8

Intervalos Estatísticos para Uma Única Amostra

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Depois de um cuidadoso estudo deste capítulo, você deve ser capaz de:

1.Construir intervalos de confiança para a média de uma distribuição normal, usando tanto o método da distribuição normal como o da distribuição t
2.Construir intervalos de confiança para a variância e o desvio-padrão de uma distribuição normal
3.Construir intervalos de confiança para a proporção de uma população
4.Usar um método geral de construção de um intervalo aproximado de confiança para um parâmetro
5.Construir intervalos de previsão para uma observação futura
6.Construir um intervalo de tolerância para uma população normal
7.Explicar os três tipos de estimativas de intervalo: intervalos de confiança, intervalos de previsão e intervalos de tolerância

8-1 Introdução

• No capítulo anterior, ilustramos como um parâmetro pode ser estimado a partir de dados de uma amostra. Entretanto, é importante entender quão boa é a estimativa obtida.

• Uma estimativa de intervalo para um parâmetro de uma população é chamada de um **intervalo de confiança.**

• Três tipos de intervalo serão apresentados:

  • Intervalo de Confiança

  • Intervalo de Predição

  •Intervalo de Tolerância

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.1 Desenvolvimento do Intervalo de Confiança e suas Propriedades

Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seja uma amostra proveniente de uma distribuição normal, com média desconhecida μ e variância conhecida σ^2. Dos resultados do Capítulo 5, sabemos que a média da amostra $\overline{X}$ é normalmente distribuída, com média μ e variância σ^2/n. Podemos padronizar $\overline{X}$ subtraindo a média e dividindo pelo desvio-padrão, que resulta na variável:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (8\text{-}3)$$

Agora, temos uma variável Z com distribuição normal padrão.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.1 Desenvolvimento do Intervalo de Confiança e suas Propriedades

Uma estimativa de intervalo de confiança para μ é um intervalo da forma l ≤ μ ≤ u , em que os extremos l e u são calculados a partir de dados da amostra. Uma vez que diferentes amostras produzirão diferentes valores de l e u, esses extremos são valores variáveis aleatórias L e U, respectivamente. Suponha que possamos determinar os valores de L e U, tal que a seguinte afirmação de probabilidade seja verdadeira:

$$P\{L \leq \mu \leq U\} = 1 - \alpha \qquad (8\text{-}4)$$

Sendo 0≤α≤1. Há uma probabilidade de 1 – α de selecionar uma amostra para a qual o IC conterá o valor verdadeiro de μ. Uma vez que tenhamos selecionado a amostra, de modo que $X_1=x_1$, $X_2=x_2$, … , $X_n=x_n$ e calculado l e u, o **intervalo resultante de confiança** para μ é:

$$l \leq \mu \leq u \qquad (8\text{-}5)$$

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.1 Desenvolvimento do Intervalo de Confiança e suas Propriedades

- Os extremos ou limites de *l* e *u* são chamados de limites inferior e superior de confiança, respectivamente e 1-α é chamado de coeficiente de confiança. Visto que Z segue uma distribuição normal padrão, Podemos escrever:

$$P\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

Agora, manipule as grandezas dentro das chaves, (1) multiplicando por σ/√n, (2)subtraindo $\overline{X}$ de cada termo, e (3) multiplicando por -1. Isso resulta em:

$$P\left\{\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha \qquad (8\text{-}6)$$

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.1 Desenvolvimento do Intervalo de Confiança e suas Propriedades

Definição

Se $\bar{x}$ for média amostral de uma amostra aleatória, de tamanho n, proveniente de uma população com variância conhecida σ^2, um intervalo com $100(1-\alpha)\%$ de confiança para μ é dado por

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \qquad (8\text{-}7)$$

Sendo $z_{\alpha/2}$ o ponto superior com $100\alpha/2\%$ da distribuição normal padrão.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Exemplo 8-1

A norma padrão ASTM E23 define métodos padrões de testes para testar o impacto em barras entalhadas feitas com materias metálicos. A técnica Charpy V-notch (CVN) mede a energia de impacto e é frequentemente utilizada para determinar se um material experimenta ou não uma transição dúctil-frágil com o decréscimo de temperatura. Dez medidas de energia (J) de impacto nos corpos-de-prova de aço A238, cortados a 60ºC, são: 64.1,64.7,64.5,64.6, 64.5,64.3,64.6,64.8,64.2 e 64.3. Considere que a energia de impacto seja normalmente distribuída, com σ = IJ Queremos encontrar um IC de 95% para μ, a energia média de impacto. As grandezas requeridas são: $z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$, n=10, σ = 1 e $\bar{x}$ = 64,46. O IC resultante de 95% é encontrado a partir da equação 8-7, como a seguir.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$64.46 - 1.96\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 64.46 + 1.96\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$63.84 \leq \mu \leq 65.08$$

Ou seja, baseado nos dados da amostra, uma faixa de valores altamente plausíveis para a energia média de impacto para o aço !238 a 60ºC é 63,84J ≤μ≤ 65,08J

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Interpretando um Intervalo de Confiança

- Um intervalo de confiança é um **intervalo aleatório**
- A afimação apropriada é que o intervalo observado [l,u] envolve o verdadeiro valor de μ, com **confiança** de $100(1-\alpha)$.
- Examine a Figura 8-1 no próximo slide.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

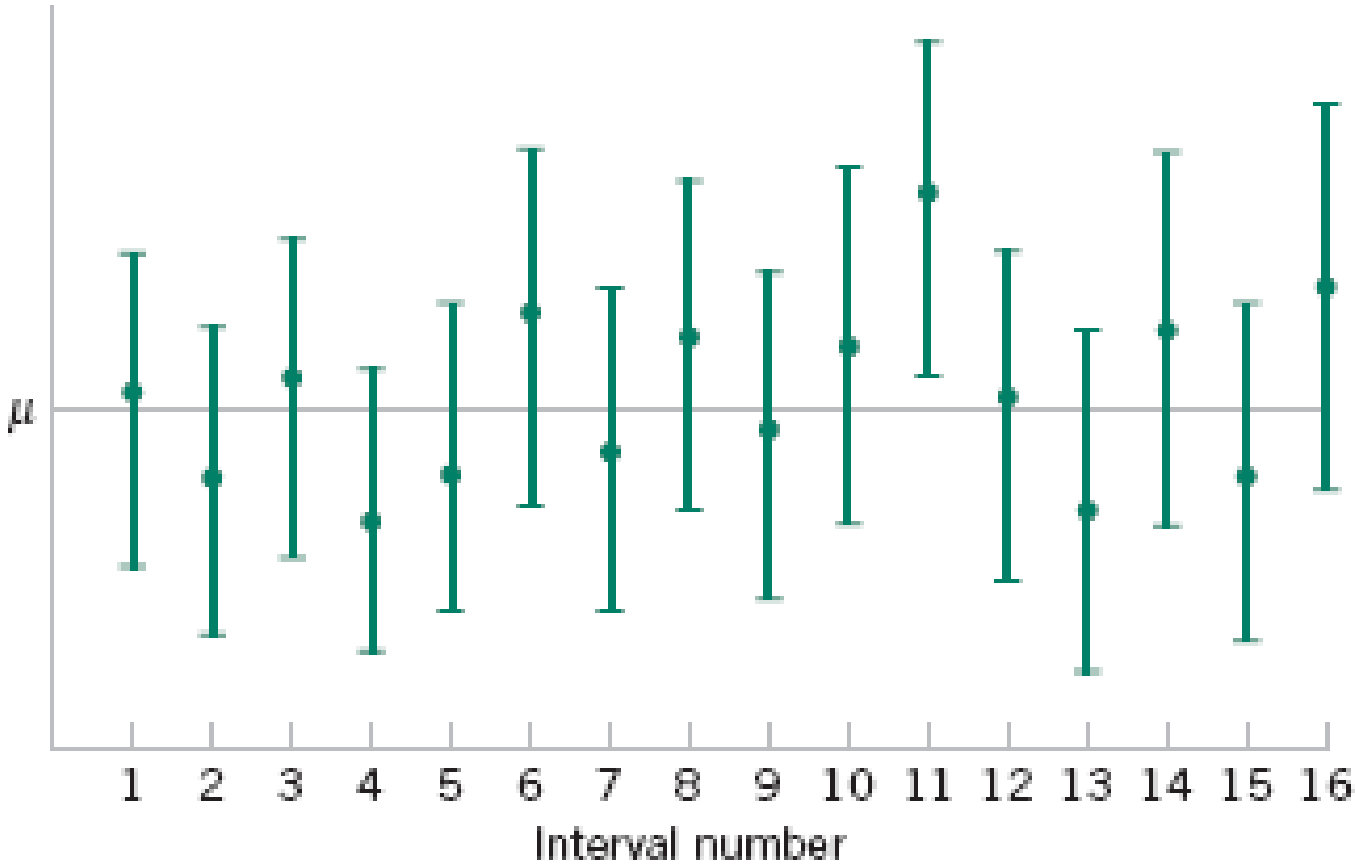


Figura 8-1 Construção repetida de um intervalo de confiança para μ.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Nível de Confiança e Precisão da Estimação

O comprimento de um intervalo é uma medida de **precisão** da estimação.

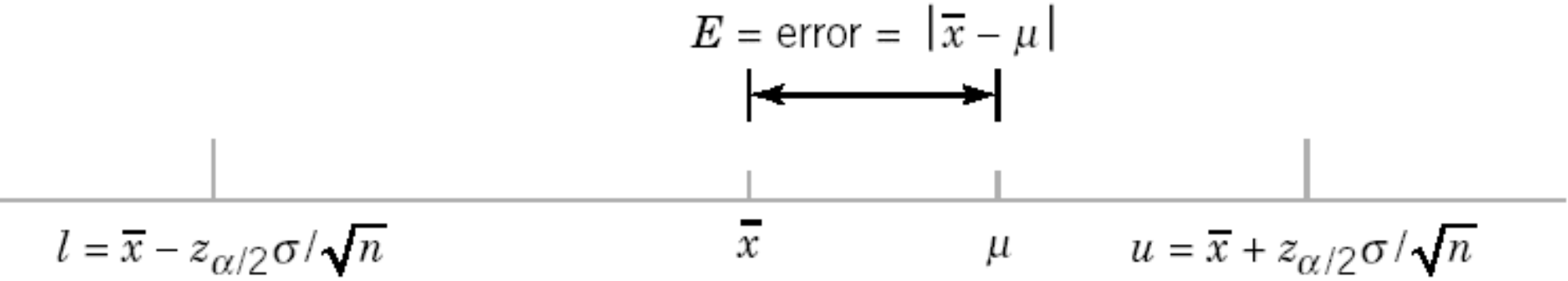


Figura 8-2 Erro em estima μ com $\bar{x}$.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.2 Escolha do Tamanho da Amostra

Definição

Se $\bar{x}$ for usada como uma estimativa de μ, podemos estar 100(1-α)% confiantes de que o erro $|\bar{x} - \mu|$ não excederá um valor especificado E quando o tamanho da amostra for

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 \qquad (8\text{-}8)$$

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Exemplo 8-2

Para ilustrar o uso desse procedimento, considere o teste CVN, descrito no Exemplo 8-1, e suponha que quiséssemos determinar quantos espécimes teríamos de testar para assegurar que o IC de 95% para μ para o aço A238, cortado a 60º, tivesse um comprimento de no máximo 1,0J. Uma vez que o erro de estimação, E, é metado do comprimento do IC, para determinar n usamos a Equação 8-8, com E = 0,5, $\sigma = 1$ e $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. O tamanho requerido de amostra é 16

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left[\frac{(1.96)1}{0.5}\right]^2 = 15.37$$

E visto que n tem de ser um inteiro, o tamanho requerido de amostra é n=16.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.3 Limites Unilaterais de Confiança

Definição

Limites Unilaterais de Confiança para a Média, Variância Conhecida

O **Limite superior** com 100(1 - α)% **de confiança** para μ é

$$\mu \leq u = \bar{x} + z_\alpha \sigma/\sqrt{n} \qquad (8\text{-}9)$$

E o **Limite inferior** com 100(1 - α)% **de confiança** para μ é

$$\bar{x} - z_\alpha \sigma/\sqrt{n} = l \leq \mu \qquad (8\text{-}10)$$

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.4 Método Geral para Deduzir um Intervalo de Confiança

É fácil dar um método geral para encontrar um intervalo de confiança para um parâmetro desconhecido θ. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com n observações. Suponha que possamos encontrar uma estatística $g(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$ com as seguintes propriedades:

1. $g(X_1, X_2, \ldots, X_n ; \theta)$ depende da amotra e de θ.

2. A distribuição de probabilidades de $g(X_1, X_2, \ldots, X_n ; \theta)$ não depende de θ ou de qualquer outro parâmetro desconhecido.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.4 Método Geral para Deduzir um Intervalo de Confiança

No caso considerado nesta seção, o parâmetro $\theta = \mu$. A variável aleatória $g(X_1, X_2, \ldots, X_n ; \mu) = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ e satisfaz ambas as condições anteriores; ela depende da amostra e de μ, e tem uma distribuição normal padrão desde que σ seja conhecida. Agora tem-se de encontrar as constantes C_L e C_U de modo a

$$P[C_L \leq g(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta) \leq C_U] = 1 - \alpha \qquad (8\text{-}11)$$

Devido à propriedade 2, C_L e C_U não dependem de θ. Em nosso exemplo, $C_L = -z_{\alpha/2}$ e $C_U = z_{\alpha/2}$. Finalmente, você tem de manipular as desigualdades no enunciado de probabilidade, de modo a

$$P[L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = 1 - \alpha \qquad (8\text{-}12)$$

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.4 Método Geral para Deduzir um Intervalo de Confiança

Isso fornce $L(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ e $U(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ como os limites inferior e superior de confiança, definindo o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para θ. A grandeza $g(X_1,X_2,\ldots,X_n ; \theta)$ é frequentemente chamada de uma "grandeza pivotal", visto que pivotamos essa grandeza na Equação 8-11 para produzir a Equação 8-12. Em nosso exemplo, manipulamos a grandeza pivotal $(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ para obter $L(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \overline{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ e $U(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \overline{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

8-2.5 Intervalo de Confiança Aproximado para a Média,

Definição

Quando n tende para infinito, a grandeza

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Tem uma distribuição normal padrão aproximada. Consequentemente,

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (8\text{-}13)$$

É um **intervalo de confiança** para μ para **amostras grandes**, com nível de confiança de aproximadamente 100(1-α)%.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Exemplo 8-4

Um artigo no volume de 1993 da *Transactions of the American Fisheries Society* reportou os resultados de um estudo para investigar a contaminação por mercúrio em um peixe de boca grande. Uma mostra de peixe foi selecionada proveniente de 53 lagos da Flórida e mediu-se a concentração (em ppm) de mercúrio no tecido muscular. Os valores de concentração de mercúrio foram

1.230	0.490	0.490	1.080	0.590	0.280	0.180	0.100	0.940
1.330	0.190	1.160	0.980	0.340	0.340	0.190	0.210	0.400
0.040	0.830	0.050	0.630	0.340	0.750	0.040	0.860	0.430
0.044	0.810	0.150	0.560	0.840	0.870	0.490	0.520	0.250
1.200	0.710	0.190	0.410	0.500	0.560	1.100	0.650	0.270
0.270	0.500	0.770	0.730	0.340	0.170	0.160	0.270	

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Exemplo 8-4 (continuação)

O sumário das estatísticas provenientes do Minitab está disposto a seguir:

Descriptive Statistics: Concentration

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
Concentration	53	0.5250	0.4900	0.5094	0.3486	0.0479

Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3
Concentration	0.0400	1.3300	0.2300	0.7900

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Exemplo 8-4 (continuação)

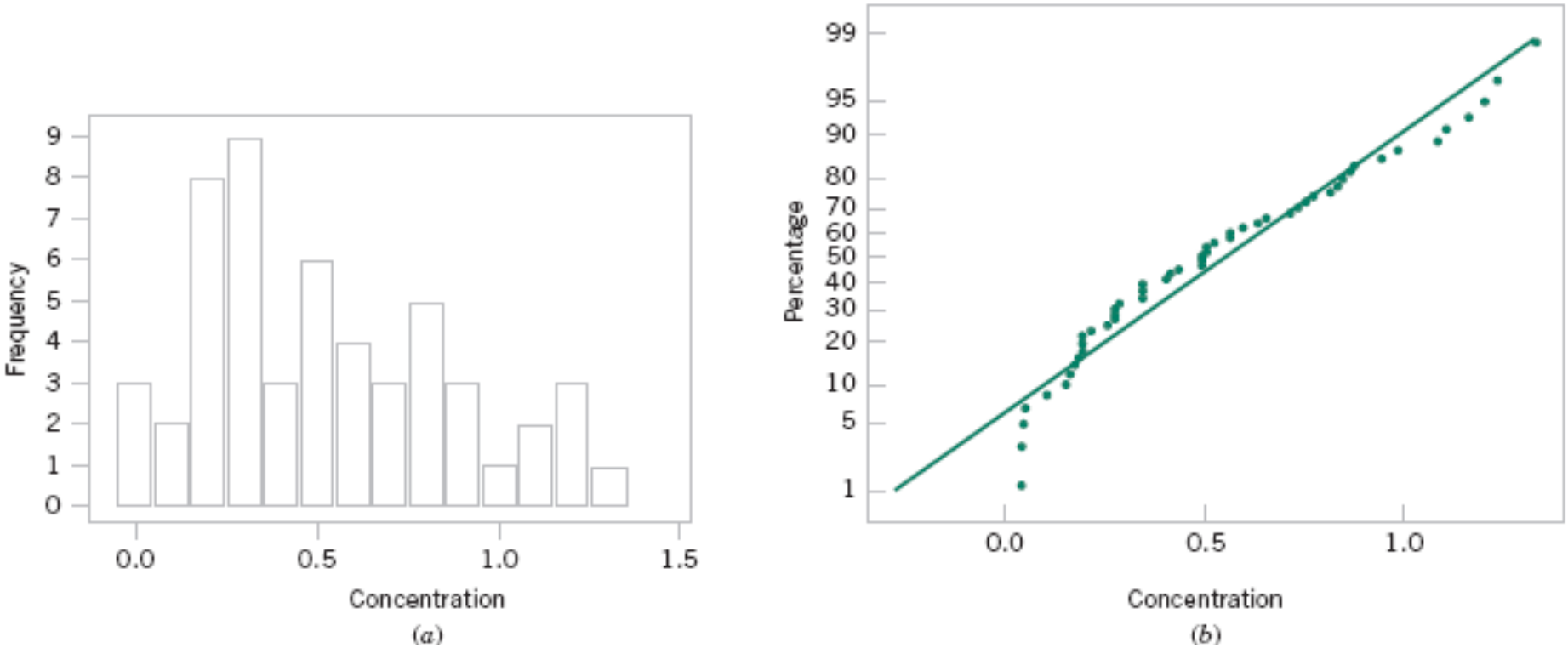


Figura 8-3 Concentração de mercúrio em um peixe de boca grande. (a) Histograma. (b)Gráfico de probabilidade normal.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Exemplo 8-4 (continuação)

A Figura 8-3 (a) e (b) apresenta o histograma e o gráfico de probabilidade normal dos dados de concentração de mercúrio. Ambos os gráficos indicam que a distribuição de concentração de mercúrio não é normal e é positivamente deslocada. Queremos achar um IC aproximado para μ, com 95%. Uma vez que n>40, a suposição de normalidade não é necessária para usar a Equação 8-13. As grandezas requeridas são n = 53, $\bar{x}$ =0,5250, s = 0,3486 e $z_{0,025}$ = 1,96. O IC aproximado para μ com 95% é

$$\bar{x} - z_{0.025}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{0.025}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0.5250 - 1.96\frac{0.3486}{\sqrt{53}} \le \mu \le 0.5250 + 1.96\frac{0.3486}{\sqrt{53}}$$

$$0.4311 \le \mu \le 0.6189$$

Esse intervalo é razoavelmente largo visto que há uma grande variabilidade nas medidas de concentração de mercúrio.

8-2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal de Variância Conhecida

Intervalo de Confiança Aproximado para Amostras Grandes

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \qquad (8\text{-}14)$$

8-3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

8-3.1 Distribuição *t*

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2 desconhecidas. A variável aleatória

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad (8\text{-}15)$$

Tem uma distribuição t, com n-1 graus de liberdade.

8-3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

8-3.1 Distribuição *t*

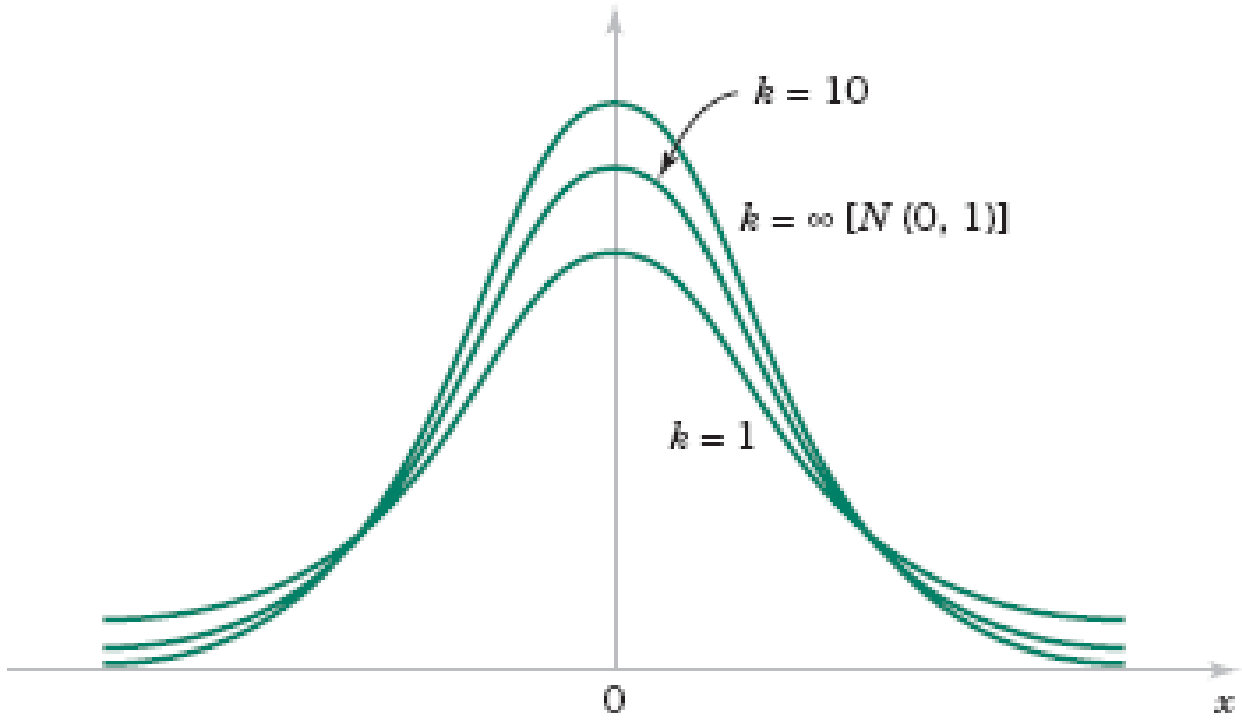


Figura 8-4 Funções densidade de probabilidade de várias distribuições t.

8-3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

8-3.1 Distribuição *t*

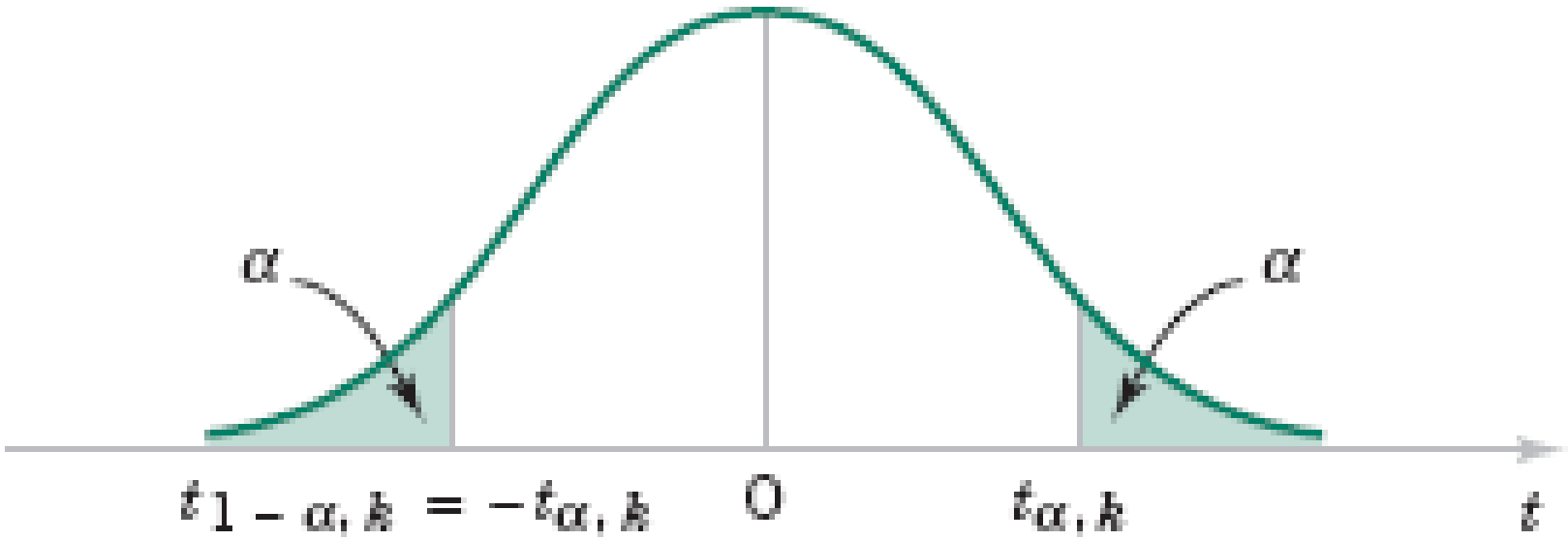


Figura 8-5 Pontos percentuais da distribuição *t*.

8-3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

8-3.2 Intervalo de Confiança *t* para μ

Se $\bar{x}$ e s forem média e o desvio-padrão de uma amostra aleatória proveniente de uma população normal, com variância desconhecida σ^2, então um **intervalo de confiança de 100(1-α)% para a média μ** é dado por

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \qquad (8\text{-}18)$$

Sendo $t_{\alpha/2,\eta-1}$ o ponto superior 100α/2% da distribuição t, com n-1 graus de liberdade.

Limites Unilaterais de confiança para a média de uma distribuição normal são também de interesse e são fáceis de usar. Use simplesmente o limite inferior ou superior apropriado da Equação 8-18 e troque $t_{\alpha/2,n-1}$ por $t_{\alpha,n-1}$.

8-3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Exemplo 8-5

Um artigo no periódico Material Engineering (1989, Vol II, No.4, pp.275-281) descreve os resultados de testes trativos de adesão em 22 corpos-de-prova de liga U-700. A carga no ponto de falha do corpo-de-prova é dada a seguir (em megapascal):

19.8	10.1	14.9	7.5	15.4	15.4
15.4	18.5	7.9	12.7	11.9	11.4
11.4	14.1	17.6	16.7	15.8	
19.5	8.8	13.6	11.9	11.4	

A média da amostra é $\bar{x}$ = 13,71 e o desvio-padrão é s = 3,55. As Figs. 8-6 e 8-7 mostram um diagrama de caixa e um gráfico de probabilidades normal dos dados de testes trativos de adesão, respectivamente. Esses gráficos fornecem um bom suporte para a suposição de que a população é normalmente distribuída. Queremos encontrar um IC de 95% para μ. Uma vez que n = 22, temos n – 1 = 21 graus de liberdade para t; logo t0,025,21 = 2,080. O IC resultante é

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n}$$

$$13.71 - 2.080(3.55)/\sqrt{22} \le \mu \le 13.71 + 2.080(3.55)/\sqrt{22}$$

$$13.71 - 1.57 \le \mu \le 13.71 + 1.57$$

$$12.14 \le \mu \le 15.28$$

O IC é razoavelmente amplo porque há uma grande variabilidade nas medidas do teste trativo de adesão.

8-3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

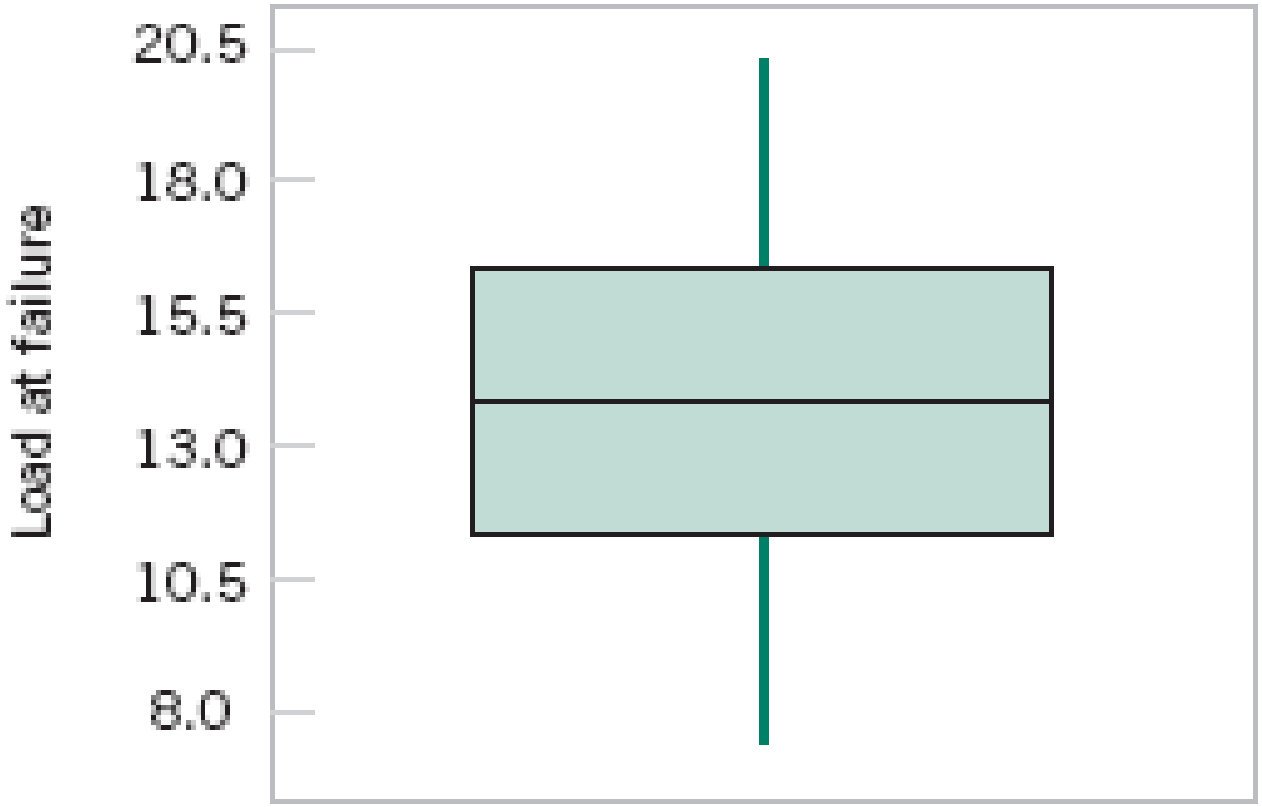


Figura 8-6 Diagrama de Caixa e Linha para os dados de carga de falha do Exemplo 8-5.

8-3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

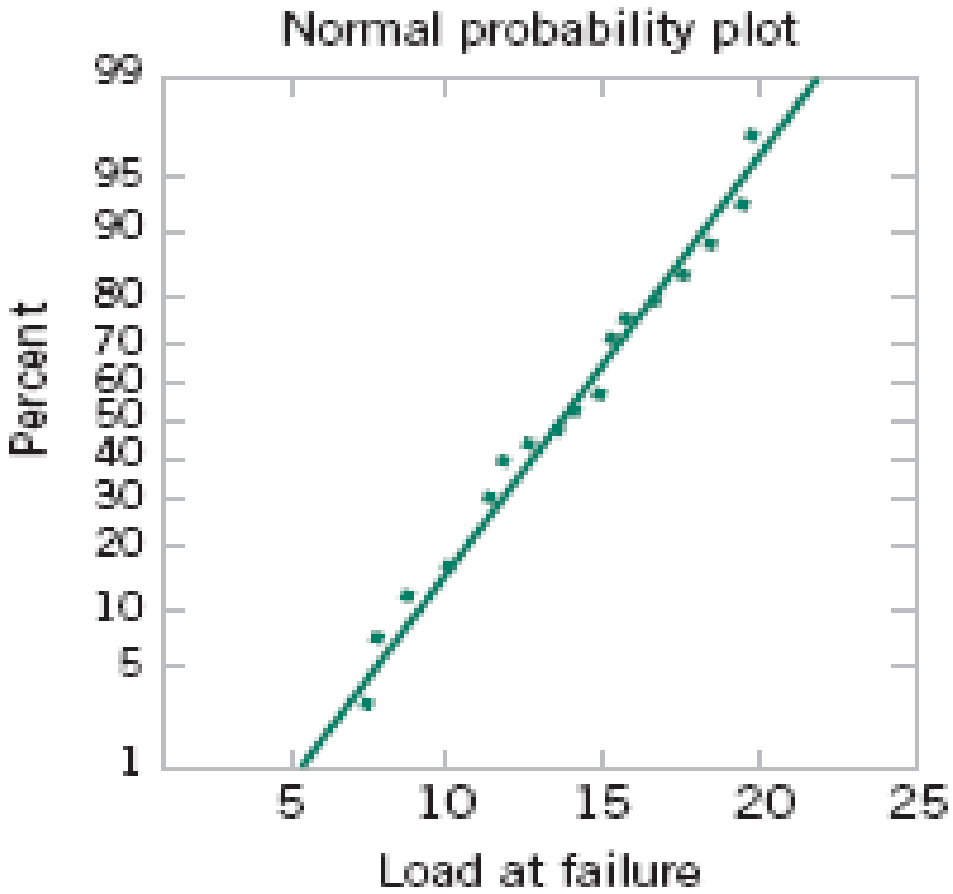


Figura 8-7 Gráfico de probabilidade normal dos dados de carga de falha do Exemplo 8-5.

8-4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

Definição

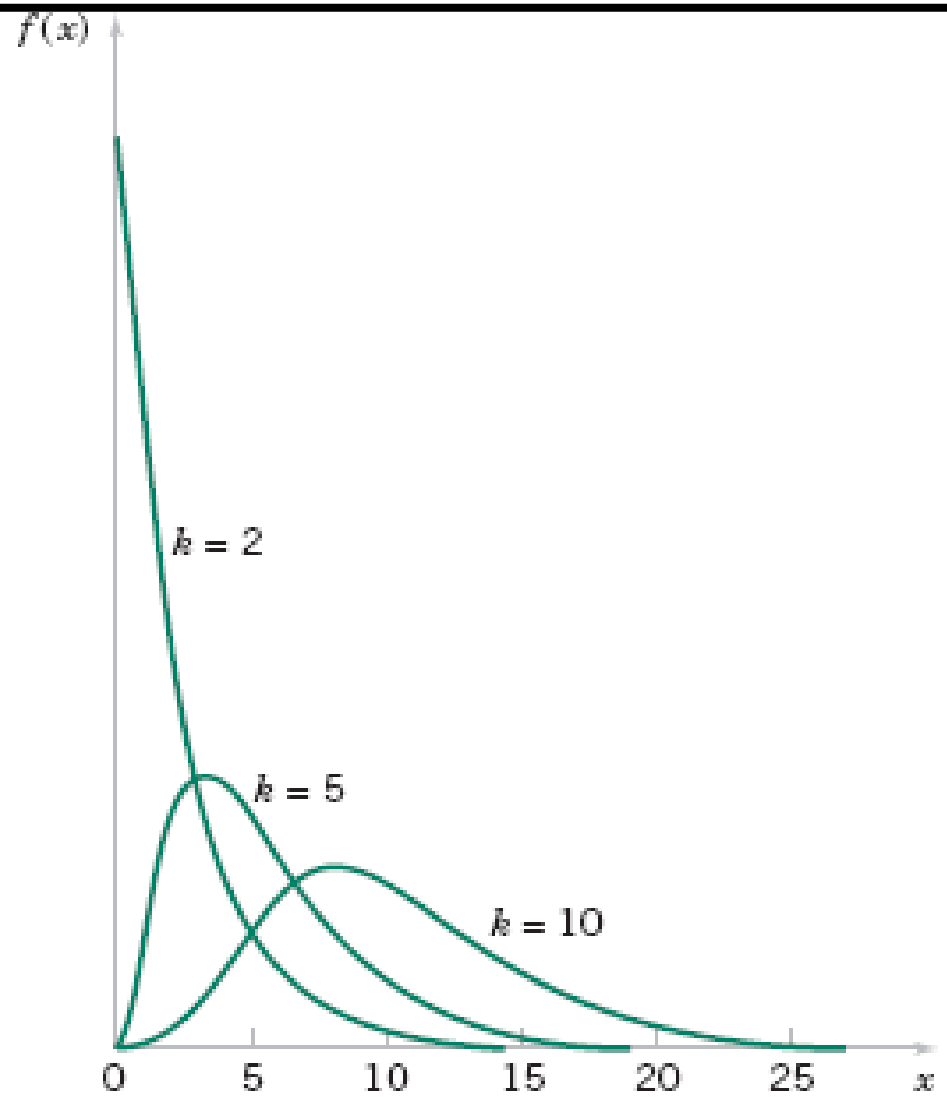
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2 , e seja S^2 a variância da amostra. Então a variável aleatória

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \qquad (8\text{-}19)$$

Tem uma distribuição qui-quadrado (X^2), com n-1 graus de liberdade.

8-4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

Figura 8-8 Funções densidade de probabilidade de várias distribuições χ^2.



8-4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

Definição

Se s^2 for a variância amostral de uma amostra aleatória de η observações provenientes de uma população normal, com variância desconhecida σ^2, então um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para σ^2 será

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \qquad (8\text{-}21)$$

Sendo $X^2_{\alpha/2,n-1}$ e $X^2_{1-\alpha/2,n-1}$ os pontos percentuais superior e inferior $100\alpha/2\%$ da distribuição qui-quadrado, com n-1 graus de liberdade, respectivamente. Um intervalo de confiança para σ tem limites inferior e superior que são as raízes quadradas dos limites correspondentes na Equação 8-21.

8-4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

Limites Unilaterais de Confiança para Variância

Os limites inferior e superior de confiança de 100(1-α)% para σ^2 são

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}} \leq \sigma^2 \quad \text{and} \quad \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}} \qquad (8\text{-}22)$$

Respectivamente.

8-4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

Exemplo 8-6

Uma máquina automática de enchimento é usada para encher garrafas com detergente líquido. Uma amostra aleatória de 20 garrafas resulta em uma variância amostral de volume de enchimento de $s^2 = 0{,}0153$ (onça fluída)^2. Se a variância do volume de enchimento for muito grade, existirá uma proporção inaceitável de garrafas cujo enchimento não foi completo e cujo enchimento foi em demasia. Consideraremos que o volume de enchimento seja distribuído de forma aproximadamente normal. Um intervalo superior de confiança de 95% é encontrado a partir da Equação 8-22 conforme se segue:

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95,19}}$$

Ou

$$\sigma^2 \leq \frac{(19)0.0153}{10.117} = 0.0287 \text{ (fluid ounce)}^2$$

Essa última afimação pode ser convertida em um intervalo de confiança para o desvio-padrão σ, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, resultando em

$$\sigma \leq 0.17$$

Consequentemente, com um nível de confiança de 95%, os dados indicam que o desvio-padrão do processo poderia ser tão grande quanto 0,17 onça fluída

8-5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

Aproximação da Normal para uma Proporção Binomial

Se n for grande, a distribuição de

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Será aproximadamente normal padrão.

A grandeza $\sqrt{p(1-p)/n}$ é chamada de erro-padrão do estimador pontual $\hat{P}$.

8-5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

Se $\hat{p}$ é a proporção de observações em uma amostra aleatória de tamanho n que pertença a uma classe de interesse, então um intervalo aproximado de confiança de 100(1-α)% para a proporção p da população que pertença a essa classe é

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \qquad (8\text{-}25)$$

Sendo $z_{\alpha/2}$ o ponto superior α/2% da distribuição normal padrão.

8-5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

Exemplo 8-7

Em uma amostra aleatória de 85 mancais de eixos de manivelas de motores de automóveis, 10 tem um acabamento de superfície que é mais rugoso do que as especificações permitiam. Consequentemente, uma estimativa pontual da proporção de mancais na população que excede a especificação de rugosidade é $\hat{p}$ = x/n = 10/85 = 0.12. Um intervalo bilateral de confiança para p é calculado da Equação 8-25 como:

$$\hat{p} - z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Ou

$$0.12 - 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}} \leq p \leq 0.12 + 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}}$$

Que simplifica para

$$0.05 \leq p \leq 0.19$$

8-5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

Escolha do Tamanho da Amostra

O tamanho da amostra para um valor específico de E é dado por

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 p(1-p) \qquad (8\text{-}26)$$

Um limite superior para n é dado por

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (0.25) \qquad (8\text{-}27)$$

8-5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

Exemplo 8-8

Considere a situação do Exemplo 8-7. Quão grande deverá ser a amostra, se quisermos estar 95% confiantes de que o erro em usar $\hat{p}$ para estimar p é menor do que 0,05? Usando $\hat{p}$ = 0,12 como uma estimativa inicial de p, encontramos, da Equação 8-26, que tamanho requerido da amostra é

$$n = \left(\frac{z_{0.025}}{E}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 0.12(0.88) \cong 163$$

Se quiséssemos estar no mínimo 95% confiantes de que nossa estimativa $\hat{p}$ da proporção verdadeira ρ estivesse dentro de 0.05, independentemente do valor de p, então usaríamos a Equação 8-27 para encontrar o tamanho da amostra

$$n = \left(\frac{z_{0.025}}{E}\right)^2 (0.25) = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 (0.25) \cong 385$$

Note que se tivéssemos a informação relativa ao valor de ρ, tanto a partir de uma amostra preliminar como de uma experiência passada, poderíamos usar uma amostra menor, embora mantendo a precisão desejada de estimação.

8-5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

Limites Unilaterais de Confiança

Os limites aproximados inferior e superior de confiança de 100(1-α)% são

$$\hat{p} - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \qquad \text{and} \qquad p \leq \hat{p} + z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{8-28}$$

Respectivamente.