3

Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidade

3 Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidade

Objetivos do aprendizado

- ❑ Como determinar se um experimento é Binomial.
- ❑ Como construir uma distribuição Binomial e obter a média e variância
- ❑ Como determinar se um experimento é Poisson.
- ❑ Como construir uma distribuição Poisson e obter a média e variância

3-6 Distribuição Binomial

Experimentos aleatórios e variáveis aleatórias

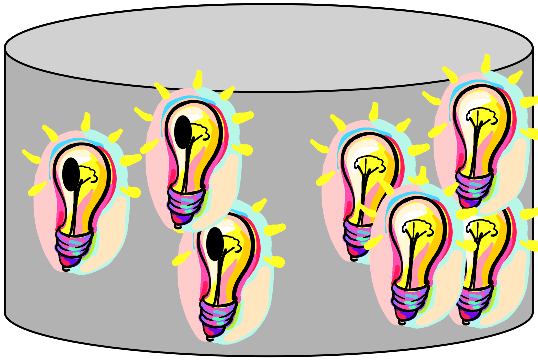
1. Jogue uma moeda 10 vezes. Seja X = número de caras obtidas.
2. Um tear produz 1% de peças defeituosas. Seja X = número de peças defeituosas nas próximas 25 peças produzidas.
3. Cada amostra de ar tem 10% de chance de conter uma molécula rara particular. Seja X = número de amostras de ar que contêm a molécula rara nas próximas 18 amostras analisadas.
4. De todos os bits transmitidos através de um canal digital de transmissão, 10% são recebidos com erro. Seja X=número de bits com erro nos próximos 5 bits transmitidos.

3-6 Distribuição Binomial

Experimentos Binomiais?

- Um levantamento recente entre os eleitores registrados nos Estados Unidos indagou se os professores das escolas públicas deveriam ou não passar por testes de drogas. Sabe-se que a probabilidade de um eleitor dizer sim é 0,80.
- Uma caixa tem bolas de gudes, sendo cinco vermelhas, nove azuis e seis verdes. Você seleciona ao acaso três bolas da caixa, sem reposição. A variável aleatória representa o número de bolas vermelhas.
- Um determinado procedimento cirúrgico tem 85% de chance de sucesso. Um médico realiza o procedimento em oito pacientes. A variável aleatória representa o número de cirurgia bem sucedidas.
- Você responde um teste de múltipla escolha que consiste de 10 questões. Cada uma tem quatro respostas e só uma é correta. Você escolhe aleatoriamente a resposta de cada questão. A variável representa o número de respostas corretas.

3-6 Distribuição Binomial



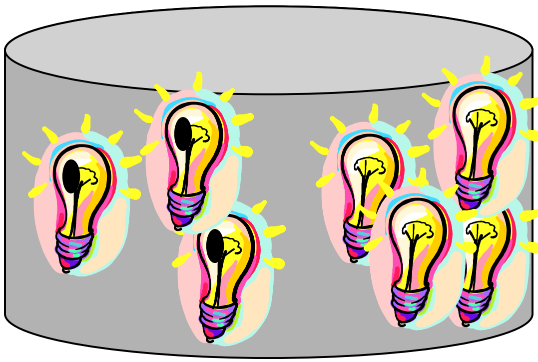
3 Ensaios de Bernoulli, $n = 3$

P(defeituosa)= $p = 3/7$

P(não defeituosa)= $(1-p) = 4/7$

Seja X o número de defeituosas

3-6 Distribuição Binomial



P(defeituosa)= p =3/7

P(não defeituosa)= (1-p)= 4/7

Seja X o número de defeituosas

S= { 111, 110, 101, 011, 001, 010, 100, 000}

X = 0 - {000}

X = 1 – {001, 010, 100}

X = 2 - {110, 101, 011}

X = 3 - {111}

$P(001) = 4/7 \times 4/7 \times 3/7 = 48/343$

$P(010) = 4/7 \times 3/7 \times 4/7 = 48/343$

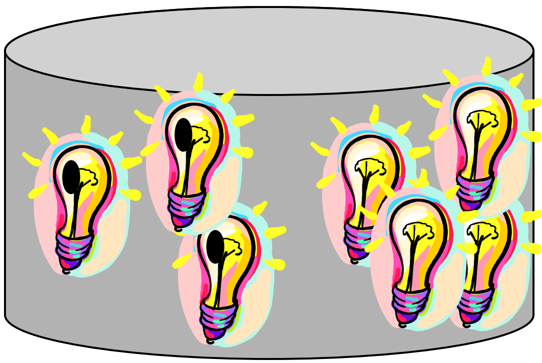
$P(100) = 3/7 \times 4/7 \times 4/7 = 48/343$

$P(X=1) = P(001) + P(010) + P(100)$

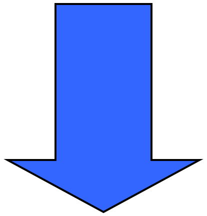
$P(X=1) = 3 \times 48/343$

3-6 Distribuição Binomial

Seja X o número de defeituosas



P(X=1) = P(001) + P(010) + P(100)
P(X=1) = 3 × 48/343



$$P(X=1)=\binom{3}{1}(3/7)^1(4/7)^2$$

3-6 Distribuição Binomial

Definição

Um experimento Aleatório consiste em n tentativas de Bernoulli, de modo que:

(1) As tentativas são independentes

(2) Cada tentativa resulte em somente dois resultados possíveis, designados como "sucesso" e "falha"

(3) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa, denotada por p, permanecer constante.

A variável aleatória X, que é igual ao número de tentativas que resultam em um sucesso, é **uma variável aleatória binomial** com parâmetros $0 < p < 1$ e $n = 1,2,...$ A função de probabilidade de X é:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n \qquad (3\text{-}7)$$

3-6 Distribuição Binomial

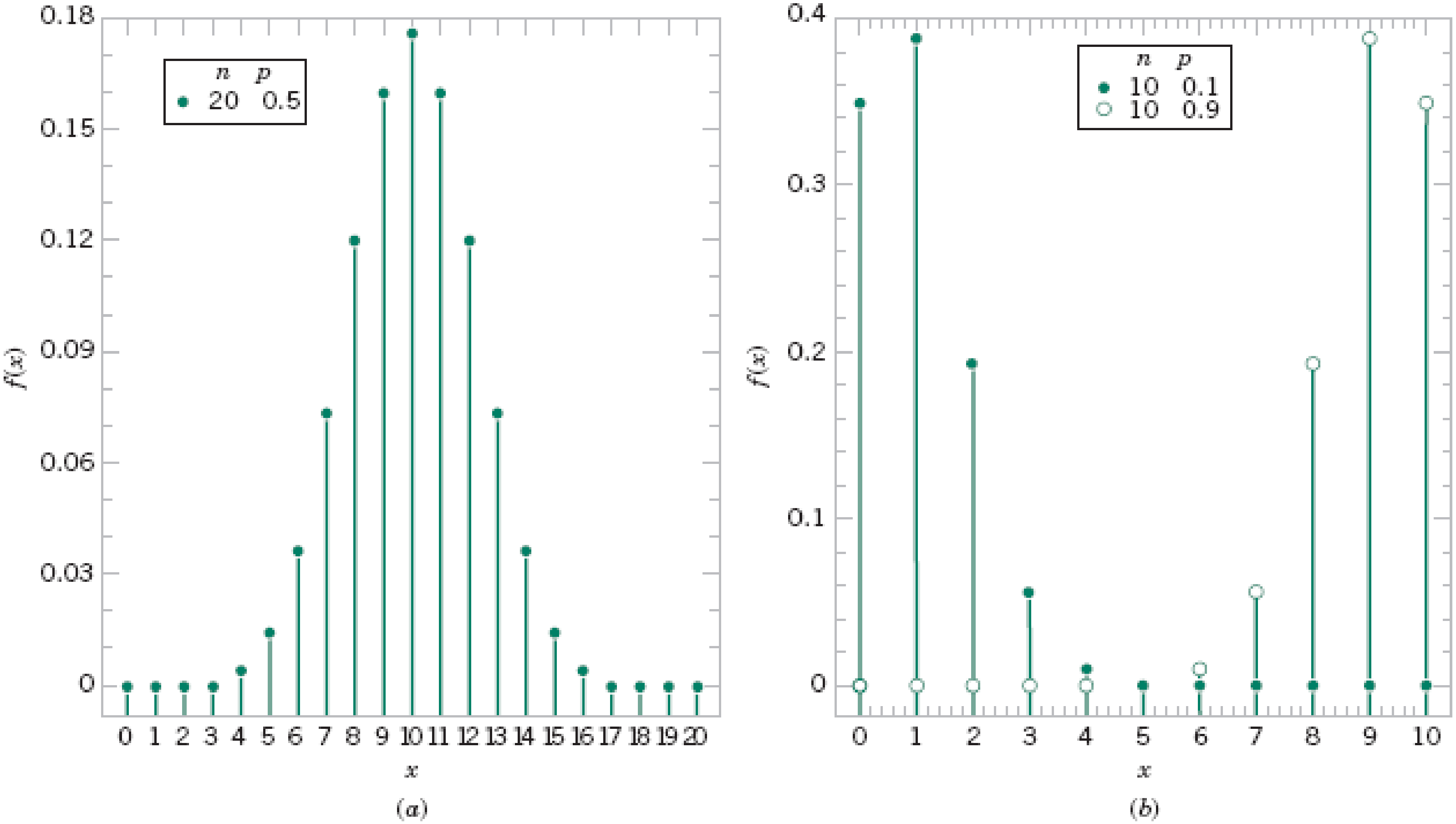


Figure 3-8 distribuições Binomiais para valores selecionados de *n* e *p*.

3-6 Distribuição Binomial

Exemplo 3-18

Cada amostrar de ar tem 10% de chance de conter um determinado poluente orgânico. Considere que as amostras sejam independentes com relação à presença do poluente. Encontre a probabilidade de que nas próximas 18 amostras analisadas exatemente 2 contenham o poluente.

Seja X = número de amostras de ar que contêm a molécula rara nas próximas 18 amostras analisadas. Então X é a variável aleatória binomial com *p = 0,1* e *n = 18*.

$$P(X = 2) = \binom{18}{2}(0.1)^2(0.9)^{16}$$

$$\binom{18}{2} = 18!/[2!\ 16!] = 18(17)/2 = 153$$

$$P(X = 2) = 153(0.1)^2(0.9)^{16} = 0.284$$

3-6 Distribuição Binomial

Exemplo 3-18

Determine a probabilidade de que no mínimo quatro amostras contenham o poluente. A probabilidade requerida é:

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{18} \binom{18}{x} (0.1)^x (0.9)^{18-x}$$

No entanto, é mais fácil usar o evento complementar,

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{18}{x} (0.1)^x (0.9)^{18-x}$$

$$= 1 - [0.150 + 0.300 + 0.284 + 0.168] = 0.098$$

Determine a probabilidade de que $3 \leq X < 7$. Agora,

$$P(3 \leq X < 7) = \sum_{x=3}^{6} \binom{18}{x} (0.1)^x (0.9)^{18-x}$$

$$= 0.168 + 0.070 + 0.022 + 0.005$$

$$= 0.265$$

3-6 Distribuição Binomial

Média e Variância

Se X for uma variável binomial com parâmetros *p* e *n*:

$$\mu = E(X) = np \qquad \text{and} \qquad \sigma^2 = V(X) = np(1-p) \qquad (3\text{-}8)$$

3-6 Distribuição Binomial

Exemplo 3-19

Para o número de bits transmitidos recebidos com erro no Exemplo 3-16, *n = 4* e *p = 0,1*; assim,

$$E(X) = 4(0.1) = 0.4 \qquad \text{e} \qquad V(X) = 4(0.1)(0.9) = 0.36$$

E esses resultados coincidem com aqueles obtidos com cálculo direto no exemplo 3-9.

3-6 Distribuição Poisson

- Um banco recebe em média 6 cheques sem cobertura por dia. Qual a probabilidade de receber quatro cheques sem cobertura em um dia qualquer?

3-6 Distribuição Poisson

- Representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória que registra o número de ocorrências sobre um intervalo de tempo ou espaço específicos.
- Propriedades do experimento Poisson:
  - A probabilidade de uma ocorrência é a mesma para quaisquer dois intervalos de tempo.
  - A ocorrência ou não ocorrência em qualquer intervalo é independente da ocorrência ou não-ocorrência em qualquer intervalo

3-9 Distribuição Poisson

Exemplo 3-33

Considere a transmissão de *n* bits através de um canal digital de comunicação. Seja a variável aleatória X o número de bits com erro. Quando a probabilidade de um bit estar com erro for constante e as transmissões forem independentes, X terá uma distribuição binomial. Seja p a probabilidade de um bit ter erro. Seja $\lambda = pn$ Então $E(X) = pn = \lambda$ e

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Agora, suponha que o número de bits transmitidos aumente e que a probabilidade de um erro diminua exatamente o bastante para que *pn* permaça igual a uma constante. Ou seja, n aumenta e p diminui proporcionalmente, tal que $E(X) = \lambda$ permaneça constante. Então, com algum trabalho, pode ser mostrado que para $n \to \infty$

$$\binom{n}{x}\left(\frac{1}{n}\right)^x \to 1 \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to 1 \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$$

De modo que

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Também, porque o número de bits transmitidos tende a infinito, o número de erros pode igualar qualquer valor inteiro não negativo. Conseqüentemente, a faixa de X são inteiros de zero até infinito.

3-9 Distribuição Poisson

Definição

Dado um intervalo de números reais, suponha que eventos ocorram ao acaso através de todo intervalo. Se o intervalo puder ser dividido em subintervalos com comprimentos suficientemente pequenos tal que:

(1) A probabilidade de mais de um evento em um subintervalo é zero

(2) A probabilidade de um evento em um subintervalo é a mesma para todos os subintervalos e proporcional ao comprimento do subintervalo, e

(3) O evento em cada subintervalo é independente de outros subintervalos, o experimento aleatório é chamado de processo de Poisson.

A variável aleatória X, que é igual ao número de eventos no intervalo, é **uma variável aleatória de Poisson** com parâmetros *0 < λ,* sendo a função de probabilidade de X dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3\text{-}16)$$

3-9 Distribuição Poisson

Consistência nas Unidades

É importante **usar unidades consistentes** no cálculo de probabilidades, médias e variâncias envolvendo as variáveis aleatórias de Poisson. O seguinte exemplo ilustra as conversões de unidade. Por exemplo, se o

(1) número médio de falhas por milímetro de fio for 3,4 , então o número médio de falhas em 10 milímetros de fio será 34 e o número médio de falhas em 100 milímetros de fio será 340.

3-9 Distribuição Poisson

Exemplo 3-33

Contaminação é um problema na fabricação de discos ópticos de armazenagem. O número de partículas de contaminação que ocorrem em um disco óptico tem uma distribuição de Poisson e o número médio de partículas por centímetro quadrado de superfície média é 0,1. A área do disco sob estudo é igual a 100 centímetros centímetros quadrados. Encontre a probabilidade de 12 partículas ocorrerem na área de um disco sob estudo. Pelo fato de o número médio de partículas ser 0,1 partícula por cm^2

$$E(X) = 100 \text{ cm}^2 \times 0.1 \text{ particles/cm}^2 = 10 \text{ particles}$$

Por conseguinte,

$$P(X = 12) = \frac{e^{-10}10^{12}}{12!} = 0.095$$

3-9 Distribuição Poisson

Exemplo 3-33

A probabilidade de nenhuma partícula ocorrer na área do disco sob estudo é

$$P(X = 0) = e^{-10} = 4.54 \times 10^{-5}$$

Determine a probabilidade de 12 ou menos partículas ocorrerem na área do disco sob estudo. A probabilidade é:

$$P(X \leq 12) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 12) = \sum_{i=0}^{12} \frac{e^{-10}10^i}{i!}$$

3-9 Distribuição Poisson

Média e Variância

Se X for uma variável poisson com parâmetros λ, então:

$$\mu = E(X) = \lambda \qquad \text{and} \qquad \sigma^2 = V(X) = \lambda \tag{3-17}$$