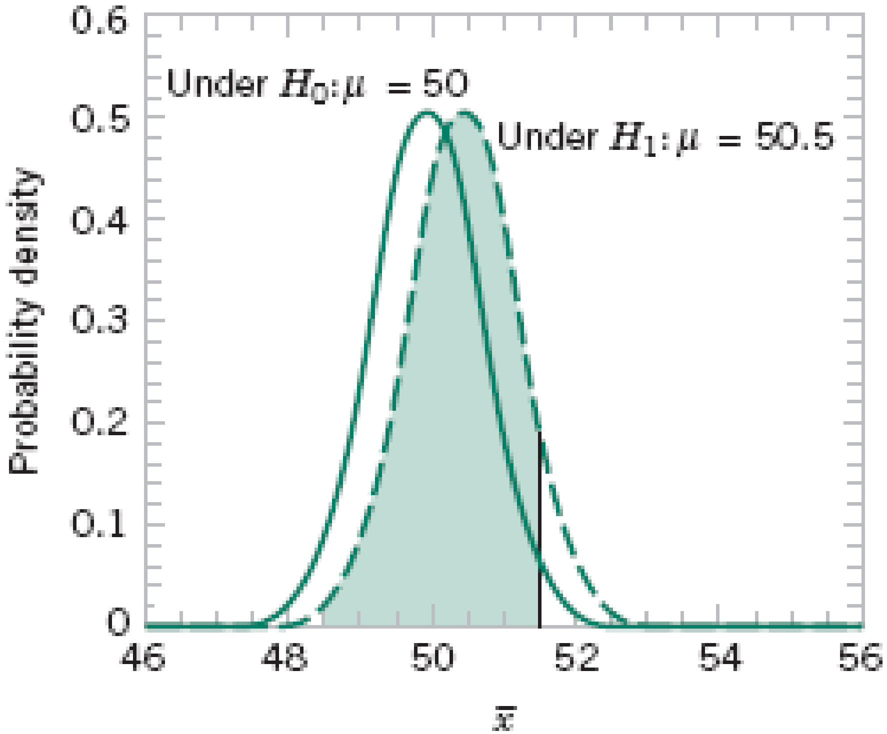


Figura 9-4 A probabilidade de erro tipo II quando μ = 50.5 e n = 10.

9-1 Testes de Hipóteses

$$\beta = P(48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5 \text{ when } \mu = 50.5)$$

Como mostrado na Fig. 9-4, os valores de z correspondentes a 48.5 e 51.5 quando μ=50.5 são

$$z_1 = \frac{48.5 - 50.5}{0.79} = -2.53 \qquad z_2 = \frac{51.5 - 50.5}{0.79} = 1.27$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta &= P(-2.53 \leq Z \leq 1.27) = P(Z \leq 1.27) - P(Z \leq -2.53) \\ &= 0.8980 - 0.0057 = 0.8923\end{aligned}$$

9-1 Testes de Hipóteses

$$\beta = P(48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5 \text{ when } \mu = 52)$$

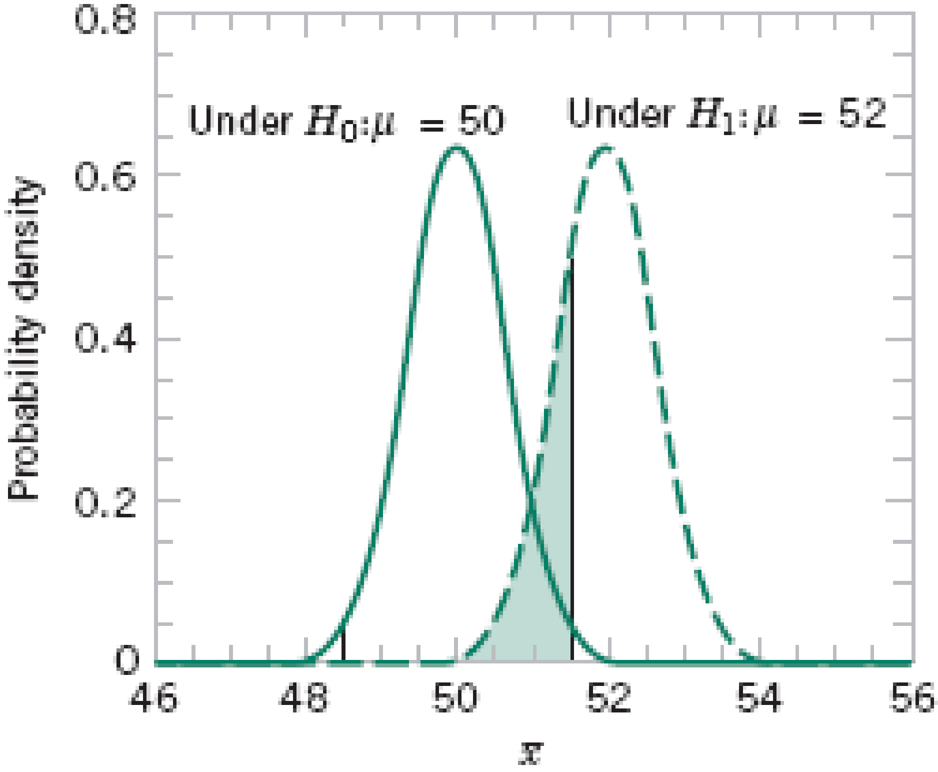


Figura 9-5 A probabilidade do erro tipo II quando μ = 52 e *n* = 16.

9-1 Testes de Hipóteses

$$\beta = P(48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5 \text{ when } \mu = 52)$$

Quando n=16, e o desvio padrão de $\overline{X}$ é $\sigma/\sqrt{n} = 2.5/\sqrt{16} = 0.625$, e os valores z correspondentes a 48.5 e 51.5, quando μ=52 são

$$z_1 = \frac{48.5 - 52}{0.625} = -5.60 \qquad z_2 = \frac{51.5 - 52}{0.625} = -0.80$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\beta &= P(-5.60 \leq Z \leq -0.80) = P(Z \leq -0.80) - P(Z \leq -5.60) \\ &= 0.2119 - 0.0000 = 0.2119\end{aligned}$$

9-1 Testes de Hipóteses

Região de aceitação	Tamanho da amostra	α	β com μ=52	β com μ=50.5
$48.5 < \bar{x} < 51.5$	10	0.0576	0.2643	0.8923
$48 < \bar{x} < 52$	10	0.0114	$\boxed{0.5000}$	$\boxed{0.9705}$
$48.5 < \bar{x} < 51.5$	16	0.0164	0.2119	$\boxed{0.9445}$
$48 < \bar{x} < 52$	16	$\boxed{0.0014}$	$\boxed{0.5000}$	$\boxed{0.9918}$

9-1 Testes de Hipóteses

Definição

A **potência** de um teste estatístico é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula H_0 quando a hipótese alternativa é falsa.

- A potência é calculada como 1 - β, e a **potência** pode ser interpretada como **a probabilidade de rejeitar corretamente uma hipótese nula falsa.** Frequentemente, comparamos testes estatísticos através da comparação de suas propriedades de potência.
- Por exemplo, considere o problema da taxa de queima de propelente, quando estamos testando $H_0: \mu = 50$ centímetros por segundo contra $H_1: \mu \neq 50$ centímetros por segundo. Suponha que o valor verdadeiro da média seja $\mu = 52$. Quando $n = 10$, encontramos que $\beta = 0.2643$, assim a potência desse teste é $1 - \beta = 1 - 0.2643 = 0.7357$ quando $\mu = 52$.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.3 Hipóteses Unilaterais e Bilaterias

Testes Bilaterais:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Testes Unilaterais:

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \qquad H_1: \mu < \mu_0$$

9-1 Testes de Hipóteses

Exemplo 9-1

Considere o problema da taxa de queima de um propelente. Suponha que se a taxa de queima for menor do que 50 centímetros por segundo,desejamos mostrar esse fato com um conclusão forte. As hipóteses deveriam ser estabelecidas como

$$H_0: \mu = 50 \text{ cm/s}$$
$$H_1: \mu < 50 \text{ cm/s}$$

Aqui, a região crítica está na extremidade inferior da distribuição de $\overline{X}$. Visto que a rejeição de H_0 é sempre uma conclusão forte, essa afirmação das hipóteses produzirá o resultado desejado se H_0 for rejeitado. Note que, embora a hipótese nula seja estabelecida com um sinal de igual, deve-se incluir qualquer valor de μ não especificado pela hipótese alternativa. Desse modo, falhar em rejeitar H_0 não significa que μ=50 centímetros por segundo exatamente, mas somente que não temos evidência forte em suportar H_1.

9-1 Testes de Hipóteses

Um engarrafador quer estar certo de que as garrafas reúnem as especificações de pressão interna média ou resistência à explosão, que, para garrafas de 10 onças, a resistência mínima é de 200 psi . O engarrafador decidiu formular o procedimento de decisão para um lote específico de garrafas como um problema de teste de hipóteses. Há duas formulações possíveis para esse problema:

$$H_0: \mu = 200 \text{ psi} \qquad\qquad H_0: \mu = 200 \text{ psi}$$
$$H_1: \mu > 200 \text{ psi} \qquad \text{ou} \qquad H_1: \mu < 200 \text{ psi}$$

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.4 Valores P nos Testes de Hipóteses

Definição

O **Valor P** é o menor nível de significância que conduz à rejeição da hipótese nula H_0, com os dados fornecidos.

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.4 Valores P nos Testes de Hipóteses

Considere o teste bilateral para a taxa de queima

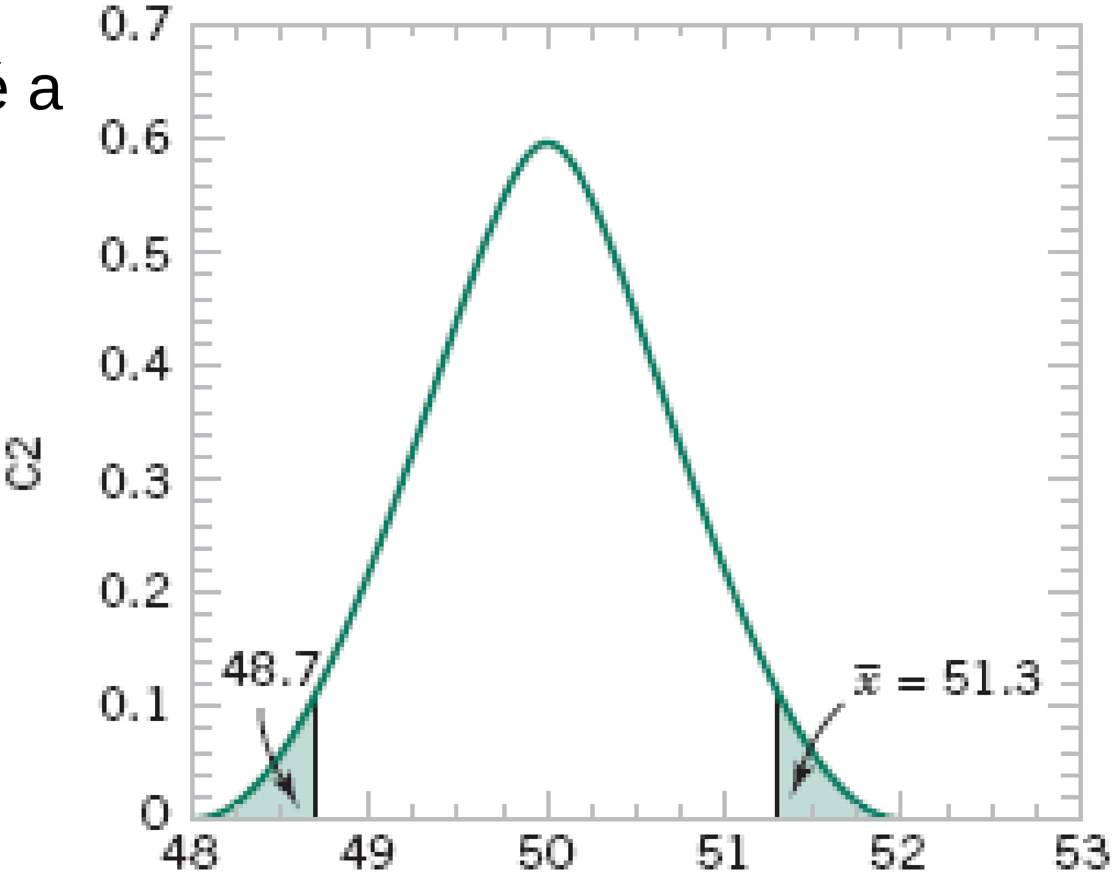
Com n =16 e σ=2.5. Suponha que a média amostral observada seja $\bar{x}$ = 51.3 centímetros por segundo. A Fig.9-6 mostra uma região crítica para esse teste com valores críticos em 51,3 e no valor simétrico 48,7. O valor de P do teste é o valor α associado com essa região crítica. Qualquer valor menor para α diminui a região crítica e o teste falha em rejeitar a hipótese nula quando $\bar{x}$ = 51,3 centímetros por segundo. O valor de P é fácil de calcular depois de a estatística de teste ser observada. Nesse exemplo:

$$
\begin{aligned}
P\text{-value} &= 1 - P(48.7 < \bar{X} < 51.3) \\
&= 1 - P\left(\frac{48.7 - 50}{2.5/\sqrt{16}} < Z < \frac{51.3 - 50}{2.5/\sqrt{16}}\right) \\
&= 1 - P(-2.08 < Z < 2.08) \\
&= 1 - 0.962 = 0.038
\end{aligned}
$$

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.4 Valores P nos Testes de Hipóteses

Figura 9-6 O valor P é a área da região sombreada quando $\bar{x} = 51.3$.



9-1 Testes de Hipóteses

9-1.5 Conexão entre Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança

Há uma relação íntima entre o teste de uma hipótese acerca de um parâmetro, ou seja, θ, e o intervalo de confiança para θ. Se [l,u] for um intervalo de confiança de 100(1-α)% para o parâmetro θ, o teste de tamanho α das hipóteses

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

Conduzirá a rejeição de H_0 se e somente se θ_0 **não** estiver no IC[l,u] de 100(1-α)%. Como ilustração, considere o sistema de escape do problema do propelente, com $\bar{x}$ = 51,3, σ = 2,5 e n = 16. A hipótese nula H_0: μ=50 foi rejeitada, usando α=0,05. O IC bilateral de 95% para μ pode ser calculado usando a equação 8-7. Esse IC é $51.3 \pm 1.96(2.5/\sqrt{16})$, o que quer dizer 50,075 ≤μ≤52,525. Uma vez que o valor μ_0 = 50 não está incluído nesse intervalo, a hipótese nula H_0: μ=50 é rejeitada

9-1 Testes de Hipóteses

9-1.6 Procedimento Geral para Testes de Hipóteses

1. A partir do contexto do problema, identifique o parâmetro de interesse.
2. Estabeleça a hipótese nula, H_0 .
3. Especifique uma hipótese alternativa, H_1.
4. Escolha um nível de significância, α.
5. Determine uma estatística apropriada de teste.
6. Estabeleça a região de rejeição para a estatística.
7. Calcule quaisquer grandezas amostrais necessárias,substitua-as na equação para a estatística de teste e calcule aquele valor.
8. Decida se H_0 deve ou não ser rejeitada e reporte isso no contexto do problema.

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9-2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Suponha que desejamos testar as hipóteses:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

A **Estatística de Teste** é:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (9\text{-}8)$$

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9-2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Deve-se rejeitar H_0 se o valor observado da estatística de teste z_0 for:

$$z_0 > z_{\alpha/2} \text{ ou } z_0 < -z_{\alpha/2}$$

e devemos falhar em rejeitar H_0 se

$$-z_{\alpha/2} < z_0 < z_{\alpha/2}$$

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

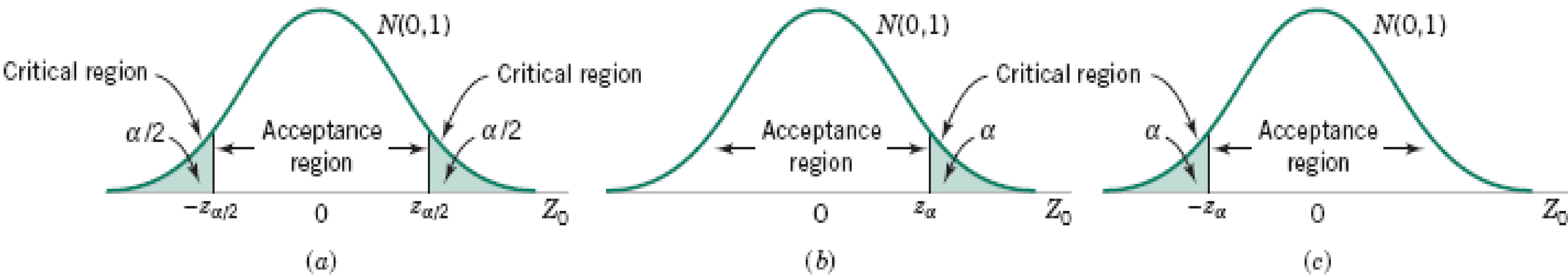


Figura 9-7 A distribuição de Z_0 quando H_0: $\mu = \mu_0$ for verdadeira, com região crítica para (a) a alternativa bilateral H_1: $\mu \neq \mu_0$, (b) a alternativa unilateral H_1: $\mu > \mu_0$ e (c) a alternativa unilateral H_1: $\mu < \mu_0$.

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

Exemplo 9-2

Os sistemas de escapamento de uma aeronave funcionam devido a um propelente sólido. A taxa de queima desse propelente é uma característica importante do produto. As especificações requerem que a taxa média de queima tem de ser 50 centímetros por segundo. Sabemos que o desvio-padrão da taxa de queima é σ=2 centímetros por segundo. O experimentalista decide especificar uma probabilidade do erro tipo I, ou nível de significância, de α=0,05. Ele seleciona uma amostra aleatória de n=25 e obtém uma taxa média amostral de queima de $\bar{x}$ = 51,3 centímetros por segundo. Que conclusões poderiam ser tiradas?

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

Exemplo 9-2

Podemos resolver este problema através do procedimento de 8 etapas, mencionado na seção 9-1.6. Isso resulta em:

1. O parâmetro de interesse é μ, a taxa média de queima
2. H_0: $\mu=50$ centímetros por segundo
3. H_1: $\mu\neq50$ centímetros por segundo
4. $\alpha=0.05$
5. A estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

Exemplo 9-2

6. Rejeitar H_0 se $z_0 > 1{,}96$ ou se $z_0 < 1{,}96$. Note que isso resulta da etapa 4, em que especificamos α=0.05 e, assim, os limites da região crítica estão em $z_{0,025} = 1{,}96$ e $-z_{0,025} = -1{,}96$.
7. Cálculos: desde que $\bar{x}$ =51,3 e σ=2,

$$z_0 = \frac{51.3 - 50}{2/\sqrt{25}} = 3.25$$

8. Conclusão: uma vez que $z_0 = 3.25 > 1.96$, rejeitamos H_0: $\mu = 50$, com nível de significância de 0,05. Dito de forma mais completa, concluímos que a taxa média de queima difere de 50 centímetros por segundo, baseados em uma amostra de 25 medidas. De fato, há uma forte evidência de que a taxa média de queima exceda 50 centímetros por segundo

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9-2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Podemos também desenvolver procedimentos para testar hipóteses para a média μ, em que a hipótese alternativa seja unilateral. Suponha que especifiquemos as hipóteses como

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad\qquad (9\text{-}11)$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

Na definição da região crítica para esse teste, observamos que um valor negativo da estatística de Z_0 nunca nos levaria a concluir que H_0: $\mu = \mu_0$ seria falsa. Por conseguinte, colocaríamos a região crítica na **extremidade superior** da distribuição normal padrão e rejeitaríamos H_0, se o valor calculado para z_0 fosse muito grande. Isto é, rejeitaríamos H_0 se

$$z_0 > z_\alpha \qquad\qquad (9\text{-}12)$$

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9-2.1 Testes de Hipóteses para a Média(Continuação)

Como mostrado na Figura 9-7(b). Similarmente, para testar

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu < \mu_0 \tag{9-13}$$

Calcularíamos a estatística de teste Z_0 e rejeitaríamos H_0 se o valor de z_0 fosse muito pequeno. Ou seja, a região crítica está na **extremidade inferior** da distribuição normal padrão, como mostrado na Figura 9-7(c), e rejeitaríamos H_0 se

$$z_0 < -z_\alpha \tag{9-14}$$

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9-2.1 Testes de Hipóteses para a Média(Continuação)

Hipótese Nula $H_0\colon \mu = \mu_0$

Estatística de Teste $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Hipótese Alternativa	Critério de Rejeição
$H_1\colon \mu \neq \mu_0$	$z_0 > z_{\alpha/2,n-1}$ or $z_0 < -z_{\alpha/2,n-1}$
$H_1\colon \mu > \mu_0$	$z_0 > z_{\alpha,n-1}$
$H_1\colon \mu < \mu_0$	$z_0 < -z_{\alpha,n-1}$

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

Valores P em Testes de Hipóteses

O **Valor P** é o menor nível de significância que conduz à rejeição da hipótese nula H_0, com os dados fornecidos.

$$P = \begin{cases} 2[1 - \Phi(|z_0|)] & \text{for a two-tailed test: } H_0\text{: } \mu = \mu_0 \quad H_1\text{: } \mu \neq \mu_0 \\ 1 - \Phi(z_0) & \text{for a upper-tailed test: } H_0\text{: } \mu = \mu_0 \quad H_1\text{: } \mu > \mu_0 \\ \Phi(z_0) & \text{for a lower-tailed test: } H_0\text{: } \mu = \mu_0 \quad H_1\text{: } \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad (9\text{-}15)$$

9-2 Testes Para a Média de Uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9-2.3 Teste para Amostra Grande

Desenvolvemos o procedimento de teste para a hipótese nula H_0: $\mu = \mu_0$ considerando que a população fosse distribuída normalmente e que σ^2 fosse conhecida. Em muitas, senão na maioria das situações práticas, σ^2 será desconhecida. Além disso, não podemos estar certos de que a população seja bem modelada por uma distribuição normal. Nessas situações, se n for grande ($n > 40$), o desvio-padrão s da amostra poderá substituir σ nos procedimentos de teste, tendo pouco efeito. Desse maneira, enquanto demos um teste para a média de uma distribuição normal, com σ^2 conhecida, ele pode ser facilmente convertido em um **procedimento de teste para amostra grande no caso de σ^2 desconhecida**, que seja válido independentemente da forma da distribuição da população. Esse teste para amostra grande se baseia no teorema do limite central, tal qual o intervalo de confiança para μ no caso de amostra grande, que foi apresentado no capítulo prévio. O tratamento exato no caso em que a população é normal, com σ^2 sendo desconhecida e n pequeno, envolve o uso da distribuição t, sendo adiado até a Seção 9-3.

9-3 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

9-3.1 Testes de Hipótese para a Média

Hipótese Nula $H_0\colon \mu = \mu_0$

Estatística de Teste $$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Hipótese Alternativa	Critério de Rejeição
$H_1\colon \mu \neq \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$
$H_1\colon \mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
$H_1\colon \mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$

9-3 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

9-3.1 Testes de Hipótese para a Média

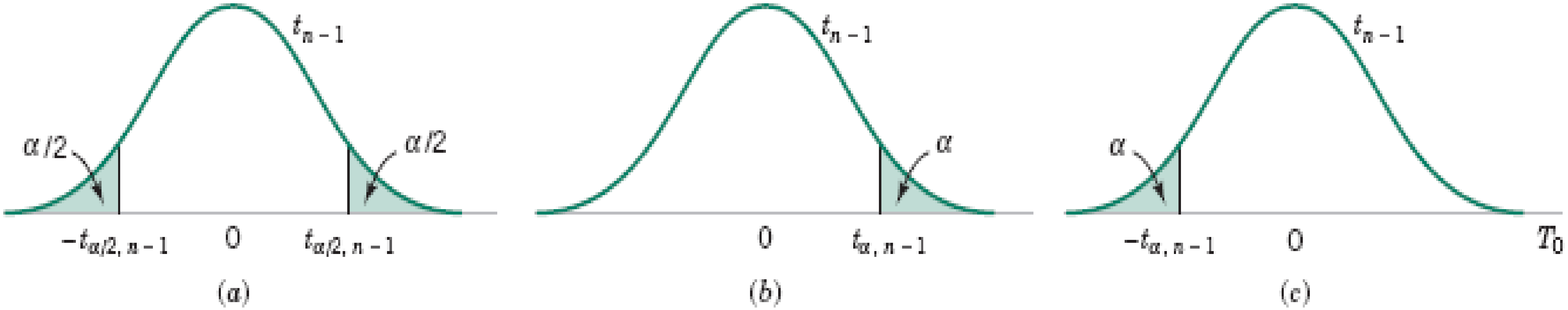


Figure 9-9 A distribuição de referência para H_0: $\mu = \mu_0$ com região crítica para (a) H_1: $\mu \neq \mu_0$, (b) H_1: $\mu > \mu_0$, e (c) H_1: $\mu < \mu_0$.

9-3 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Exemplo 9-6

A disponibilidade crescente de materiais leves com uma alta resistência tem revolucionado o projeto e a fabricação de tacos de golfe, particularmente os direcionadores. Tacos com cabeças ocas e faces muito finas podem resultar em tacadas muito mais longas, especialmente para jogadores de habilidades modestas. Isso é devido parcialmente ao "efeito mola" que a face fina impõe a bola. Bater na bola de golfe com a cabeça do taco e medir a razão entre a velocidade de saída da bola e a velocidade de chegada pode quantificar esse efeito mola. A razão de velocidades é chamada de coeficiente de restituição do taco. Um experimento foi feito em 15 tacos direcionadores produzidos por um determinado fabricante de tacos foram selecionados ao acaso e seus coeficientes de restituição foram medidos. No experimento, bolas de golfe foram atingidas a partir de um canhão de ar, de modo que a velocidade de chegada e a taxa de giro da bola poderiam ser precisamente controladas. É de interesse determinar se há evidênia (com α=0,05 que suporte a afirmação de que o coeficiente médio de restituição exceda 0,82). As observações seguem:

0.8411	0.8191	0.8182	0.8125	0.8750
0.8580	0.8532	0.8483	0.8276	0.7983
0.8042	0.8730	0.8282	0.8359	0.8660

9-3 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Exemplo 9-6

A média e o desvio-padrão da amostra são $\overline{x}$ = 0,83725 e s = 0,02465. O gráfico de probabilidade normal dos dados na Figura 9-10 suporta a suposição de que o coeficiente médio da restituição é normalmente distribuído. Uma vez que o objetivo do experimentalista é demonstrar que o coeficiente médio de restituição excede 0,82, um hipótese alternativa unilateral , é apropriada.

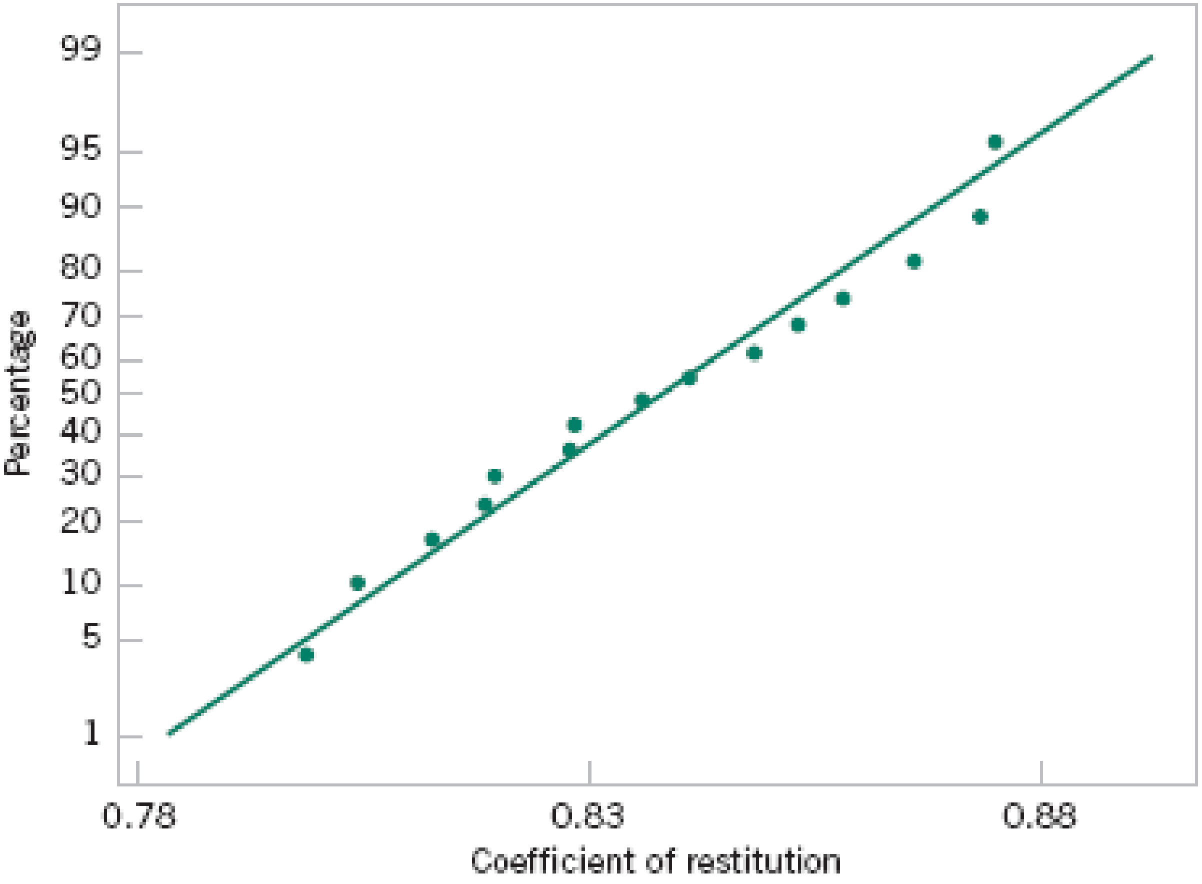
1. O parâmetro de interesse é o coeficiente médio de restituição, μ.
2. H_0: μ = 0,82.
3. H_1: μ > 0,82. Queremos rejeitar H_0 se o coeficiente médio de restituição exceder 0,82.
4. α = 0,05
5. A estatística de teste é:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

9-3 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Exemplo 9-6

Figura 9-10 Gráfico de probabilidade normal dos dados de carga de falha do Exemplo 9-6.



9-3 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Example 9-6

6. Rejeite H_0 se $t_0 > t_{0,05;14} = 1,761$

7. Calculos: Já que x = 0,83725, s = 0,02456, $\mu_0 = 0,82$ e n =15 temos

$$t_0 = \frac{0.83725 - 0.82}{0.02456/\sqrt{15}} = 2.72$$

8. Conclusões: uma vez que $t_0 = 2.72 > 1,761$, rejeitamos H_0 e concluímos, em um nível de 0,05 de significância, que o coeficiente médio de restituição excede 0,82.

9-3 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

9-3.2 Valor *P* para um Teste t

O valor P para um teste t é apenas o menor nível de significância no qual a hipótese nula seria rejeitada.

Para ilustrar, considere o teste t baseado em 14 graus de liberdade no Exemplo 9-6. Os valores críticos relevantes da Tabela IV do Apêndice são dados a seguir:

Critical Value:	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
Tail Area:	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005

Note que $t_0 =$ 2.72 no Exemplo 9-6, e que esse valor está entre dois valores tabelados, 2.624 e 2.977. Desse modo, o valor P tem de estar entre 0.01 e 0.005. Esses são efetivamente os limites superior e inferior para o valor P.

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9-4.1 Testes de Hipóteses para a Variância

Suponha que desejamos testar a hipótese de que a variância de uma população normal σ^2 seja igual a um valor específico, como σ^2_0, ou equivalentemente, que o desvio-padrão σ seja igual a σ_0. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de n aobservações proveniente dessa população. Para testar

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad (9\text{-}26)$$
$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Usaremos a estatística de teste

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \qquad (9\text{-}27)$$

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9-4.1 Testes de Hipóteses para a Variância

Se a hipótese nula H_0: $\sigma^2=\sigma^2_0$ for verdadeira, então a estatística de teste X^2_0, definida na Equação 9-27, segue a distribuição qui-quadrado, com n-1 graus de liberdade. Consequentemente, calculamos X^2_0, o valor da estatística de teste X^2_0 e a hipótese H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$ será rejeitada se

$$\chi^2_0 > \chi^2_{\alpha/2,n-1} \quad \text{or if} \quad \chi^2_0 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

Sendo $X^2_{\alpha/2,n-1}$ e $X^2_{1-\alpha/2,n-1}$ os pontos superior e inferior $100\alpha/2\%$ da distribuição qui-quadrado, com n-1 graus de liberdade, respectivamente. A Fig 9-11(a) mostra a região crítica.

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9-4.1 Testes de Hipóteses para a Variância

A mesma estatística de teste é usada para as hipóteses alternativas unilaterais. Para hipótese unilateral

$$H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad (9\text{-}28)$$
$$H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$$

rejeitaríamos H_0 se $X^2_0 > X^2_{\alpha,n-1}$, enquanto para a outra hipótese unilateral

$$H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad (9\text{-}29)$$
$$H_1\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Rejeitaríamos H_0 se $X^2_0 < X^2_{1-\alpha,n-1}$. As regiões críticas unilaterais são mostradas nas Figuras 9-11(b) e (c).

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9-4.1 Testes de Hipóteses para a Variância

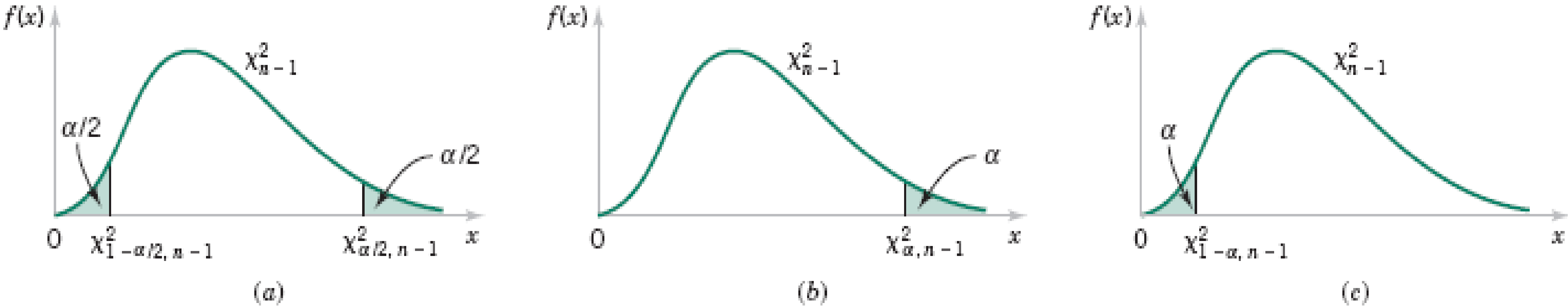


Figura 9-11 A distribuição de referência para o teste H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$, com valores da região crítica para (a), H_1: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$ (b), H_1: $\sigma^2 > \sigma^2_0$ e (c) H_1: $\sigma^2 < \sigma^2_0$.

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

Exemplo 9-8

Uma máquina de enchimento automático é usada para encher garrafas com detergente líquido. Uma amostra aleatória de 20 garrafas resulta em uma variância amostral de volume de enchimento de $s^2 = 0{,}0153$ (onça fluida)^2. Se a variância do volume de enchimento exceder 0,01 (onça fluida)^2, existirá proporção inaceitável de garrafas cujo enchimento não foi completo e cujo enchimento foi em demasia. Há evidências nos dados da amostra que sugira que o fabricante tenha um problema com garrafas cheias com falta e excesso de detergente? Use α=0,05 e considere que o volume de enchimento tenha uma distribuição normal. Usando o procedimento das oito etapas resulta no seguinte:

1. O parâmetro de interesse é a variância da população σ^2.
2. H_0: $\sigma^2 = 0.01$
3. H_1: $\sigma^2 > 0.01$
4. Α = 0,05
5. A estatística do teste é

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

Exemplo 9-8

6. Rejeitar H_0 se $X^2_0 > X^2_{0,05,19} = 30{,}14$

7. Cálculos

$$\chi_0^2 = \frac{19(0.0153)}{0.01} = 29.07$$

8. Conclusões: uma vez que $X^2_0 = 29{,}07 < X^2_{0,05,19} = 30{,}14$, concluímos que não há evidência forte de que a variância no volume de enchimento excede 0,01 (onça fluida)^2.

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9-4.2 Erro Tipo II e Escolha do Tamanho da Amostra

Para a hipótese alternativa bilateral:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

Curvas características operacionais para os testes qui-quadrado na Seção 9-4.1 são fornecidas nos Gráficos VI*i* and VI*j*

9-4 Testes Para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

Exemplo 9-9

Considere o problema do enchimento das garrafas do Exemplo 9-8. Se a variância do processo de enchimento exceder 0,01 (onça fluida)2, então muitas garrafas não serão cheias completamente. Dessa forma, o valor da hipótese do desvio-padrão é σ0 = 0,10. Suponha que se o desvio-padrão verdadeiro do processo de enchimento excedesse esse valor por 25%, gostaríamos de detectar isso com uma probabilidade de no mínimo 0,8. O tamanho da amostra de n=20 é adequado? Para resolver esse problema, note que requeremos

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{0.125}{0.10} = 1.25$$

Esse é o parâmetro da abscissa para o Gráfico VIIk. A partir desse gráfico, com n=20 e λ=1,25, encontramos que β ≅ 0,6. Por conseguinte, há somente cerca de 40% de chance de a hipótese nula ser rejeitada, se o desvio-padrão verdadeiro for realmente tão alto quanto σ=0,125 onça fluida.

De modo a reduzir o erro β, uma amostra de maior tamanho tem de ser usada. A partir da curva de característica operacional, com β=0,20 e λ = 1,25, encontramos que n = 7, aproximadamente. Assim, se quisermos que o teste tenha o desempenho requerido, o tamanho da amostra tem de ser no mínimo 75 garrafas.

9-5 Testes Para a Proporção de uma População

9-5.1 Testes para uma Proporção, Amostra Grande

Em muitos problemas de engenharia de tomadas de decisão incluem testar hipóteses usando teste p.

$$H_0: p = p_0$$
$$H_1: p \neq p_0$$

Uma **estatística** do teste:

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \qquad (9\text{-}32)$$

and reject $H_0: p = p_0$ if

$$z_0 > z_{\alpha/2} \quad \text{or} \quad z_0 < -z_{\alpha/2}$$

9-5 Testes Para a Proporção de uma População

Exemplo 9-10

Um fabricante de semicondutores produz controladores usados em aplicações no motor de automóveis. O consumidor requer que a fração de defeitos em uma etapa crítica da fabricação não exceda 0,05 e que o fabricante demonstre uma capacidade de processo desse nível de qualidade, usando $\alpha = 0,05$. O fabricante de semicondutores retira uma amostra aleatória de 200 aparelhos e encontra que quatro deles são defeituoso. O fabricante pode demonstrar uma capacidade de processo para o consumidor? Podemos resolver esse problema usando o procedimento das 8 etapas do teste de hipótese, conforme se segue

1. O parâmetro de interesse é a fração defeituosa do processo p
2. $H_0 : p = 0,05$
3. $H_1 : p < 0,05$

   Essa formulação do problema permitirá ao fabricante fazer uma afirmativa forte sobre a capacidade defeituoso do processo p se a hipótese nula $H_0{:}p=0,05$ for rejeitada

4. $\alpha = 0,05$

9-5 Testes Para a Proporção de uma População

Exemplo 9-10

5. A estatística de teste é (da Equação 9-32)

$$z_0 = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

Sendo x = 4 n = 200 e $p_0 = 0.05$

6. Rejeite H_0:p = 0,05 se $z_0 < -z_{0,05} = -1,645$

7. Cálculos: a estatística de teste é

$$z_0 = \frac{4 - 200(0.05)}{\sqrt{200(0.05)(0.95)}} = -1.95$$

8. Conclusões: uma vez que $z_0 = -1,95 < -z_{0,05} = 1,645$, rejeitamos H_0 e concluímos que a fração defeituosa do processo, p, é menor do que 0,05. O valor P para esse valor da estatística de teste z_0 é P = 0,0256, que é menor que α. Concluímos que o processo é capaz.

9-5 Testes Para a Proporção de uma População

Outra forma de Estatíticas de Teste Z_0

$$Z_0 = \frac{X/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \quad \text{ou} \quad Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

9-5 Testes Para a Proporção de uma População

9-5.2 Erro Tipo II e Escolha do Tamanho da Amostra

Para Alternativa Bilateral

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \quad (9\text{-}34)$$

Se a Alternativa for $p < p_0$

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \quad (9\text{-}35)$$

Se a Alternativa for $p > p_0$

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \quad (9\text{-}36)$$

9-5 Testes Para a Proporção de uma População

9-5.3 Erro do Tipo II e Escolha do Tamanho da Amostra

Para alternativa Bilateral

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right]^2 \qquad (9\text{-}37)$$

Para alternativa Unilateral

$$n = \left[\frac{z_{\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right]^2 \qquad (9\text{-}38)$$

9-5 Testes Para a Proporção de uma População

Exemplo 9-11

Considere o fabricante de semicondutores do Exemplo 9-10.
Suponha que a fração defeituosa de seu processo seja realmente o = 0,03. Qual é o erro β para esse teste de capacidade de processo, que usa n=200 e α=0,05?

O erro β pode ser calculado usando a Equação 9-35, conforme se segue:

$$\beta = 1 - \Phi\left[\frac{0.05 - 0.03 - (1.645)\sqrt{0.05(0.95)/200}}{\sqrt{0.03(1 - 0.03)/200}}\right] = 1 - \Phi(-0.44) = 0.67$$

Assim, a probabilidade é cerca de 0,7 do fabricante de semicondutores falhar em concluir que o processo seja capaz, se a fração verdadeira defeituosa do processo for p = 0,03 (3%). Ou seja, a potência do teste contra essa alternativa particular é somente cerca de 0,3. Isso parece ser um grande erro β (ou baixa potência), porém a diferença entre p =0,05 e p =0,03 é razoavelmente pequena e o tamanho da amostra n = 200 não é particularmente grande.