Métodos Monte Carlo

Introdução

- Métodos de inferência são usados para tirar conclusões sobre a população usando informações obtidas a partir de uma amostra.
  - Estimativas pontuais e intervalares para os parâmetros;
  - Testes de hipóteses e
  - Modelagem
- Para obter resultados confiáveis, é necessário conhecer a distribuição da estatística (média, mediana, variância, assimetria, etc.)em estudo.
- Métodos Monte Carlo é uma saída para fazer inferências quando não se conhece a distribuição do parâmetro de interesse ou quando as suposições de um modelo são violadas.

Monte Carlo

Ulam

- Originou-se por causa do uso de aleatoriedade e da natureza repetitiva das atividades realizadas em cassinos de Monte Carlo. A roleta era um gerador de números aleatórios.
- Primeiro trabalho introduzido por Jon Von Neuman e S.M. Ulam em 1940.

Monte Carlo

- Atualmente termo Monte Carlo é mais geral. É uma técnica baseada na uso de números aleatórios e estatísticas para resolver problemas.
- Segundo Gentle(1998), simulações (experimentos) Monte Carlo são um caminho fácil e expressivo para compreender o fenômeno de interesse.

Alguns dos usos de Métodos Monte Carlo

- Realizar inferências quando a distribuição da estatística de teste não é conhecida.
- Estimando o desempenho de métodos de inferência quando as suposições paramétricas são violadas.
- Avaliando desempenho de métodos de inferencias (poder do teste)

O método básico

- A idéia é estimar a distribuição de uma estatística extraindo amostras aleatórias de uma população e observar o comportamento da estatística sobre as amostras.
- Neste caso, o método Monte Carlo é uma abordagem paramétrica porque a amostra é extraída de uma população com distribuição conhecida.
- Aplicação do método inicia com definição de pseudo-população que é assumida para representar a população real.

O método básico

- 1. Determine a pseudo-população que representa a verdadeira população de interesse.
- 2. Aplique uma técnica de amostragem para obter uma amostra da pseudo-população.
- 3. Calcule o valor da estatística de interesse e armazene a mesma.
- 4. Repita as etapas 2 e 3 M vezes.
- 5. Use os M valores obtidos na etapa 3 para estudar a distribuição da estatística.

Testando Hipóteses via método Monte Carlo

- Objetivo: Estimar a distribuição da estatística quando a hipótese nula é verdadeira.
- Neste caso, o valor crítico é determinado usando a distribuição estimada da estatística de teste.
- Extrai-se amostras aleatórias a partir de pseudo-populações, calcula-se o valor da estatística de teste em cada replicação e usa-se esses valores para estimar a distribuição da estatística de teste.

Testando Hipóteses via método Monte Carlo

- 1. Use uma amostra aleatória de tamanho n de uma população de interesse, calcule o valor observado da estatística de teste, t_0.
- 2. Defina uma pseudo-população que reflita as características da verdadeira população sob a hipótese nula.
- 3. Obtenha uma amostra aleatória de tamanho n a partir da pseudo-população.
- 4. Calcule o valor da estatística de teste usando a amostra aleatória na etapa 3 e armazene.
- 5. Repita as etapas 3 e 4 M vezes. Ao final dessa etapa têm-se os valores $t_1,..,t_M$ que serve como estimativa da distribuição da estatística.

Testando Hipóteses via método Monte Carlo

- 6. Obtenha o valor crítico para o nível de significância α da seguinte forma:
  - Teste unilateral esquerda: obtenha o α-ésimo quantil amostral $\hat{q}_{\alpha}$ de $t_1,\ldots,t_M$.
  - Teste unilateral direita: obtenha o (1-α)-ésimo quantil amostral $\hat{q}_{1-\alpha}$ de $t_1,\ldots,t_M$.
  - Teste Bilateral: obtenha os quantis amostrais $\hat{q}_{\alpha/2}$ $\hat{q}_{1-\alpha/2}$
- 7. Se t_0 estiver na região crítica, então rejeita-se a hipótese nula.

Avaliando os erros tipo I e tipo II

- Objetivo: avaliar o desempenho de um teste de hipótese em termos dos erros tipo I e tipo II.
- Uso: as suposições do método podem ter sido violadas ou métodos analíticos não podem ser aplicados.
- Por exemplo, suponha escolher um valor crítico usando uma aproximação Normal e é necessário avaliar os resultados por usar essa aproximação.

Avaliando o erro tipo I

- 1. Determine a pseudo-população dado que a hipótese nula é verdadeira.
- 2. Gere uma amostra de tamanho n dessa pseudo-população.
- 3. Realize o teste de hipóteses usando um valor crítico.
- 4. Determine se cometeu o erro tipo I, isto é, se a hipótese nula foi rejeitada. Registre esse resultado da seguinte forma:
  - I_t =1 se a hipótese nula foi rejeitada
  - I_t=0 se a hipótese nula não foi rejeitada
- 5. Repita as etapas 2 a 4 M vezes.
- 6. Estime a probabilidade de cometer o erro tipo I

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{M}\sum_{t=1}^{M} I_t$$

Avaliando o erro tipo II

- 1. Determine a pseudo-população dado que a hipótese nula é falsa.
- 2. Gere uma amostra de tamanho n dessa pseudo-população.
- 3. Realize o teste de hipóteses usando o valor crítico teórico.
- 4. Determine se cometeu o erro tipo II, isto é, se a hipótese nula não foi rejeitada. Registre esse resultado da seguinte forma:
  - I_t =1 se a hipótese nula não foi rejeitada
  - I_t=0 se a hipótese nula foi rejeitada
- 5. Repita as etapas 2 a 4 M vezes.
- 6. Estime a probabilidade de cometer o erro tipo II

$$\hat{\beta} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^{M} I_t$$

Avaliando os erros tipo I e tipo II

- O valor da estimativa para o erro tipo I é comparado com valor teórico.
- O valor da estimativa para o erro tipo II é avaliado através do poder do teste $(1-\hat{\beta})$. Isso é realizado em função do valor de interesse para o parâmetro do teste. É esperado que, quando o valor do parâmetro se aproxima do valor quando a hipótese nula é verdadeira, o poder do teste diminui.

Considerações

- Cada experimento é aplicável somente para a situação que tem sido simulada.
- Pode-se fazer múltiplos Monte Carlo.
- O número de replicações da simulação Monte Carlo depende do tempo e recurso computacional. Se isto não é uma questão, então M deve ser grande quanto possível.
- Hope (1968) define que resultados de um método Monte Carlo são não enviesado para algum M se o programa está correto.
- Mooney (1970) estabelece que não existe uma teoria geral que governe o número de replicações. Contudo ele recomenda:
  - Primeiro use um número pequeno para M e assegure que o programa está correto.
  - Uma vez que o código foi testado, o experimento pode ser executado com M muito grande. Muitas simulações usam $M > 1000$ e M entre 10000 e 25000 não é comum.

Métodos *Bootstrap*

- Os métodos Bootstrap foram introduzidos por Efron (1979).
- São referidos como técnicas de reamostragens.
- O termo Bootstrap refere-se a simulações Monte Carlo que trata a amostra original como a pseudo-população. Então reamostragens são feitas a partir da amostra original.
- Nenhuma suposição é feita sobre a população que gerou a amostra.
- Usa-se a distribuição empírica amostral como uma estimativa da distribuição. Cada elemento da amostra tem a mesma probabilidade de ser selecionado.

Método *Bootstrap* Básico

- 1. Dado uma amostra aleatória $x_1,..,x_n$, calcule $\hat{\theta}$.
- 2. Extraia uma amostra com reposição $x_1^b,..,x_n^b$ a partir da amostra original.
- 3. Calcule a mesma estatística considerando a amostra bootstrap da etapa 2 para obter $\hat{\theta}^b$.
- 4. Repita as etapas 2 e 3 M vezes.
- 5. Use essa estimativa de distribuição para obter a estatística desejada (erro padrão ou intervalo de confiança)

Bootstrap paramétrico

- Efron e Tibshirani (1993) apresenta um método *Bootstrap* em que é feito suposição sobre a distribuição dos dados que gerou a amostra original.
- Parâmetros para essa distribuição são estimados a partir da amostra, e amostras *Bootstrap* são retiradas usando a distribuição assumida e parâmetros estimados.
- *O método Booststrap* paramétrico é similar aos métodos Monte Carlo.

Bootstrap paramétrico

- Exemplo: Suponha que dados (amostra original) seguem uma distribuição exponencial com parâmetro λ. Precisa-se estimar a variância e usa-la como estimador. Dado essa suposição o parâmetro λ pode ser estimado a partir dos dados . Gera-se uma amostra aleatória de uma exponencial com λ estimado. Então obtêm-se amostras *Bootstrap* a partir dessa amostra simulada.

Intervalo de Confiança percentil

- 1. Dado uma amostra aleatória $x_1,..,x_n$, calcule $\hat{\theta}$.
- 2. Extraia uma amostra com reposição $x_1^b,..,x_n^b$ a partir da amostra original.
- 3. Calcule a mesma estatística considerando a amostra bootstrap da etapa 2 para obter $\hat{\theta}^b$.
- 4. Repita os passos 2 e 3, B vezes.
- 5. Ordene as B estatísticas do menor para o maior.
- 6. Calcule $B*\alpha$ and $B*(1-\alpha)$
- 7. Encontre os valores (quantis) das posições $B*\alpha$ e $B*(1-\alpha)$.
- 8. o intevalo é $[q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$

Considerações

- Efron mostra que o número de réplicas *bootstrap* deve estar entre 50 e 200 quando estimando o erro padrão.
- Mesmo quando o recurso computacional é alto ou a complexidade do cálculo de $\hat{\theta}$ é grande, um valor pequeno, B=25, produzirá um ganho de informação.

Considerações

- O bootstrap percentil é mais confiável na maioria das situações mas não tem boas propriedades de probabilidade.
- Uma suposição para uso de bootstrap é que a função de distribuição empírica é representativa da verdadeira distribuição da população.
- Não recomenda-se o uso de técnicas bootstrap quando o tamanho da amostra é pequeno tal que a amostra não é representativa.
- Livro mais recente: Chernick, M. R. 1999. Bootstrap Methods: A Practitioner's Guide, New York: John Wiley & Sons.
- Livro: Efron, B. e R.J. Tibshirani. 1993. An Introduction to the Bootstrap, London, Chapaman and Hall.