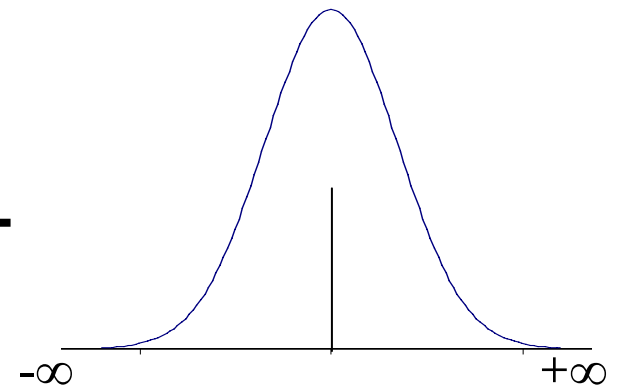


4

Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Motivação

- A quantidade de oxigênio dissolvido é importante para aferir a qualidade de um regato. Os níveis aceitáveis de oxigênio variam de 5 mg/L a 12mg/L. estudantes da Strong Vincent High School na Pensilvânia, conduziram um estudo sobre o oxigênio dissolvido no Cascade Creek. A curva normal mostra resultados obtidos pelos estudantes. Esses níveis de oxigênio dissolvido são aceitáveis? Se não forem, são muito baixos ou muito altos?

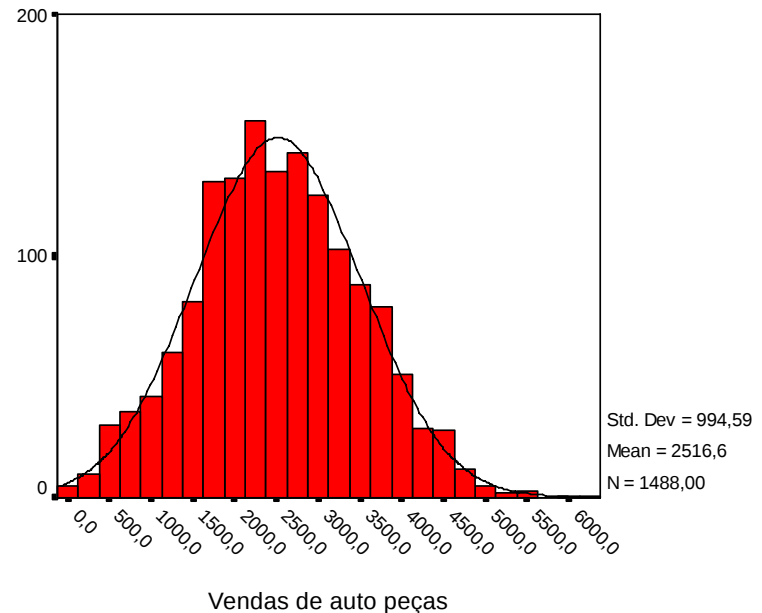


$$\bar{x} = 10$$

$$s = 1,9$$

Aderência à Distribuição Normal

- O passo mais simples seria construir um Histograma com a curva normal e verificar visualmente se ela é normal de fato.
 - Por exemplo: o gráfico de vendas de autopeças de um fabricante de Detroit



4-6 Distribuição Normal

- Propriedades
 - A média, a mediana e a moda são iguais.
 - A curva normal tem formato de um sino e é simétrica em torno da média.
 - A área total sob a curva normal é igual 1.
 - $E(X)=\mu$ e $VAR(X)=\sigma^2$.
 - O ponto máximo de $f(x)$ é o ponto $X=\mu$.
 - Os pontos de inflexão da função são: $X=\mu+\sigma$ e $X=\mu-\sigma$.

4-6 Distribuição Normal

Definição

Uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad (4-8)$$

É uma **variável aleatória normal**, com parâmetros μ , em que $-\infty < \mu < \infty$, e $\sigma > 0$. Também,

$$E(X) = \mu \quad \text{and} \quad V(X) = \sigma^2 \quad (4-9)$$

E a notação $N(\mu, \sigma^2)$ é usada para denotar a distribuição. A média e variância de X são iguais a μ e σ^2 . A variável aleatória X , que é igual ao número de tentativas que resultam em um sucesso, com parâmetros $0 < p < 1$ e $n = 1, 2, \dots$. A função de probabilidade de X é:

4-6 Distribuição Normal

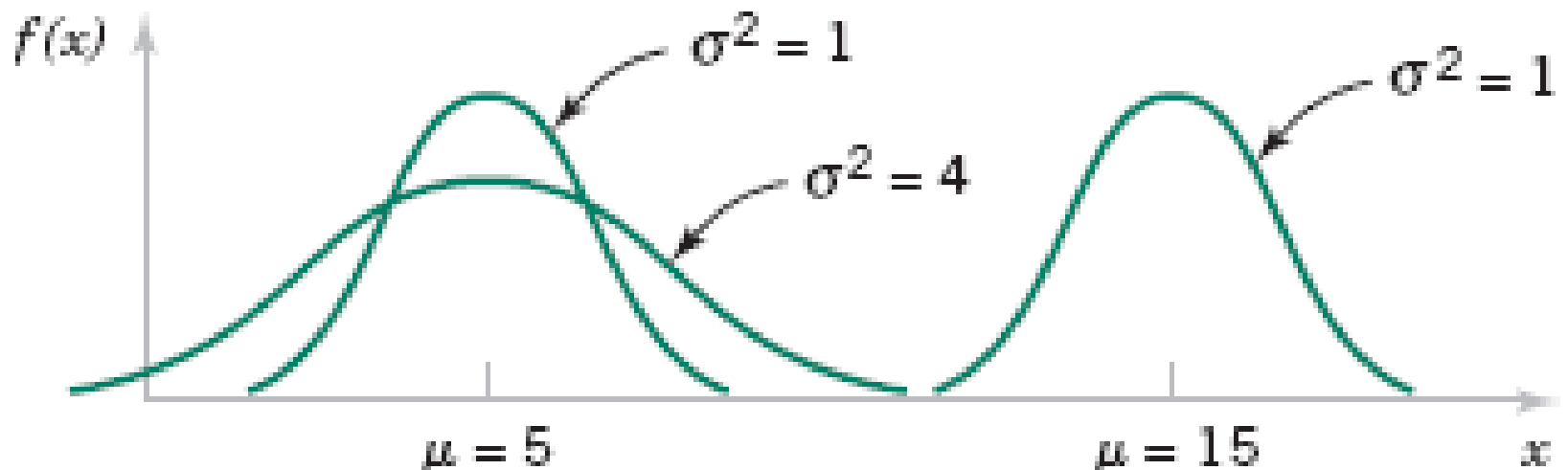


Figura 4-10 Funções densidades de probabilidades normal para valores selecionados dos parâmetros μ e σ^2 .

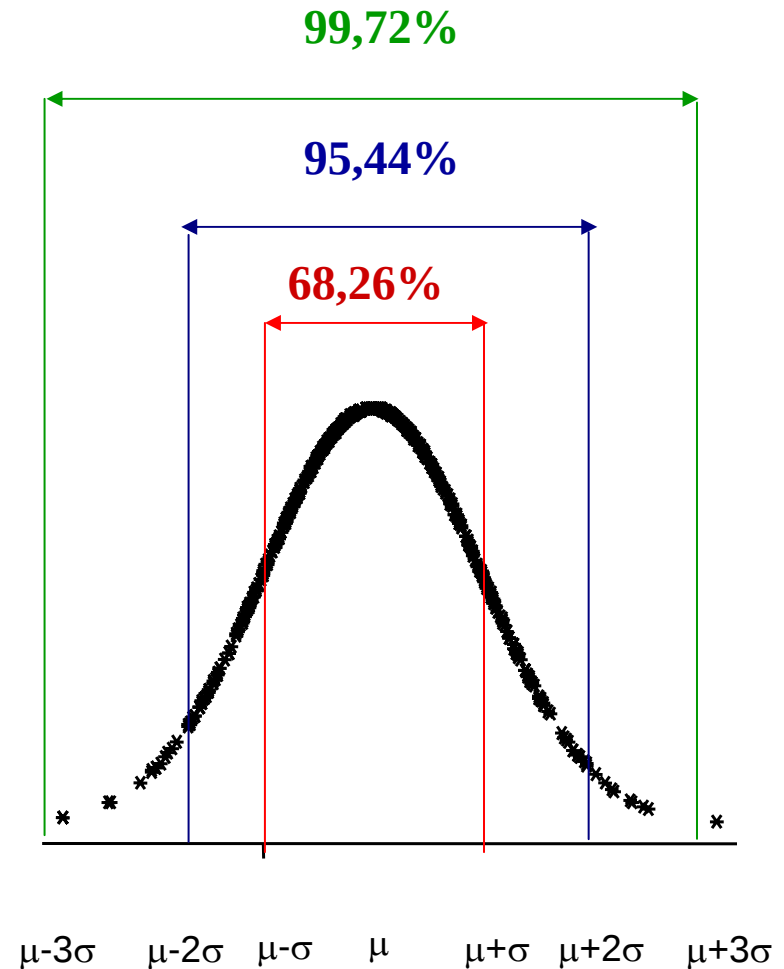
4-6 Distribuição Normal

Alguns resultados úteis relativos à distribuição normal: Para qualquer variável aleatória normal,

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



4-6 Distribuição Normal

Definição : Normal Padrão

Uma variável aleatória normal com:

$$\mu = 0 \quad \text{and} \quad \sigma^2 = 1$$

é chamada de **variável aleatória normal padrão** e denotada por Z .

A função distribuição cumulativa de uma variável aleatória normal padrão é denotada por:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

4-6 Distribuição Normal

- Propriedades da Normal Padrão
 - Os valores z são chamados de escores numa distribuição normal padronizada.
 - A área acumulada está próximo de zero para escores z próximos de $-3,49$.
 - A área acumulada para $z=0$ é $0,50$.
 - A área acumulada está próxima de 1 para escores z próximos de $z=3,49$

4-6 Distribuição Normal

- Propriedades da Normal Padrão

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

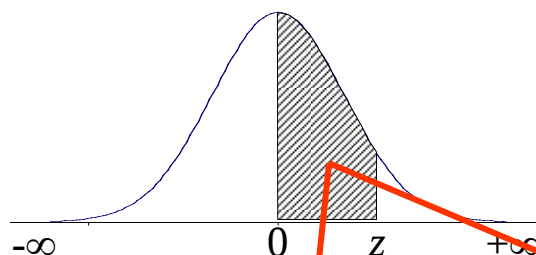
$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} (E(X) - \mu) = \frac{1}{\sigma} (\mu - \mu) = 0$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ integrais podem ser tabeladas!

4-6 Distribuição Normal



$$P(0 < Z < z)$$

$$P(0 < Z < 2,17) = ?$$

$$P(0 < Z < 2,17) = 0,4850$$

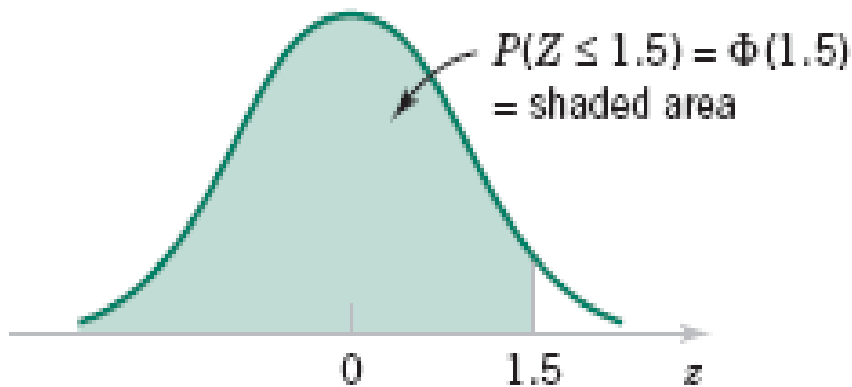
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

4-6 Distribuição Normal

Exemplo 4-11

Considere que Z seja uma variável aleatória normal padrão. A Tabela III do Apêndice fornece probabilidades na forma $\Phi(z) = P(Z \leq z)$. O uso da Tabela III para encontrar $P(Z \leq 1,5)$ é ilustrado na figura 4-13. Leia a coluna z para baixo até encontrar o valor 1,5. A probabilidade de 0,93319 é lida na coluna adjacente, marcada como 0,00.

O topo das colunas se refere às casas centesimais do valor de z em $P(Z \leq z)$. Por exemplo, $P(Z \leq 1,53)$ é encontrado lendo a coluna de z até a linha 1,5 e então selecionando a coluna marcada com 0,03, encontrando-se assim a probabilidade 0,93699.



z	0.00	0.01	0.02	0.03
0	0.50000	0.50399	0.50398	0.51197
$\vdots$		$\vdots$		
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699

Figura 4-13 Função densidade de probabilidade normal padrão.

4-6 Distribuição Normal

Padronizando uma Variável Aleatória Normal

Se X é uma variável aleatória normal com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$, a variável aleatória

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (4-10)$$

É uma variável aleatória normal, com $E(Z) = 0$ e $V(Z) = 1$. Ou seja, Z é uma variável aleatória normal padrão.

4-6 Distribuição Normal

Exemplo 4-13

Suponha que as medidas da corrente em um pedaço de fio sigam a distribuição normal, com uma média de 10 miliampères e uma variância de 4 (miliampères)². Qual é a probabilidade de a medida exceder 13 miliampères?

Seja X a corrente em miliampères. A probabilidade requerida pode ser representada por $P(X > 13)$. Seja $Z = (X - 10)/2$. A relação entre os vários valores de X e os valores transformados de Z é mostrada na figura 4-15. Notamos que $X > 13$ corresponde a $Z > 1,5$. Assim, da Tabela III do Apêndice,

$$P(X > 13) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681$$

Em vez de usar a figura 4-15, a probabilidade pode ser encontrada a partir da desigualdade $X > 13$. Isto é,

$$P(X > 13) = P((X - 10)/2 > (13 - 10)/2) = P(Z > 1.5) = 0.06681$$

4-6 Distribuição Normal

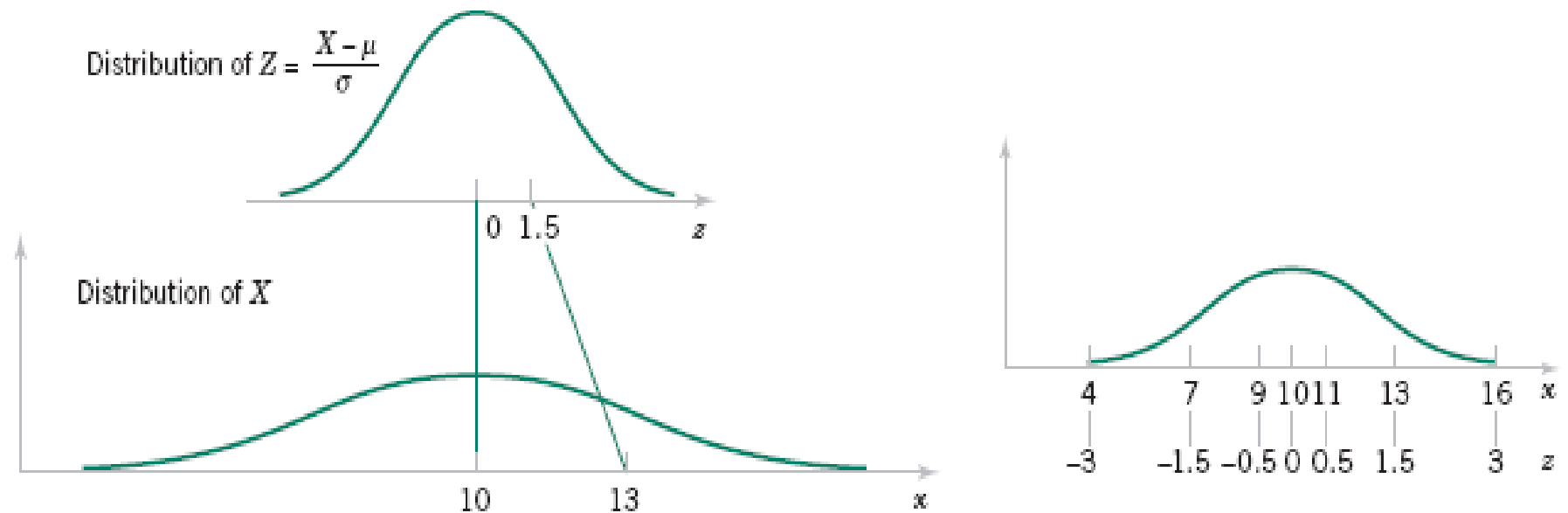


Figura 4-15 Padronizando uma variável aleatória normal.

4-6 Distribuição Normal

Padronizando para calcular uma probabilidade

Suponha que X seja uma variável aleatória com média μ e σ^2 . Então:

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z) \quad (4-11)$$

Em que Z é uma **variável aleatória normal padrão** e $z = (x - \mu)/\sigma$ é o valor z obtido pela padronização de X . A probabilidade é obtida entrando na Tabela III do Apêndice com $z = (x - \mu)/\sigma$.

4-6 Distribuição Normal

Exemplo 4-14

Continuando o exemplo prévio, qual é a probabilidade de a medida da corrente estar entre 9 e 11 miliampères? Da figura 4-15 ou procedendo algebricamente, temos

$$\begin{aligned} P(9 < X < 11) &= P((9-10)/2 < (X-10)/2 < (11-10)/2) = \\ &= P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = \\ &= 0,69146 - 0,30854 \\ &= 0,38292 \end{aligned}$$

Em vez de usar a figura 4-15, a probabilidade pode ser encontrada a partir da desigualdade $X > 13$. Isto é,

$$P(X > 13) = P((X-10)/2 > (13-10)/2) = P(Z > 1.5) = 0.06681$$

4-6 Distribuição Normal

Exemplo 4-14 (continuação)

Determine o valor para o qual a probabilidade de uma medida da corrente estar abaixo desse valor seja 0.98. O valor requerido é mostrado graficamente na figura 4-16. O valor de x é tal que $P(X < x) = 0.98$. Pela padronização, essa expressão de probabilidade pode ser escrita como

$$\begin{aligned}P(X < x) &= P((X-10)/2 < (x-10)/2) \\&= P(Z < (x-10)/2) \\&= 0.98\end{aligned}$$

A Tabela III do Apêndice é usada para encontrar o valor de z , tal que $P(Z < z) = 0.98$. A probabilidade mais próxima da Tabela III resulta em

$$P(Z < 2.05) = 0.97982$$

Conseqüentemente, $(x-10)/2 = 2.05$ e a transformação padronizada é usada ao contrário para determinar x . O resultado é

$$x = 2(2.05) + 10 = 14.1 \text{ miliampères}$$

4-6 Distribuição Normal

Exemplo 4-14 (continuação)

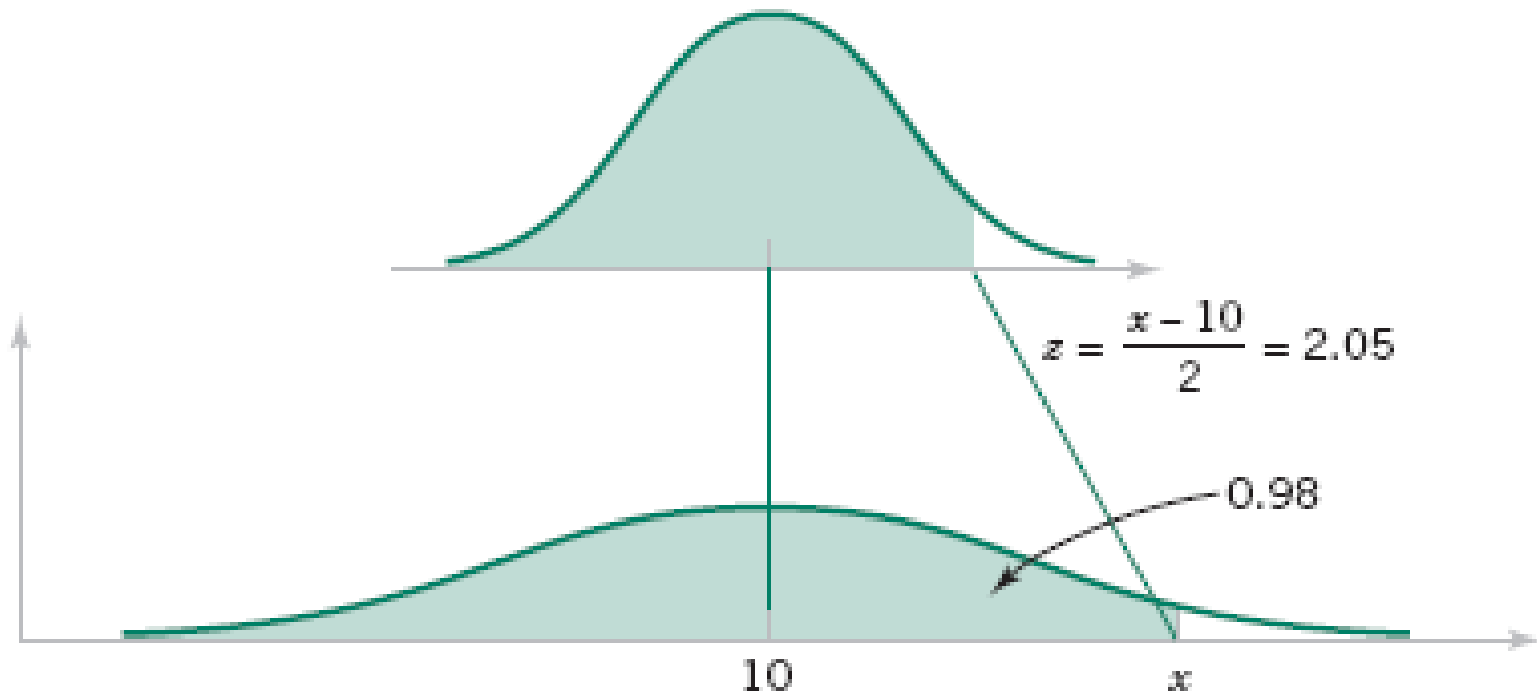


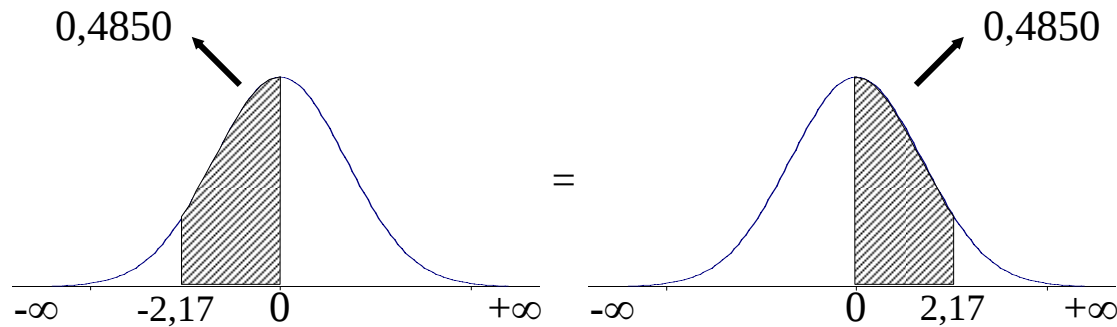
Figura 4-16 Determinando o valor de x para encontrar a probabilidade especificada.

4-6 Distribuição Normal

Determinando probabilidades

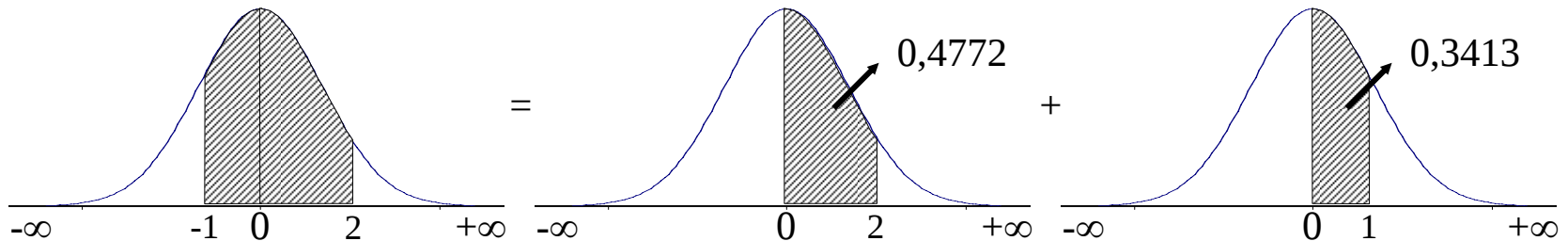
$$P(-2,17 < Z < 0) = ?$$

$$P(-2,17 < Z < 0) = 0,4850$$



$$P(-1 < Z < 2) = ?$$

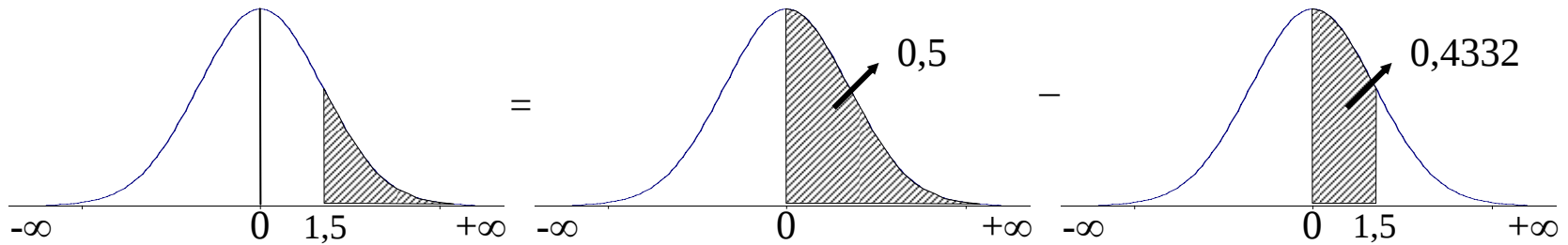
$$P(-1 < Z < 2) = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185$$



4-6 Distribuição Normal

Determinando probabilidades

$$P(Z > 1,5) = ?$$



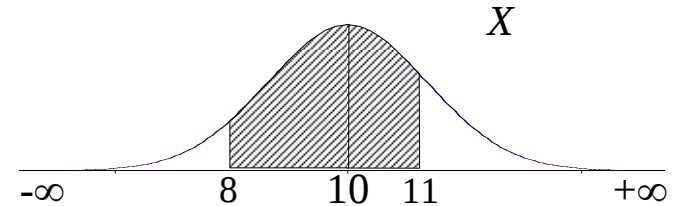
$$P(Z > 1,5) = 0,5 - 0,4332 = 0,0668$$

4-6 Distribuição Normal

Determinando probabilidades

$$X \sim N(10, 4)$$

$$P(8 < X < 11) = ?$$

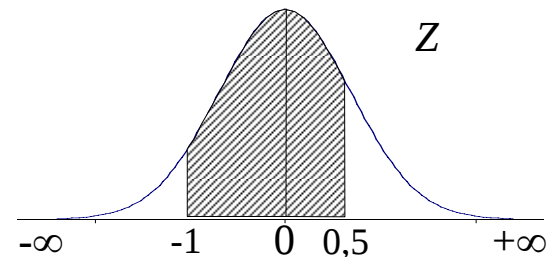


$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P(8 - 10 < X - 10 < 11 - 10) = ?$$

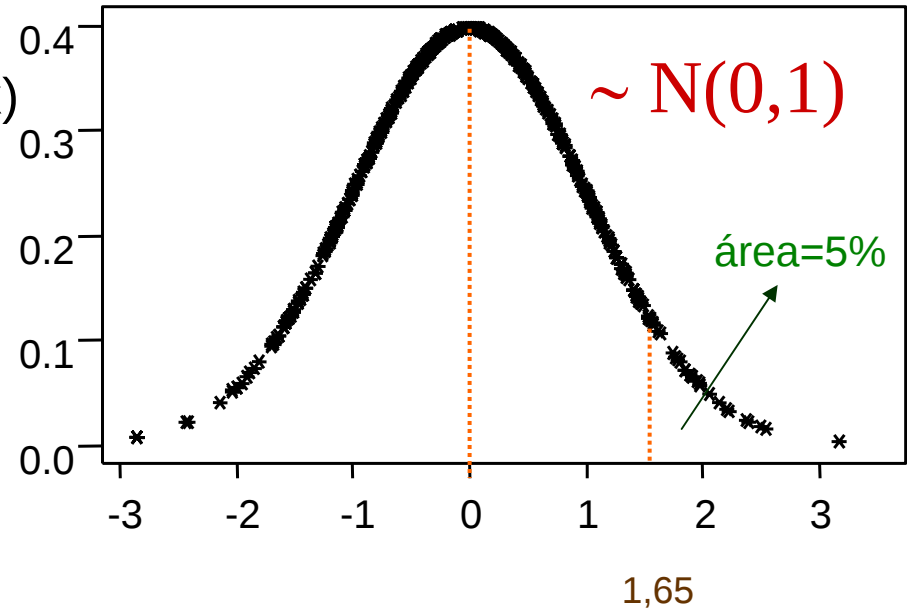
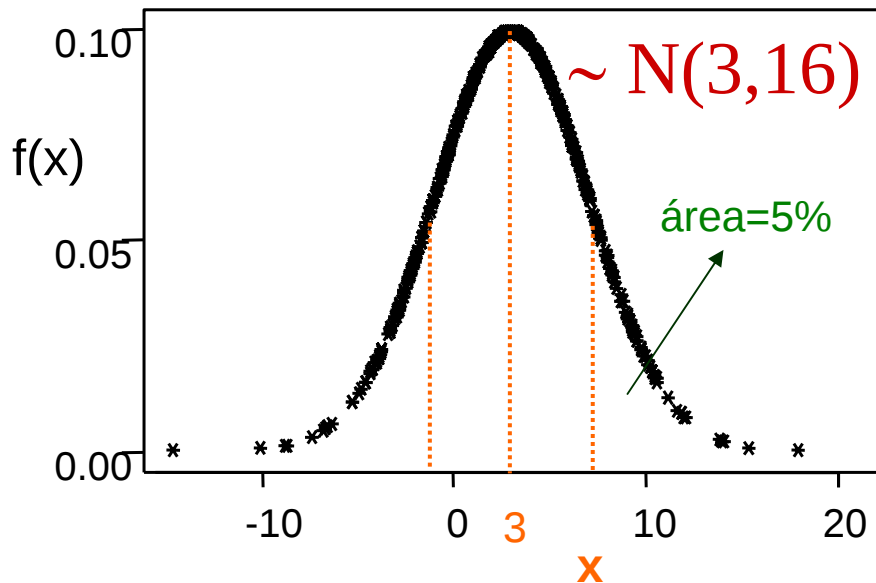
$$P\left(\frac{8-10}{2} < \underbrace{\frac{X-10}{2}}_Z < \frac{11-10}{2}\right) = ?$$

$$P(-1 < Z < 0,5) = ?$$



4-6 Distribuição Normal

Determinando escores (valores de x)



$$P(X \geq x) = 0,05 \quad \longrightarrow \quad P(Z \geq 1,65) = 0,05$$

$$x = \mu + z\sigma = 3 + 1.65 * 4 = 9,6$$

4-6 Distribuição Normal

Distribuição de soma de variáveis aleatórias

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X_3 \sim N(\mu_3, \sigma_3^2) \end{array} \right\} \text{ 3 v.a. independentes com distribuições normal}$$

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

Qual a distribuição de Y ?

$$Y \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

$$\text{Var}(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

4-6 Distribuição Normal

Distribuição de soma de variáveis aleatórias

$$X_1 \sim ?(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim ?(\mu_2, \sigma_2^2)$$

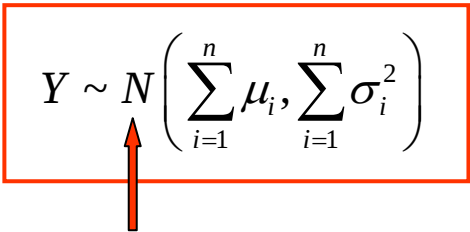
$\vdots$

$$X_n \sim ?(\mu_n, \sigma_n^2)$$

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Qual a distribuição de Y ?

se n for grande:


$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

Teorema do Limite Central

4-6 Distribuição Normal

Teorema do Limite Central

- Se amostras de tamanho n , onde n é grande, forem tiradas de uma população qualquer, com média μ e um desvio padrão σ , então a distribuição amostral de médias das amostras se aproximará de uma distribuição normal.
- Se a própria população for normalmente distribuída, a distribuição amostral das médias das amostras será normalmente distribuída para qualquer tamanho de amostra n .
- Em ambos os casos, a distribuição amostral das médias tem média igual a média da população ou seja $\mu_{\text{média}} = \mu$. E a distribuição amostral de médias das amostras tem uma variância igual a $1/n$ vezes a variância da população ou seja $\sigma^2_{\text{média}} = \sigma^2/n$.

4-6 Distribuição Normal

Teorema do Limite Central

Média

Idade	Min
18-24	9
25-29	11
30-34	11
35-49	16
50-65	21
65 ou mais	33

- Considere como resultado de um levantamento feito com adultos que afirmaram ter lido o jornal no dia anterior.
- Selecione ao acaso 50 adultos com idades entre 18 e 24 anos.
- Qual é a probabilidade de que o tempo médio gasto por eles esteja entre 8,7 e 9,5?
- Suponha $\sigma=1,5$ minutos

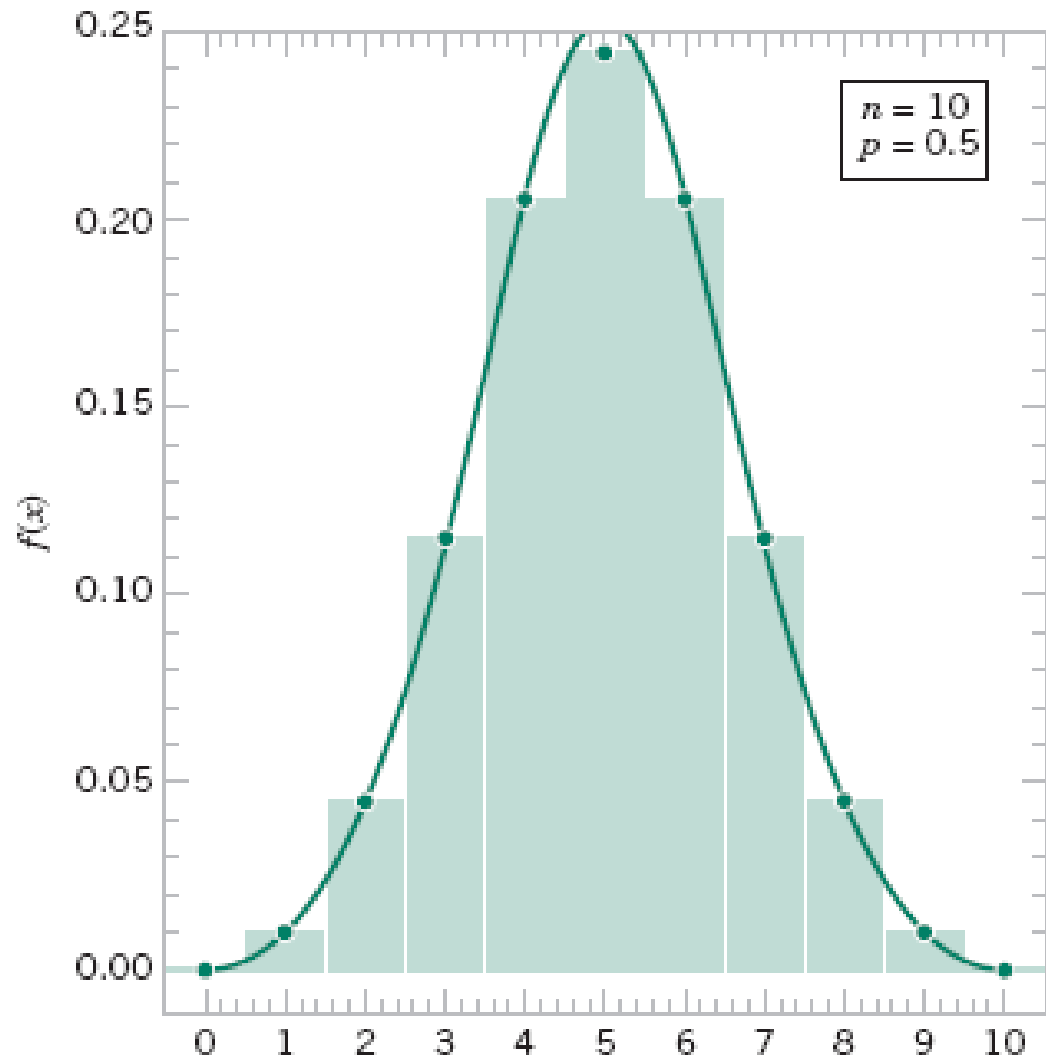
4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

- Sob certas condições, a distribuição Normal pode ser usada para aproximar a distribuição Binomial e a distribuição de Poisson

4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

Figura 4-19

Aproximação da distribuição binomial pela normal.



4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo 4-17

Em um canal digital de comunicação, suponha que o número de bits recebidos com erro possa ser modelado por uma variável aleatória binomial. Suponha que a probabilidade de um bit ser recebido com erro seja 1×10^{-5} . Se 16 milhões de bits forem transmitidos, qual será a probabilidade de se ter mais que 150 erros?

Seja a variável aleatória X o número de erros. Então X é uma variável aleatória binomial e

$$P(X > 150) = 1 - P(x \leq 150) = 1 - \sum_{x=0}^{150} \binom{16,000,000}{x} (10^{-5})^x (1 - 10^{-5})^{16,000,000-x}$$

Claramente, a probabilidade no exemplo 4-17 é difícil de calcular. Felizmente, a distribuição normal pode ser usada para prover uma excelente aproximação nesse exemplo.

4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

Aproximação da distribuição Binomial pela Normal

Se X for uma variável aleatória binomial com parâmetros n e p

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (4-12)$$

Será aproximadamente uma variável aleatória normal padrão. De modo a aproximar uma probabilidade binomial por uma distribuição normal, uma correção de continuidade é aplicada como se segue:

$$P(X \leq x) = P(X \leq x + 0.5) \cong P\left(Z \leq \frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(x \leq X) = P(x - 0.5 \leq X) \cong P\left(\frac{x - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z\right)$$

A aproximação é boa para $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo 4-18

O problema de comunicação digital no exemplo prévio é resolvido como segue

$$\begin{aligned} P(X > 150) &= P\left(\frac{X - 160}{\sqrt{160(1 - 10^{-5})}} > \frac{150 - 160}{\sqrt{160(1 - 10^{-5})}}\right) \\ &= P(Z > -0.79) = P(Z < 0.79) = 0.785 \end{aligned}$$

Porque $np = (16 \times 10^6)(1 \times 10^{-5}) = 160$ e $n(1-p)$ é muito maior, espera-se que a aproximação

4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

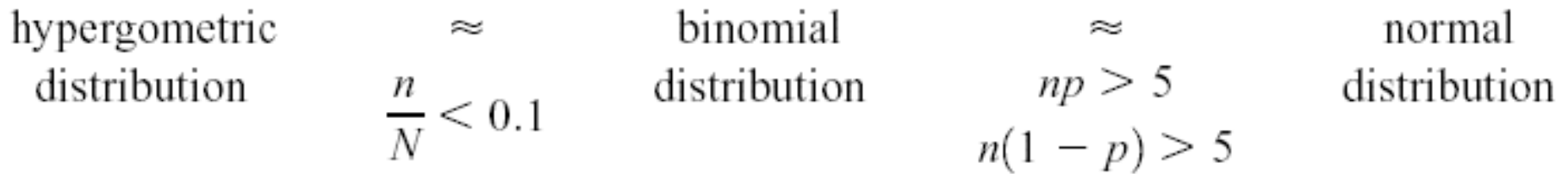
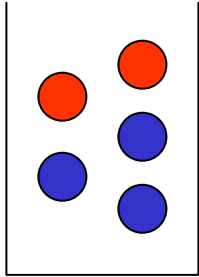


Figura 4-21 Condições para aproximar as probabilidades hipergeométricas e binomial.

4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson



Considere o experimento: retiram-se 100 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 100 escolhidas.

Calcule: $P(30 \leq X \leq 51)$

$$n = 100 \quad p = \frac{2}{5} = 0,4$$

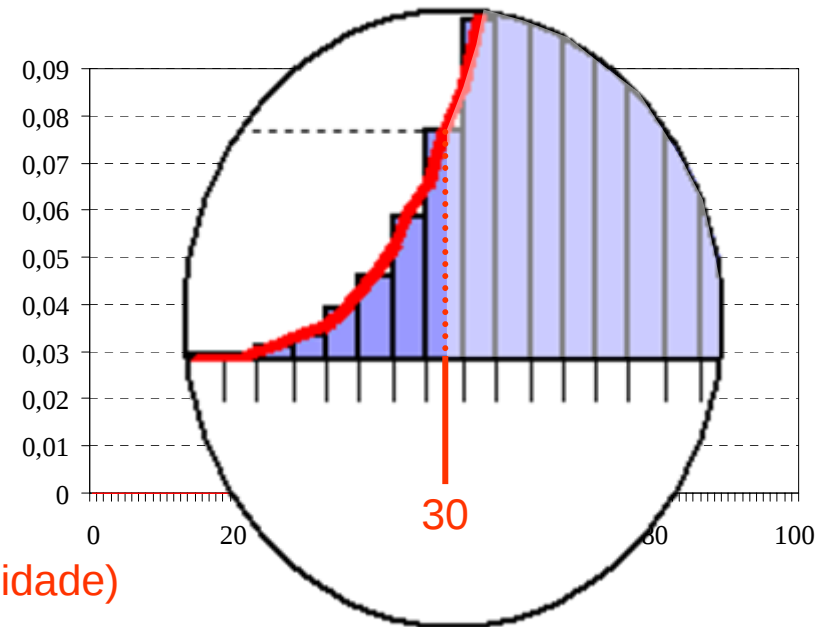
$$E(X) = np = 100 * 0,4 = 40$$

$$Var(X) = npq = 100 * 0,4 * 0,6 = 24$$

$$X \sim N(40, 24)$$

$$P(29,5 < X < 51,5) = ? \text{ (correção de continuidade)}$$

$$P\left(\frac{29,5 - 40}{\sqrt{24}} < Z < \frac{51,5 - 40}{\sqrt{24}}\right) = 0,9745 \text{ (valor exato para Binomial} \Rightarrow 0,9752)$$



4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

Aproximação da distribuição Poisson pela Normal

Se X for uma variável aleatória Poisson com $E(X) = \lambda$ e $V(X) = \lambda$,

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \quad (4-13)$$

Será aproximadamente uma variável aleatória normal padrão. A aproximação é boa para $\lambda = 5$.

4-7 Aproximação da Normal pelas distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo 4-20

Considere que o número de partículas de asbestos em um metro quadrado de poeira em uma superfície siga a distribuição de Poisson, com média de 1000. Se um metro quadrado de poeira for analisado, qual será a probabilidade de que 950 ou menos partículas sejam encontradas?

Essa probabilidade pode ser expressa exatamente como

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000} x^{1000}}{x!}$$

A dificuldade computacional é clara. A probabilidade pode ser aproximada por

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{950 - 1000}{\sqrt{1000}}\right) = P(Z \leq -1.58) = 0.057$$