Simulação Estocástica

O que é Simulação Estocástica?

- Simulação:
  - ato ou efeito de simular
  - Disfarce, fingimento, ...
  - Experiência ou ensaio realizado com o auxílio de modelos.
- Aleatório: dependente de circunstâncias casuais ou fortuitas.
- Simulação estocástica é a arte de gerar amostras de variáveis aleatórias num ambiente computacional e usar as ditas amostras para a obtenção de um certo resultado.

Quais são os problemas ?

- Nenhum problema para o qual existam soluções teóricas alcançáveis no tempo requerido e a custos toleráveis deve ser resolvido usando simulação estocástica.
- Nenhuma solução aproximada é tão boa quanto a solução exata.

Um problema prático para o uso de simulação

- Considere uma situação em que um farmacêutico resolve colocar um pequena farmácia em que preencherá receitas. Ele planeja abrir de 7:00 horas e espera que em média chegará 32 receitas até àss17:00 horas.
- De acordo com a experiência do farmacêutico, o tempo que leva preenchendo uma receita segue uma Normal com média 10 minutos e desvio padrão 4 minutos. Ele planeja receber receitas até às 17:00 horas, embora ele permaneça no local após essa hora se for necessário para preencher as receitas.

Um problema prático para o uso de simulação

- Qual é o tempo médio que ele permanecerá na loja?
- Qual a proporção de dias que ele ficará trabalhando até às 17:30 horas?
- Qual a proporção de receitas que ele preencheu em 30 minutos?
- Qual o tempo médio que ele levou para preencher uma receita?

Um problema prático para o uso de simulação

- É importante fazer suposições sobre as variáveis tempo de preenchimento e tempo de chegadas.
- Determinado as distribuições de probabilidade, gerar os números para os tempos de preenchimento e chegadas.
- Considerando 1000 dias simulados, ocorreram 122 casos em que o farmacêutico trabalhara até 17:30 horas.

Geração de Variáveis Aleatórias Uniformes

- Em simulação as variáveis aleatórias com distribuição uniforme no intervalo [0,1] são usadas de várias maneiras.
  - Em forma direta.
  - Para gerar distribuições discretas e contínuas.
  - Para gerar conjuntos de variáveis dependentes.
- A simulação de variáveis aleatórias deu origem aos Métodos Monte Carlo.
- Originalmente os números aleatórios eram gerados manualmente ou mecanicamente usando dados, roletas, etc.
- Modernamente computadores são usados para gerar números que na realidade são pseudo-aleatórios.

Geração de Variáveis Aleatórias Uniformes

- Números pseudo-aleatórios constituem uma seqüência de valores que, embora sejam gerados de forma determinística, tem aparência de sendo variáveis aleatórias uniformes [0,1] independentes.
- O desempenho de uma simulação estará fortemente correlacionado com o gerador de números aleatórios usados.
- Um dos métodos de geração mais usado é o chamado *congruencial linear*.

Geração de Variáveis Discretas Método de Inversão

- Suponha que deseja-se gerar os valores de uma variável discreta X tendo função de probabilidade

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_j)=p_j$	p_1	p_2	…	p_n

- A Função de distribuição para X é definida como

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad se \quad x < x_1 \\ p_1 \qquad se \quad x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 \quad se \quad x_2 \le x < x_3 \\ \vdots \\ 1 \qquad se \quad x \ge x_n \end{cases}$$

Geração de Variáveis Discretas
Método de Inversão

- Gera-se um número uniformemente distribuído (0,1) e

$$X = \begin{cases} x_1 \quad se \quad U < p_0 \\ x_2 \quad se \quad p_0 \leq U < p_0 + p_1 \\ \vdots \\ x_j \quad se \quad \sum_{i=1}^{j\text{-}1} p_i \leq U < \sum_{i=1}^{j} p_i \\ \vdots \end{cases}$$

Geração de Variáveis Discretas Método de Inversão

- Exemplo: Considere uma variável aleatória X com distribuição

X	0	1	2
$P(X=x_j)=p_j$	1/4	1/2	1/4

- Suponha que foi gerado u=0,3. Então como $p_1 \leq u < p_1+p_2$, ou seja $0,25 \leq u < 0,75$, o valor gerado é x=1.
- Para obter uma amostra de valores de X basta gerar n valores de X.

Geração de Variáveis Discretas
Distribuição Bernoulli

- Suponha que X tem uma distribuição de Bernoulli com $P(X=1)=p=0,52$ e $P(X=0)=1-p=0,48$. Para gerar valores para tal distribuição basta gerar u e concluir:
  - Se $u < 0,48$, $x=0$
  - Se $u \geq 0,48$, $x=1$
- Exemplo: Suponha que geramos dez valores de u: 0,11; 0,82; 0,00; 0,43; 0,56; 0,60; 0,72; 0,42; 0,08; 0,53. Então os dez valores dessa distribuição de Bernoulli são: 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1.

Geração de Variáveis Discretas

Distribuição Binomial

- Considere X com distribuição Binomial com parâmetros n e p.
- Para gerar m valores de X basta considerar m experimentos da Binomial, sendo que em cada um deles repetimos n vezes.
- Exemplo: No exemplo anterior de Bernoulli, foi obtido cinco sucessos logo p estimado é 0,50. Considere que X tem uma binomial com n=10 e p=0,52. Para gerar um valor dessa distribuição basta repetir o experimento 10 vezes.

Geração de Variáveis Discretas Método de Inversão

- Distribuição Binomial
  - Se X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p, então

$$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i},\quad i=0,1,\ldots,n$$

  - Assumindo a forma recursiva

$$P(X=i+1)=\frac{n-i}{i+1}\frac{p}{1-p}P(X=i)$$

Geração de Variáveis Discretas Método de Inversão

- Algoritmo de Geração de Binomial (n,p)
  - 1. Gere um número uniforme (0,1)
  - 2. $c=p/(1-p)$, $i=0$, $pr=(1-p)^n$, $F=pr$.
  - 3. Se $U< F$, faça $X=i$ e pare.
  - 4. $pr=[c(n-i)/(i+1)]pr$, $F=F+pr$, $i=1+1$.
  - 5. Vá para 3.

Geração de Variáveis Discretas Método de Inversão

- Distribuição Poisson
  - Se X tem distribuição Poisson com parâmetro λ, então

$$P(X=i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!},\quad i=0,1,\ldots$$

  - Assumindo a forma recursiva

$$P(X=i+1)=\frac{\lambda}{i+1}P(X=i),\quad i\geq 0$$

Geração de Variáveis Discretas Método de Inversão

- Algoritmo de Geração de Poisson
  - 1. Gere um número uniforme (0,1)
  - 2. $i=0$, $p=e^{-\lambda}$, $F=p$.
  - 3. Se $U < F$, faça $X=i$ e pare.
  - 4. $p= \lambda p/(i+1)$, $F=F+p$, $i=i+1$.
  - 5. Vá para 3.

Geração de Variáveis Contínuas
Método de Inversão

- Proposição: Se U uma v.a. uniforme (0,1). Para uma função de distribuição F, a variável aleatória X definida por $X=F^{-1}(U)$ tem função de distribuição F.
- A proposição acima mostra que pode-se gerar uma variável contínua X a partir da sua função de distribuição gerando um valor uniforme (0,1) e fazendo $X=F^{-1}(U)$.

Geração de Variáveis Contínuas
Método de Inversão

- Exemplos:
  - Suponha X tendo $F(x)=x^n$, $0<x<1$. Gere um número uniforme u. Fazendo $x=F^{-1}(u)$ tem-se que $x=u^{1/n}$.
  - Considere uma v.a. com densidade $f(x)=2x$, $0<x<1$. Sua função de distribuição F é dada por

$$F(x)=\begin{cases} 0, & se \quad x<0 \\ x^2, & se \quad 0 \le x < 1 \\ 1, & se \quad x \ge 1 \end{cases}$$

  - Então para gerar um número x, gera-se um número uniforme u e calcula $x=u^{1/2}$. Se $u=0{,}5$ então $x=0{,}71$.

Geração de Variáveis Contínuas
Método de Inversão

- Distribuição Exponencial
  - Se X tem distribuição exponencial com média β dada por

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}x}$$

  - A função de distribuição acumulada é

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\beta}x}$$

  - Fazendo F(x)=u e tomando o logaritmo na base e, temos

$$1 - u = e^{-\frac{1}{\beta}x} \Leftrightarrow \ln(1-u) = -x/\beta \Leftrightarrow x = -\beta \ln(1-u)$$

Geração de Variáveis Contínuas Método de Inversão

- Distribuição Exponencial
  - Exemplo: Suponha $\beta=2$ e deseja-se gerar cinco valores X com distribuição exponencial de parâmetro 2. Gerados os valores $u_1= 0,57$, $u_2=0,19$, $u_3=0,38$, $u_4=0,33$ e $u_5=0,31$.Temos $x_1=-2\ln(0,43)=1,68$, $x_2=0,42$, $x_3=0,96$, $x_4=0,80$ e $x=0,74$.

Geração de Variáveis Contínuas Método de Inversão

- Processo de Poisson
  - Seja $N(t)$ o número de eventos que ocorrem no intervalo $[0,t)$ com uma taxa λ. $N(t)$ para $t>0$ é uma variável aleatória Poisson com média λt.
  - O tempo entre chegadas é uma exponencial de parâmetro λ.
  - Gerar um processo de Poisson é equivalente gerar tempos entre chegadas.
  - A idéia é gerar unidades de tempo do processo de Poisson.

Geração de Variáveis Contínuas Método de Inversão

- Algoritmo de geração de unidades de tempo de um processo de Poisson.
  - 1. t=0, I=0;
  - 2. Gere um número uniforme (0,1) u.
  - 3. $t = t - (1/\lambda \ln u)$. Se t< T, pare.
  - 4. I=I+1, S(I)=t.
  - 5. Vá para 2.
- O valor final de I representa o número final de eventos que ocorrerão no intervalo [0,t).

Geração de Variáveis Contínuas
Método de Inversão

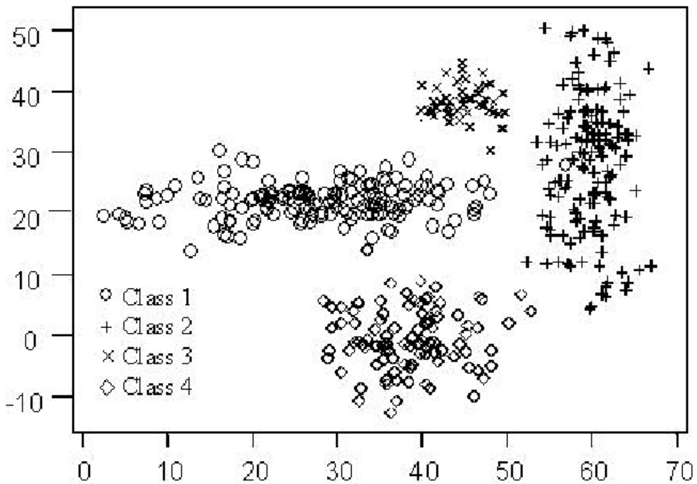
- Distribuição Normal
  - Para gerar uma v.a. normal com média μ e variância σ^2 basta gerar uma normal padrão e usar a transformação $x= \mu+ \sigma z$. Gera-se um número uniforme u. Sabendo-se que F(Z)=u, x vai ser o escore da tabela da normal tal que $F(Z)=P(Z\leq z)=u$.
  - Este método não é prático.
  - Um dos métodos mais usados é o método Polar. Nesse método são gerados duas normais padrão z_1 e z_2 por médio das transformações

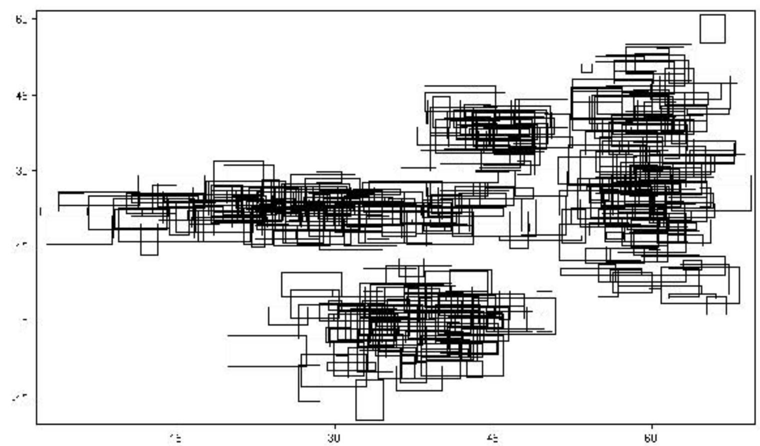
$$z_1 = \sqrt{-2\ln U_1} \quad \cos(2\pi U_2)$$

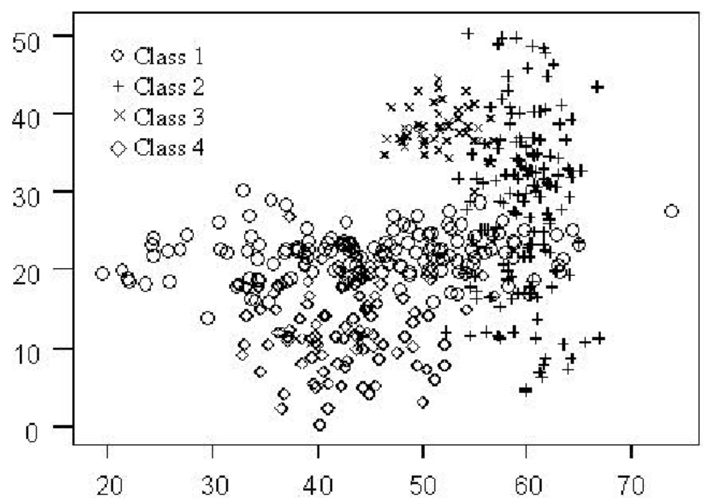
$$z_1 = \sqrt{-2\ln U_1} \quad \mathrm{sen}(2\pi U_2)$$

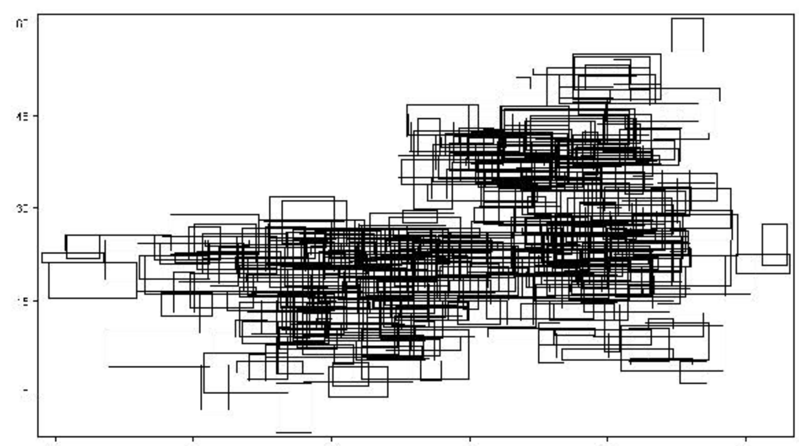
  - U_1 e U_2 são uniformes (0,1).

Exemplo de geração de Normais Independentes

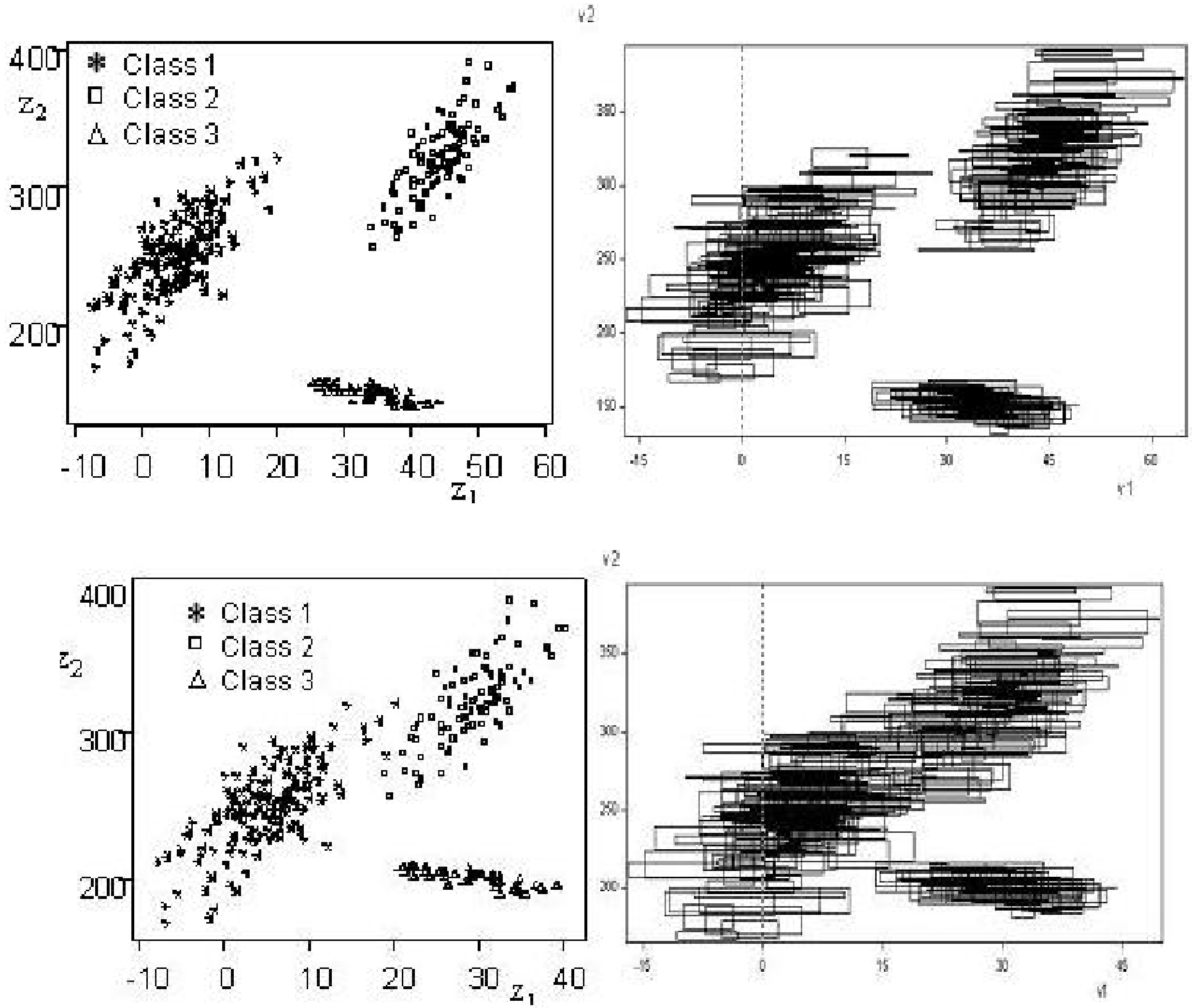








Exemplo de geração de Normais Dependentes



Simulando imagens