Variáveis Aleatórias Discretas
e
Distribuições de Probabilidade

Objetivos do aprendizado

a. Determinar probabilidades a partir de funções de probabilidade
b. Determinar probabilidades a partir de funções de distribuição cumulativa.
a. Calcular média e variância para variáveis discretas.

3-1 Variáveis aleatórias discretas

Exemplos 3.1 e 3.2

- **3.1 Um sistema de comunicação de voz contem 48 linhas externas. Dado um tempo, o sistema é observado e algumas das linhas estão sendo usadas. Seja X o número de linhas uso. X pode assumir valores inteiros 0 até 48. For examplo, x=10.**
- **3.2 Seja X o número de bits com erro nos quatro próximos bits transmitidos. Os valores possíveis para X são {0,1,2,3,4}.**

3-2 Distribuições de probabilidade e funções de probabilidade

As probabildidades para os valores da variável X do exemplo 3.2 são:

P(X=0)=0,6561 P(X=1)= 0,2916 P(X=2)= 0,0486

P(X=3)=0,0036 P(X=4)= 0,0001

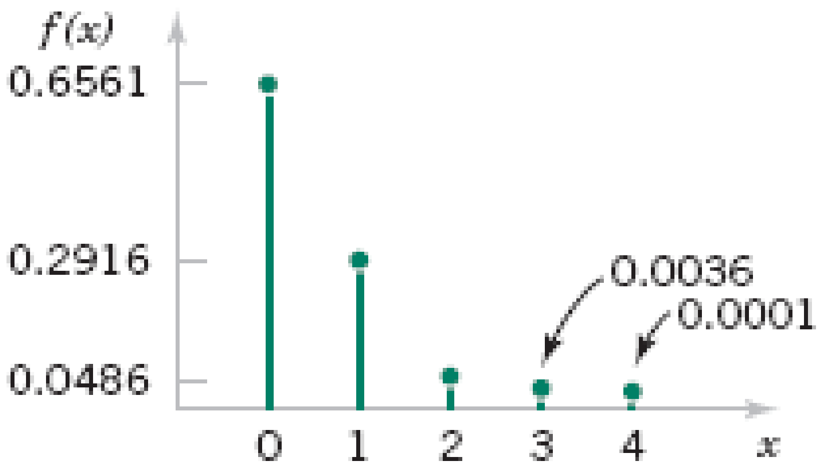

Figura 3-1 Distribuição de probabilidade para bits com erro.

3-2 Distribuições de probabilidade e funções de probabilidade

Definição

Para uma variável aleatória X com possíveis valores $x_1, \ldots, x_n$, a função de probabilidade é uma função tal que

(1) $f(x_i) \geq 0$

(2) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

(3) $f(x_i) = P(X = x_i)$ (3-1)

Examplo 3-5

Contaminação de pastilhas

Seja a variável aleatória X o de pastilhas de semicondutores que necessitam ser analisadas , de modo a detectar uma grande partícula de contaminação. Seja 0,01 a probabilidade de uma pastilha conter uma grande partícula e que as pastilhas sejam independentes. Determine a distribuição de probabilidade de X. Seja *p* uma pastilha em que uma grande partícula esta presente e *a* uma pastilha em que essa partícula esteja ausente.

O espaço amostral do experimento é infinito. Isto é
S={p, ap, aap, aaap, aaaap, ... }.

Considere P(X=1) = p=0,01, P(X=2)=0,99(0,01)=0,0099

Examplo 3-5 (continuação)

Contaminação de pastilhas

Uma formula geral é:

$$P(X = x) = \underbrace{P(aa \ldots ap)}_{(x-1)a\text{'s}} = 0.99^{x-1}(0.01), \quad \text{para } x = 1, 2, 3, \ldots$$

Temos que f(x)≥0. O fato da soma das probabilidades é igual a 1 é deixado como exercício.
Esse é um exemplo de uma variável aleatória geométrica.

3-3 Funções de Distribuição Acumulada

Definição

A função de distribuição acumulada ou cumulativa de uma variável discreta X é denotada por F(x)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

F(x) satisfaz as seguintes propriedades

(1) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

(2) $0 \leq F(x) \leq 1$

(3) If $x \leq y$, then $F(x) \leq F(y)$ (3-2)

Examplo 3-8

Suponha que uma produção diária de 850 peças fabricadas contenha 50 delas que não obedecem aos requerimentos do consumidor. Duas peças são selecionadas ao acaso, sem reposição, da batelada. Seja a variável aleatória X o número de peças não-conformes a amostra. Qual é a função de distribuição cumulativa de X?

$$P(X = 0) = \frac{800}{850} \cdot \frac{799}{849} = 0.886$$

$$P(X = 1) = 2 \cdot \frac{800}{850} \cdot \frac{50}{849} = 0.111$$

$$P(X = 2) = \frac{50}{850} \cdot \frac{49}{849} = 0.003$$

Logo

$$F(0) = P(X \leq 0) = 0.886$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = 0.886 + 0.111 = 0.997$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = 1$$

Examplo 3-8

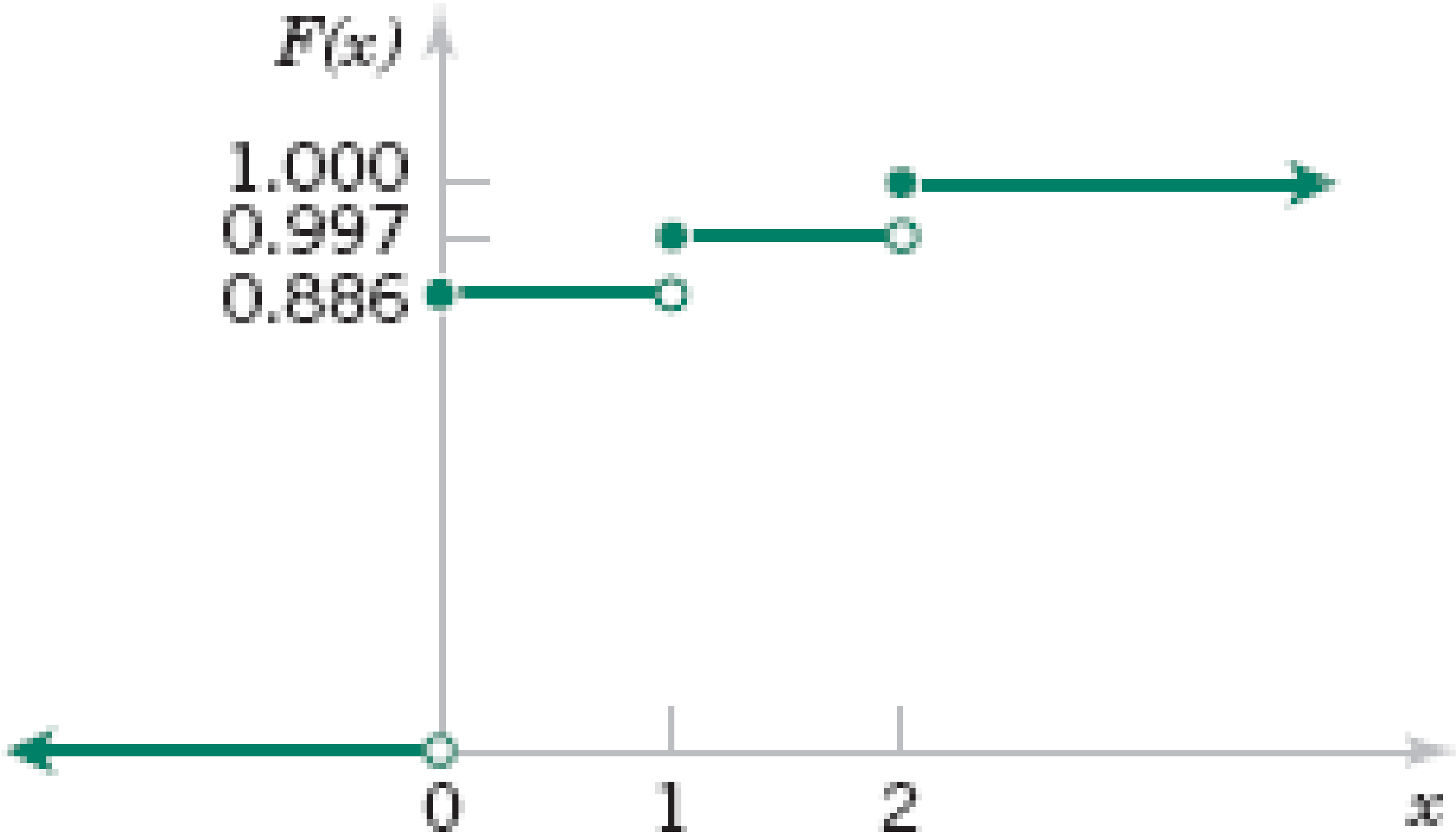

Figura 3-4 Função de distribuição acumulada para o Exemplo 3-8

3-4 Média e Variância de uma Variável Discreta

Definição

A média de uma variável X é

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x) \qquad (3\text{-}3)$$

A variância de uma variável X é

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

O desvio padrão de uma variável X é

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

3-4 Média e Variância da uma Variável Discreta

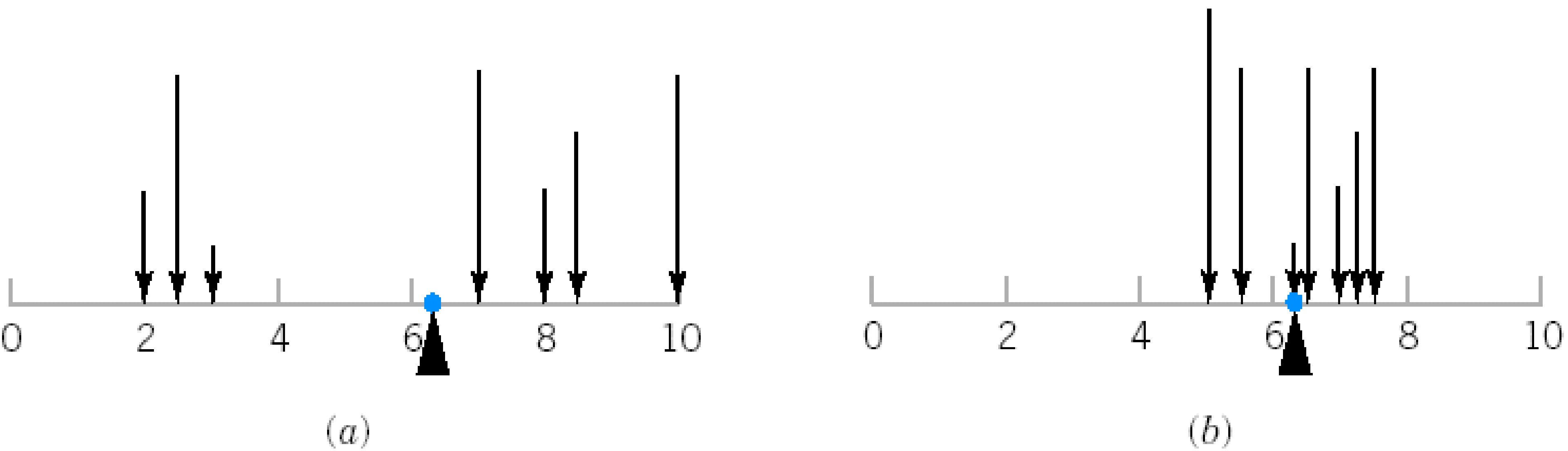

Figure 3-5 Uma distribuição de probabilidade como um carregamento com média igual ao ponto de equilíbrio. (a) e (b) ilustram médias iguais, porém (a) ilustra uma variância maior.

3-4 Média e Variância da uma Variável Discreta

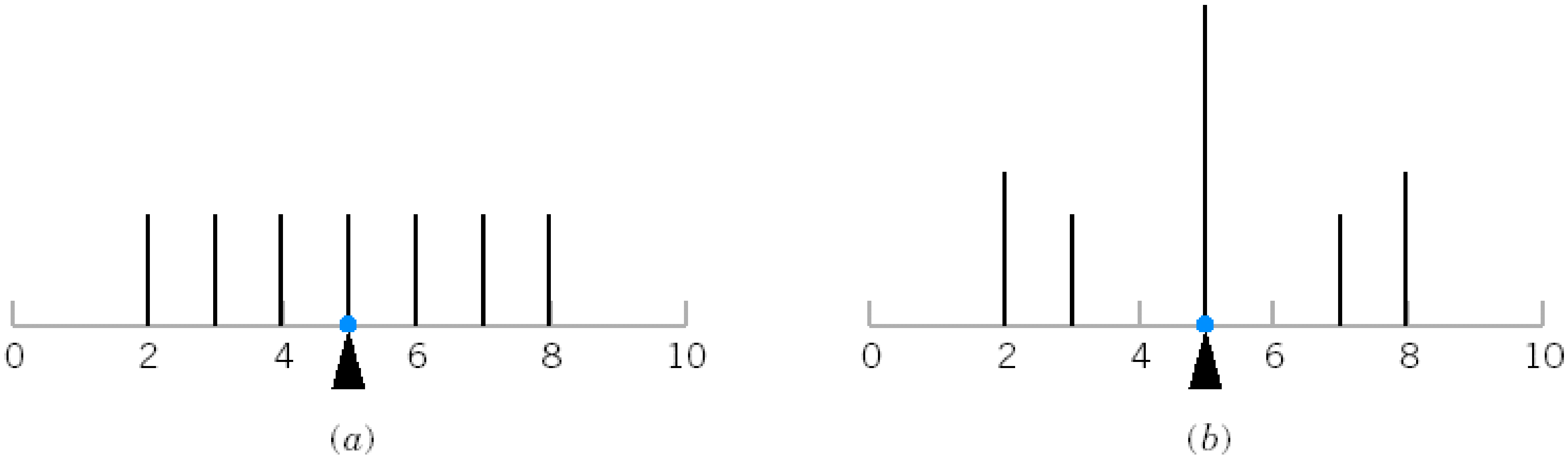

Figura 3-6 As distribuições de probabilidade ilustradas em (a) e (b) diferem, muito embora elas tenham médias e variâncias iguais.

Examplo 3-11

O número de mensagens enviadas por hora, através de uma rede de computadores, tem a seguinte distribuição

x = No de mensagens	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0.08	0.15	0.30	0.20	0.20	0.07

Determine a média e o desvio-padrão do número de mensagens enviadas por hora

$$E(X) = 10(0.08) + 11(0.15) + \cdots + 15(0.07) = 12.5$$

$$V(X) = 10^2(0.08) + 11^2(0.15) + \cdots + 15^2(0.07) - 12.5^2 = 1.85$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.85} = 1.36$$

3-4 Média e Variância da uma Variável Discreta

A variância de uma v.a. X pode ser considerada como o valor esperado de uma função de X, isto é, $h(x)=(X-\mu)^2$

Se X é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f(x)

$$E[h(X)] = \sum_x h(x)f(x) \tag{3-4}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Objetivos do aprendizado

a.Determinar probabilidades a partir de funções de densidade de probabilidade
b.Determinar probabilidades a partir de funções de distribuição cumulativa e funções de distribuição cumulativa a partir de funções de densidades de probabilidade e o contrario.
c.Calcular média e variância para variáveis contínuas.

4-1 Variáveis Aleatórias Contínuas

– tempo de resposta de um sistema computacional;
– rendimento de um processo químico;
– tempo de vida de um componente eletrônico;
– resistência de um material; etc.

• Variáveis aleatórias discretas com grande número de possíveis resultados (podem ser aproximadas para contínuas):

– número de transações por segundo de uma CPU;
– número de defeitos numa amostra de 5.000 itens; etc.

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

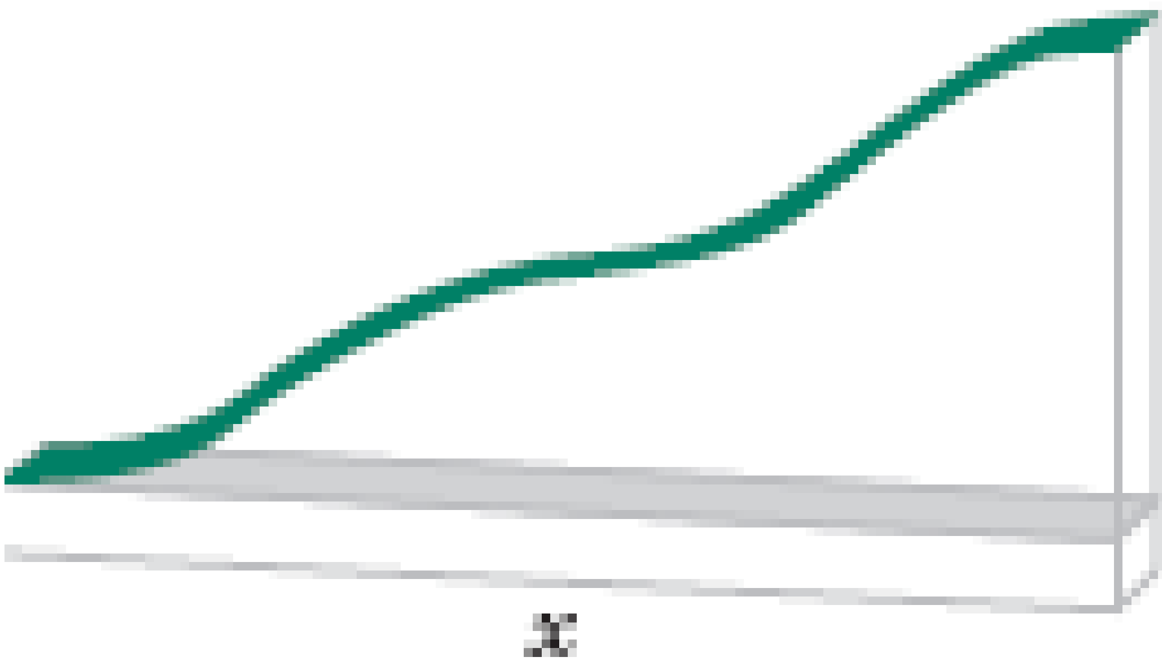

Figura 4-1 **Função de densidade de uma carga ao longo de uma viga longa e delgada.**

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

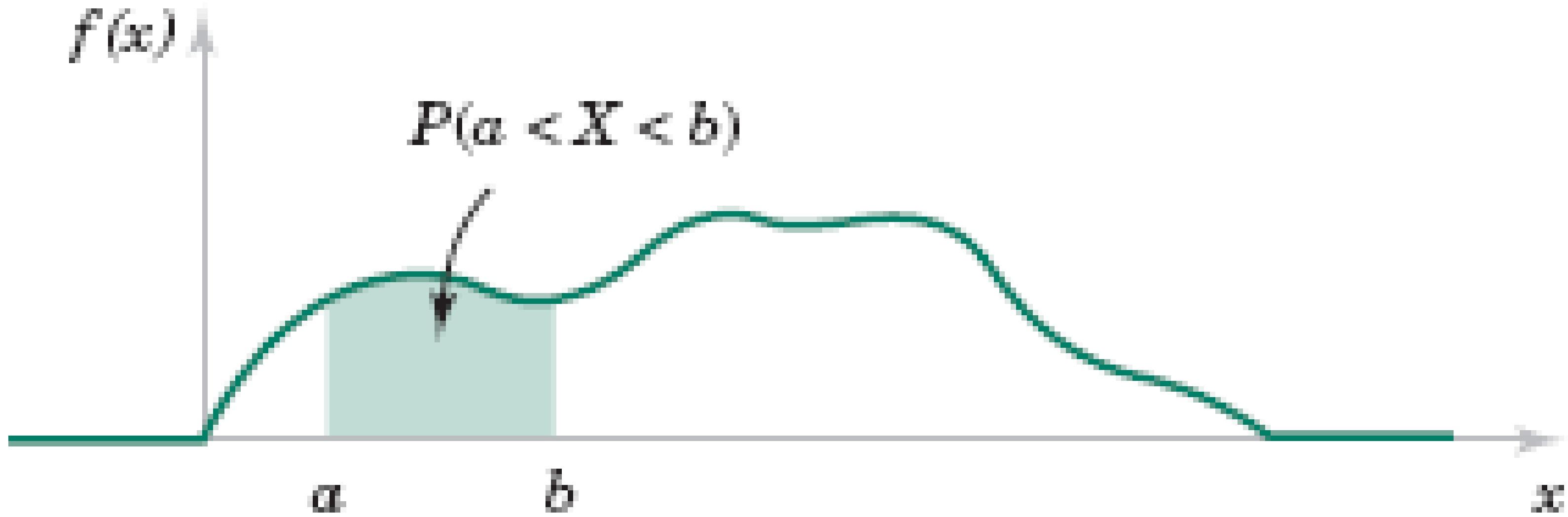

Figura 4-2 **Probabilidade determinada a partir da área sob $f(x)$.**

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

Definição

Para uma v.a. contínua X, a função de densidade de probabbilidade é uma função tal que

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(3) $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx =$ Área sob *f(x)* de a e b

(4-1)

Para qualquer a e b

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

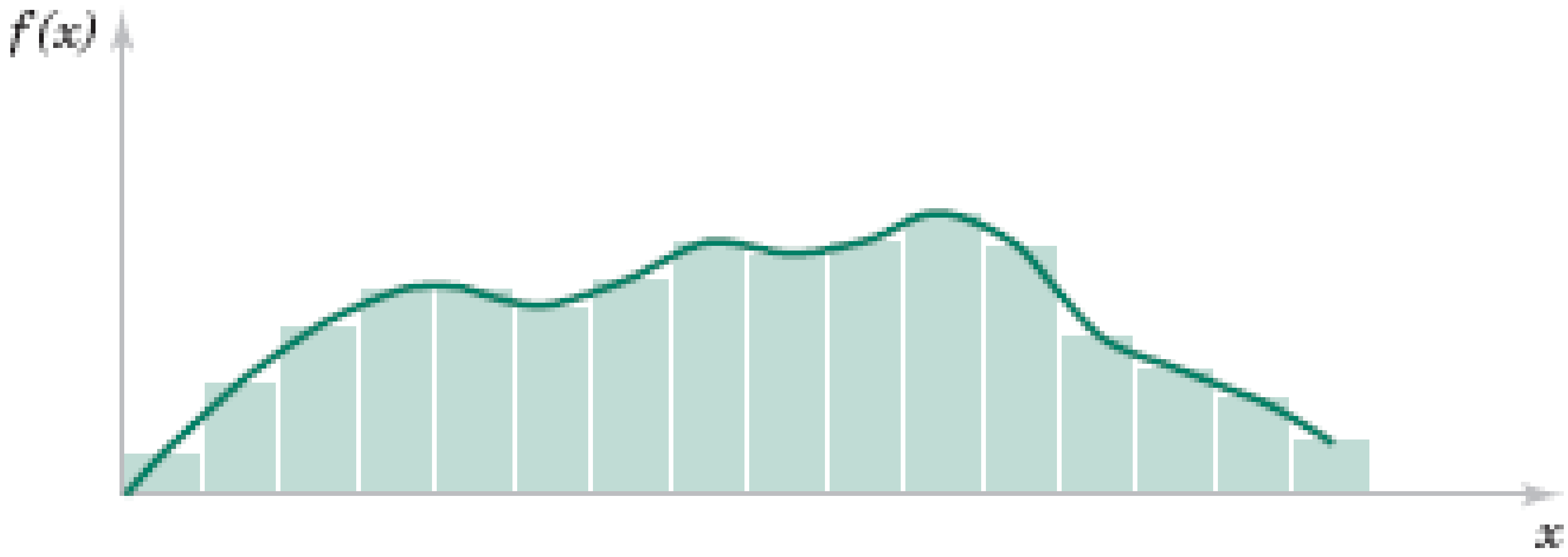

Figura 4-3 Um histograma aproxima uma função de densidade de probabildiade

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

Se X é uma v.a. contínua, então para qualquer x_1 e x_2

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) \quad (4\text{-}2)$$

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

Examplo 4-2

Seja a v.a. continua X o diâmetro de um orifício perfurado em uma placa com um componente metálic. O diâmetro alvo é 12,5 milímetros. A maioria dos distúrbios aleatórios no processo resulta em diâmetros maiores. Dados históricos mostram que a distribuição de X pode ser modelada por uma função de densidade dada abaixo

$$f(x) = 20e^{-20(x-12,5)}, x \geq 12,5$$

Se uma peça com diâmetro maior que 12,60 milímetros for descartada , qual será a proporção de peças descartadas? Uma peça é descartada se X > 12,60

$$P(X > 12.60) = \int_{12.6}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{12.6}^{\infty} 20e^{-20(x-12.5)}\,dx = -e^{-20(x-12.5)}\Big|_{12.6}^{\infty} = 0.135$$

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

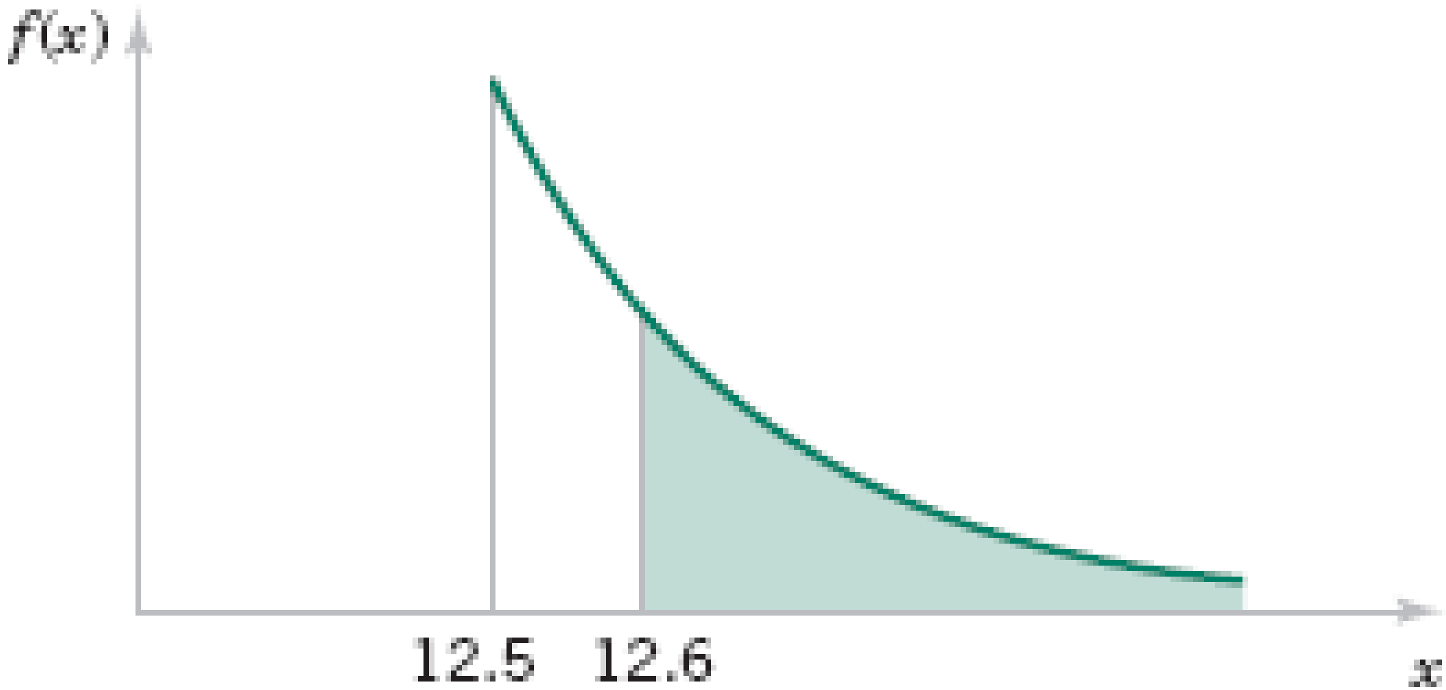

Figura 4-5 Função de densidade de probabildiade para o Examplo 4-2.

4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

Examplo 4-2 (continuação)

Que proporção de peças está entre 12,5 e 12,6 milímetros?

$$P(12.5 < X < 12.6) = \int_{12.5}^{12.6} f(x)\,dx = -e^{-20(x-12.5)}\Big|_{12.5}^{12.6} = 0.865$$

Uma vez que a área total sob *f(x)* é igual a 1, podemos também calcular $P(12{,}5 < X < 12{,}6) = 1 - P(X > 12{,}6) = 1 - 0{,}135 = 0{,}865$

4-3 Funções de Distribuição Acumulada

Definição

A função de distribuição acumulada de uma v.a. contínua é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du \qquad (4\text{-}3)$$

para $-\infty < x < \infty$.

4-3 Funções de Distribuição Acumulada

Examplo 4-4

Para a operação de perfuração no Exemplo 4-2, F(x) é dada por

$$F(x) = 0 \quad \text{for} \quad x < 12.5$$

para $12.5 \leq x$

$$F(x) = \int_{12.5}^{x} 20e^{-20(u-12.5)}\, du$$
$$= 1 - e^{-20(x-12.5)}$$

Logo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 12.5 \\ 1 - e^{-20(x-12.5)} & 12.5 \leq x \end{cases}$$

Figura 4.7 mostra o gráfico da F(x)

4-3 Funções de Distribuição Acumulada

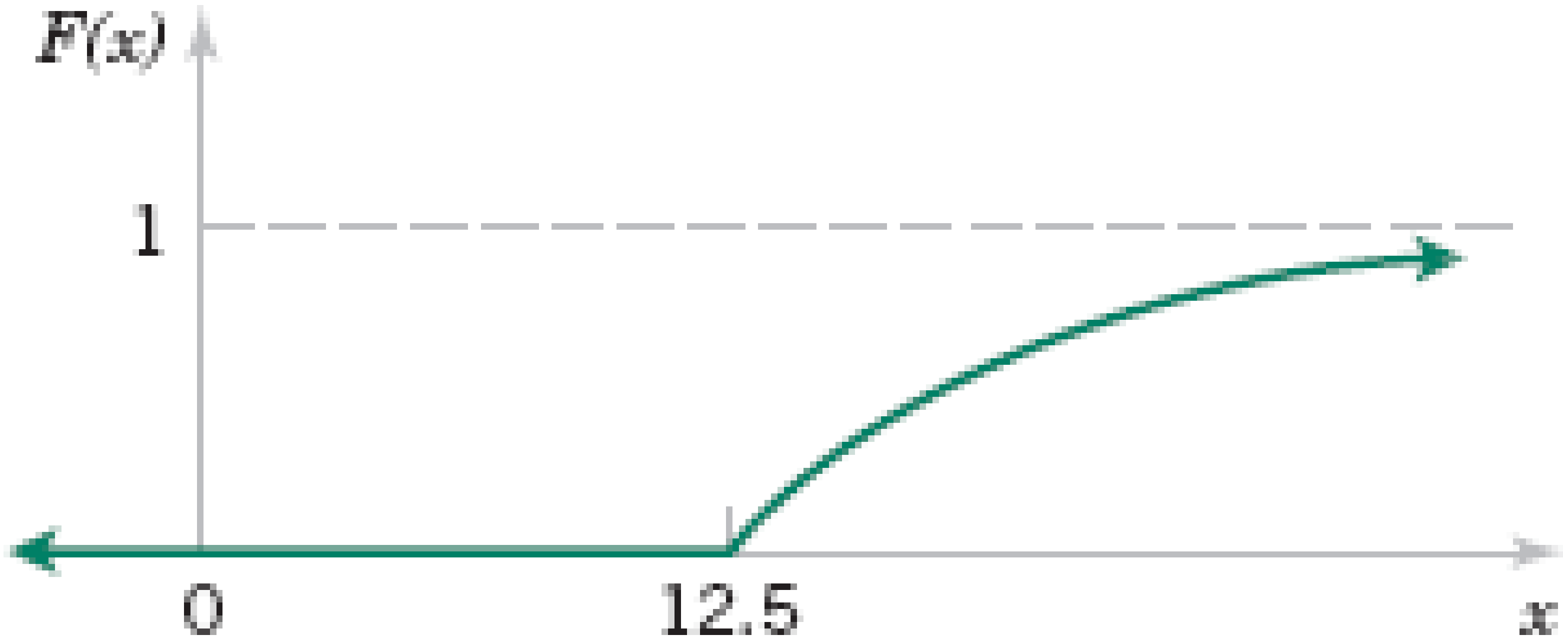

Figura 4-7 Função de distribuição acumulada para o Examplo 4-4.

4-4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

Definição

Suponha X uma v.a. contínua , com uma função de densidade de probabilidade *f(x)*. A média de X é

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \qquad (4\text{-}4)$$

A variância de X é

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2$$

O desvio padrão é f X is $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

4-4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória contínua X.

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx \qquad (4\text{-}5)$$

4-4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

Examplo 4-8

Considerando os dados do Exemplo 4-2, a média é

$$E(X) = \int_{12.5} xf(x)\,dx = \int_{12.5} x\,20e^{-20(x-12.5)}\,dx$$

$$E(X) = -xe^{-20(x-12.5)} - \frac{e^{-20(x-12.5)}}{20}\Bigg|_{12.5}^{\infty} = 12.5 + 0.05 = 12.55$$

A variância é

$$V(X) = \int_{12.5}^{\infty} (x - 12.55)^2 f(x)\,dx$$

V(X)=0,0025