MEDIDAS DE PROXIMIDADE PARA DADOS SIMBÓLICOS

Renata Maria C. R. de Souza

Centro de Informática U·F·P·E

Conteúdo

1 - Conceito de Dissimilaridade e Similaridade

2 - Medidas para Dados Simbólicos de tipo Multivalorado e Intervalo

3 - Dissimilaridades para dados modais

Conceito de Dissimilaridade e Similaridade

$\Omega = \{1,...,n\}$ um conjunto de indivíduos

ω - um indivíduo

$E = \{C_1,...,C_m\} \subset \Omega$ um conjunto de m classes

Y_j - uma variável descritora

O_i - conjunto dos possíveis valores de Y_j

Centro de Informática U·F·P·E

Definição de Similaridade

$$s: \Omega \times \Omega \rightarrow IR^{+}$$

Propriedades

1. $\forall\ (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ e $\omega \neq \omega'$: $s(\omega, \omega) = s(\omega', \omega') > s(\omega, \omega')$
2. $\forall\ (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$: $s(\omega, \omega') = s(\omega', \omega)$ (**simetria**)

Definição de Dissimilaridade

$$d: \Omega \times \Omega \rightarrow IR^{+}$$

Propriedades

1. $\forall\ \omega \in \Omega,\ d(\omega, \omega) = 0$
2. $\forall\ (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$: $d(\omega, \omega') = d(\omega', \omega)$ (**simetria**)

Transformações

Similaridade (s) $\rightleftarrows$ Dissimilaridade (d)

Exemplos

$$s := \max(d) - d \qquad s := \sqrt{\max(d) - d} \qquad s := \max(d^2) - d^2$$

onde max(d) é o valor máximo observado

Distância: Um caso especial de dissimilaridade

Um índice de dissimilaridade d é uma distância se satisfizer,aos itens 1 e 2 e também à propriedade de **desigualdade triangular**:

3. $\forall\ (\omega, \omega', \omega'') \in \Omega \times \Omega$: $d\ (\omega, \omega') \leq d\ (\omega, \omega'') + d\ (\omega'', \omega')$

Se não satisfaz a desigualdade triangular é uma semi-métrica ou um índice de distância

Exemplos

$x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1p})'$ $\quad$ $x_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2p})'$

Distância de **Minkowski** $d(x_1, x_2) = \left[\sum_{j=1}^{p} (x_{1j} - x_{2j})^q \right]^{1/q}$

q = 2 distância **euclidiana**

q = 1 distância de **Manhattan** (distância city-block)

$$d(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{p} \left| (x_{1j} - x_{2j}) \right|$$

Medidas para Dados Simbólicos Multivalorados e Intervalo

Tabela de dados simbólicos (multivalorada, intervalo)

E	peso	cor
1	[30,40]	{amarelo, branco}
2	[35,65]	{preto, cinza}
3	[20,30]	{verde,branco}

E - conjunto de classes

Y_1 – peso (variável intervalo)

Y_2 – cor (variável categórica

O_1 = [30,70]

O_2 = {amarelo, branco, laranja, preto, cinza, verde, azul}

Três objetos simbólicos booleanos

s_a = (a,R,d) s_b = (b,R,d) s_c = (c,R,d)   onde

$$a = [y_1 \in [30,40]] \wedge [y_2 \in \{amarelo, branco\}]$$

$$b = [y_1 \in [35,65]] \wedge [y_2 \in \{preto, cinza\}]$$

$$c = [y_1 \in [20,30]] \wedge [y_2 \in \{verde, branco\}]$$

$d(s_g,s_h)$ – dissimilaridade entre s_g e s_h

Medidas de Dissimilaridade

1 – Abordagem Gowda e Diday

$$a = [y_1 \in A_1] \wedge [y_2 \in A_2]$$

$$b = [y_1 \in B_1] \wedge [y_2 \in B_2]$$

Distância - $$d(s_a, s_b) = \sum_{j=1}^{2} D(A_j, B_j)$$

$$D(A_j, B_j) = D_p(A_j, B_j) + D_s(A_j, B_j) + D_c(A_j, B_j)$$

D_P - posição $(0 \leq D_P \leq 1)$

D_s – espalhamento $(0 \leq D_S \leq 1)$

D_c – conteúdo $(0 \leq D_c \leq 1)$

Centro de Informática U·F·P·E

Variáveis Quantitativas

$$D(A_j,B_j)=D_p(A_j,B_j)+D_s(A_j,B_j)+D_c(A_j,B_j)$$

$A_j = [a_{ji},a_{js}]$ $B_j=[b_{ji},b_{js}]$ $j=1,2$

- Componente Posição

$$D_P(A_j,B_j)=\frac{|a_{ji}-b_{ji}|}{|O_j|}$$

O_j – conjunto dos possíveis valores de Y_j

- Componente Espalhamento

$$D_s(A_j, B_j) = \frac{|L_a - L_b|}{L_s}$$

onde

$$L_a = |a_{js} - a_{ji}| \qquad L_b = |b_{js} - b_{ji}| \quad L_S = |A_j \oplus B_j| = \max(a_{js}, b_{js}) - \min(a_{ji}, b_{ji})|$$

- Componente Conteúdo

$$D_C(A_j, B_j) = \frac{L_a + L_b - 2 \times |A_j \cap B_j|}{L_s}$$

Função de Comparação

- O componente posição mede as diferenças entre os limites inferiores de dois intervalos.
- O componente espalhamento mede as diferenças entre ranges de dois intervalos.
- O componente conteúdo é baseado na diferença entre ranges considerando a posição dos intervalos.

Variáveis Nominais ou ordinais

$$D(A_j, B_j) = D_s(A_j, B_j) + D_c(A_j, B_j)$$

- Componente Espalhamento

$$D_s = \frac{|L_a - L_b|}{L_s}$$

$$L_a = |A_j| \qquad L_b = |B_j| \qquad L_s = |A_j \cup B_j|$$

- Componente Conteúdo

$$D_s = \frac{L_a + L_b - 2 \times |A_j \cap B_j|}{L_s}$$

Função de Comparação

- O componente espalhamento mede as diferenças entre cardinais de dois conjuntos.
- O componente conteúdo é baseado na diferença entre cardinais de subconjuntos disjuntos de A_j e B_j.

1 – Abordagem Gowda e Diday

Exemplo 1

Para variável 1

A_1 = [30,40] B_1 = [35,65] $|O_1|$= 40

$L_s = |\max(40,65)-\min(30,35)|=35$

$$D_P = \frac{5}{40} \quad D_s = \frac{|10-30|}{35} = \frac{20}{35} \qquad D_C = \frac{10+30-2\times5}{35} = \frac{30}{35}$$

$D(A_1,B_1)$= 1.55

Para variável 2

A_2 = {amarelo,branco} B_2 = {preto,cinza}

$L_s = |A_2 \cup B_2|=4$

$$D_s = \frac{2-2}{4} = 0 \qquad D_C = \frac{4}{4} = 1$$

$D(A_2,B_2)$= 1.0

$D(s_a,s_b)$= 2.55

2 – Abordagem Ichino e Yaguchi

- Função de comparação

$$\phi(A_j, B_j) = \mu(A_j \oplus B_j) - \mu(A_j \cap B_j) + \gamma(2\mu(A_j \cap B_j) - \mu(A_j) - \mu(B_j))$$

$$0 \leq \gamma \leq 0.5$$

- γ=0

$$\phi(A_j, B_j) = \mu(A_j \oplus B_j) - \mu(A_j \cap B_j)$$

- γ=0.5

$$\phi(A_j, B_j) = \mu(A_j \oplus B_j) - \frac{(\mu(A_j) + \mu(B_j))}{2}$$

- A função ϕ é uma distância

2 – Abordagem Ichino e Yaguchi

- A função de comparação pode ser reescrita como

$$\phi(A_j, B_j) = \mu(A_j \oplus B_j) - \mu(A_j \cap B_j) - \gamma(\mu(\overline{A}_j \cap B_j) + \mu(A_j \cap \overline{B}_j))$$

$$0 \le \gamma \le 0.5$$

2 – Abordagem Ichino e Yaguchi

- Normalização de Ichino

$$\Psi(A_j, B_j) = \frac{\phi(A_j, B_j)}{\mu(O_j)}$$

- Normalização de De Carvalho

$$\varphi(A_j, B_j) = \frac{\phi(A_j, B_j)}{\mu(A_j \oplus B_j)}$$

- As funções acima são distâncias.

2 – Abordagem Ichino e Yaguchi

- Função de Agregação

$$d_q(a,b) = \left(\sum_{j=1}^{p} w_j \left(FC(A_j, B_j) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad q \geq 1$$

$$w_j > 0 \quad e \quad \sum_{j=1}^{p} w_j = 1, \quad FC = \phi, \Psi, \varphi$$

- Propriedade: A função d_q é uma distância.
- A função sem os pesos é uma extensão da Minkowski para intervalos.

Centro de Informática U·F·P·E

Exemplo 2

2 – Abordagem Ichino e Yaguchi

$A_1 = [30,40]$ $B_1 = [35,65]$

$A_2 = \{amarelo,branco\}$ $B_2 = \{preto,cinza\}$

Para variável 1 com γ=0:

$$\begin{aligned}\phi(A_j, B_j) &= \mu(A_j \oplus B_j) - \mu(A_j \cap B_j) \\ &= (65-30)-(40-35) = 35-5 = 30\end{aligned}$$

Para variável 2 com γ=0:

$$\phi(A_j, B_j) = \mu(A_j \oplus B_j) - \mu(A_j \cap B_j) = 4-0 = 4$$

Centro de Informática U·F·P·E

Exemplo 2

2 – Abordagem Ichino e Yaguchi

- Função de Agregação

$$d_2(a,b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2}\left(\phi(A_j, B_j)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(30)^2 + \frac{1}{2}(4)^2} = 21.4$$

3– Abordagem De Carvalho

- Função de Agregação

$$d_1(a,b) = \pi(a \oplus b) - \pi(a \wedge b) + \gamma(2\pi(a \wedge b) - \pi(a) - \pi(b))$$

- Versões Normalizadas

$$d_2(a,b) = \frac{\pi(a \oplus b) - \pi(a \wedge b) + \gamma(2\pi(a \wedge b) - \pi(a) - \pi(b))}{\pi(O)}$$

$$d_3(a,b) = \frac{\pi(a \oplus b) - \pi(a \wedge b) + \gamma(2\pi(a \wedge b) - \pi(a) - \pi(b))}{\pi(a \oplus b)}$$

- d_1 e d_2 são índices de distâncias (semi-métricas)
- d_3 é uma distância
- É uma versão da distância da Ichino e Yaguchi baseada no potencial.

Exemplo3

3– Abordagem De Carvalho

A_1 = [30,40] B_1 = [35,65] O_1=[30,70]

A_2 = {amarelo,branco} B_2 = {amarelo,cinza}

o={amarelo, branco, laranja, preto, cinza, verde, azul}

Para variável 1:

$$A_j \oplus B_j = [30,65] \quad e \quad A_1 \cap A_2 = [35,40]$$

Para variável 2:

$$A_j \oplus B_j = \{amarelo, branco, cinza\}$$

$$A_j \cap B_j = \{amarelo\}$$

3– Abordagem De Carvalho

Distâncias com γ=0.0

$$d_1(a,b) = \pi(a \oplus b) - \pi(a \wedge b) + \gamma(2\pi(a \wedge b) - \pi(a) - \pi(b))$$

$$d_1(a,b) = (65-30)*3 - (40-35)*1 = 100$$

$$d_2(a,b) = \frac{\pi(a \oplus b) - \pi(a \wedge b) + \gamma(2\pi(a \wedge b) - \pi(a) - \pi(b))}{\pi(O)}$$

$$d_2(a,b) = \frac{(65-30)*3 - (40-35)*1}{(70-30)*7} = 0.357$$

Exemplo3

3– Abordagem De Carvalho

$$d_3(a,b) = \frac{\pi(a \oplus b) - \pi(a \wedge b) + \gamma(2\pi(a \wedge b) - \pi(a) - \pi(b))}{\pi(a \oplus b)}$$

$$d_3(a,b) = \frac{(65-30)*3-(40-35)*1}{(65-30)*3} = 0.952$$

4 – Abordagem De Carvalho

- Função de comparação - $d_j\ (A_j, B_j)$ para Y_j

	Acordo	Desacordo	Total
Acordo	$\alpha = \mu(A_j \cap B_j)$	$\beta = \mu(A_j \cap c(B_j))$	$\mu(A_j)$
Desacordo	$X = \mu(c(A_j) \cap B_j)$	$\delta = \mu(c(A_j) \cap c(B_j))$	$\mu(c(A_j))$
Total	$\mu(B_j)$	$\alpha = \mu(c(B_j))$	$\mu(O_j)$

$c(A_j)$ é o complementar de A_j

$\mu(A_j) = |A_j|$ se Y_j é nominal

$|a_{js} - a_{ji}|$ se Y_j é intervalo ou ordinal

Funções de Comparação

	Função	Propriedade
s_1	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta + X}$	Métrica
s_2	$\frac{2\alpha}{2\alpha + \beta + X}$	Semi-métrica
s_3	$\frac{\alpha}{\alpha + 2(\beta + X)}$	Métrica
s_4	$\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + X}\right]$	Semi-métrica
s_5	$\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha + X)}}$	Semi-métrica

$s_v \in [0,1]$

$s_v = 0$ para $|A_j \cap B_j| = 0$

$= 1$ para $A_j = B_j$

$d_v = 1 - s_v$

- Função de agregação - $d(s_a,s_b)$

$$d(s_a,s_b)=\left[\sum_{j=1}^{p}\left[d_v(A_j,B_j)\right]^q\right]^{1/q},\quad q\geq 1$$

$$v=1,2,3,4,5$$

- Função de agregação com pesos - $d(s_a,s_b)$

$$d(s_a,s_b)=\left[\sum_{j=1}^{p}\left[w_j d_v(A_j,B_j)\right]^q\right]^{1/q},\quad q\geq 1$$

$$w_j>0 \quad e \quad \sum_{j=1}^{p} w_j=1 \quad v=1,2,3,4,5$$

Exemplo 4

A_1 = [30,40] B_1 = [35,65]

A_2 = {amarelo,branco} B_2 = {preto,cinza}

Utilizando s_1, q = 1 e função de agregação sem pesos

<u>Para variável 1</u>

$$d_1(A_1,B_1) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta+X} = 1 - \frac{|35-40|}{|35-30|+|35-30|+|65-40|} = 0.85$$

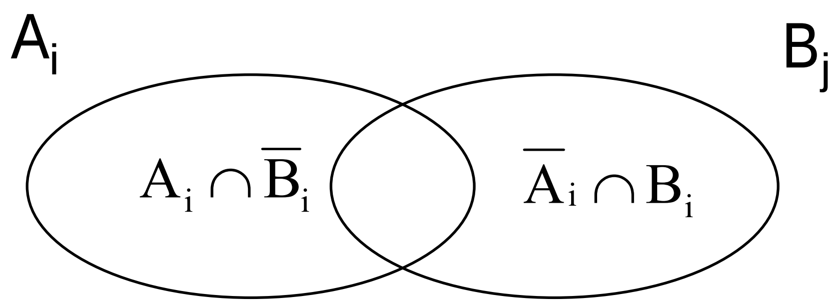
<u>Para variável 2</u>

$$d_1(A_2,B_2) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta+X} = 1 - \frac{0}{0+2+2} = 1$$

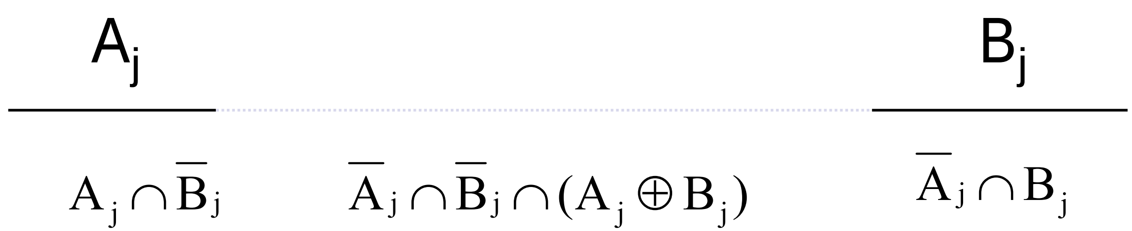
$d(s_a,s_b)$= 1.85

Centro de Informática U·F·P·E

5 – Abordagem De Carvalho



(a) conjuntos não ordenados



(b) conjuntos ordenados ou intervalos

Função de comparação - $\varphi_{1k\gamma}(A_j, B_j)$

$$\phi_{1k\gamma}(A_j, B_j) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\phi_{1\gamma}(A_j, B_j)\right)^k + \left(\phi_{2\gamma}(A_j, B_j)\right)^k \right] \right\}^{1/k}$$

K $\in$ {1,…}, 0 $\leq \gamma \leq$ 0.5

$$\phi_{1\gamma}(A_j, B_j) = (1 - 2\gamma)\mu(A_j \cap \overline{B}_j) + \mu(\overline{A}_j \cap B_j) + \mu(\overline{A}_j \cap \overline{B}_j \cap (A_j \oplus B_j))$$

$$\phi_{2\gamma}(A_j, B_j) = \mu(A_j \cap \overline{B}_j) + (1 - 2\gamma)\mu(\overline{A}_j \cap B_j) + \mu(\overline{A}_j \cap \overline{B}_j \cap (A_j \oplus B_j))$$

$\mu(\overline{A}_j \cap \overline{B}_j \cap (A_j \oplus B_j))$ -Somente para variáveis quantitativas ou ordinais

Para γ=0.5, essa função pode ser interpretada como a função de Minkowski

$$\phi(A_j, B_j) = \left\{ 0{,}5 \left[| a_{ji} - b_{ji} |^k + | a_{js} - b_{js} |^k \right] \right\}^{1/k}$$

Versões normalizadas

$$\phi_{2k\gamma}(A_j,B_j)=\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\phi_{1\gamma}(A_j,B_j)}{\mu(A_j\oplus B_j)}\right)^k+\left(\frac{\phi_{2\gamma}(A_j,B_j)}{\mu(A_j\oplus B_j)}\right)^k\right]\right\}^{1/k}$$

$$\phi_{3k\gamma}(A_j,B_j)=\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\phi_{1\gamma}(A_j,B_j)}{\mu(O_j)}\right)^k+\left(\frac{\phi_{2\gamma}(A_j,B_j)}{\mu(O_j)}\right)^k\right]\right\}^{1/k}$$

- $0\leq\phi_{ik\gamma}(A_j,B_j)\leq 1,\quad i\in\{2,3\}$
- $\phi_{ik\gamma}$ são métricas
- K=1, $\phi_{1k\gamma}(A_j,B_j)$ e $\phi_{3k\gamma}(A_j,B_j)$ são Abordagem Ichino e Yaguchi

- Função de agregação - $d(s_a,s_b)$

$$d(s_a,s_b)=\frac{1}{p}\left[\sum_{j=1}^{p}\left\{\phi_{gk\gamma}(A_j,B_j)\right\}^r\right]^{1/r},\quad g\in\{1,2,3\}\quad k,r\in\{1,\ldots\}$$

Exemplo 5

$A_1 = [30,40]$ $B_1 = [35,65]$ $O=[30,70]$

$A_2 = \{amarelo,branco\}$ $B_2 = \{preto,cinza\}$

Para variável 1 com k=1 γ=0

$$\phi_{1\gamma}(A_1,B_1) = |\,65-40\,| = 25 \qquad \phi_{2\gamma}(A_1,B_1) = |\,35-30\,| = 5$$

$$\phi_{1k\gamma}(A_1,B_1) = 25+5 = 30$$

Para variável 2 com k=1 e γ=0

$$\phi_{1\gamma}(A_2,B_2) = 2 \qquad \phi_{2\gamma}(A_2,B_2) = 2 \qquad \phi_{1k\gamma}(A_2,B_2) = 2+2 = 4$$

$d(s_a,s_b)$= 34/2 com r=1

6– Abordagem De Carvalho

- Função de Comparação
  - Diferença de conteúdo: S_i e d_v v=1,2,3,4,5 (funções baseadas nos índices de acordo e desacordo)

$$\phi_C^i(A_j, B_j) = 1 - s_v = d_v$$

  - Diferença de posição

$$\phi_P^i(A_j, B_j) = \frac{\mu(\overline{A}_j \cap \overline{B}_j \cap (A_j \oplus B_j))}{\mu(A_j \oplus B_j)}$$

6– Abordagem De Carvalho

- Função de agregação

$$d_q^i(a,b) = \left(\sum_{j=1}^{p} w_j (\phi(A_j, B_j))^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad q \geq 1$$

$$w_j > 0 \quad \sum_{j=1}^{p} w_j = 1 \quad i = 1,\ldots,5$$

$$\phi(A_j, B_j) = \frac{1}{2}\left[\phi_C(A_j, B_j) + \phi_P(A_j, B_j)\right]$$

Exemplo 6

A_1 = [30,40] B_1 = [35,65] O=[30,70]

A_2 = {amarelo,branco} B_2 = {preto,cinza}

<u>Para variável 1: Função de Comparação</u>

$$\phi_c^1(A_1,B_1)=1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=1-\frac{5}{5+5+25}=0.857$$

$$\phi_P^1(A_1,B_1)=\frac{\mu(\overline{A}_1\cap\overline{B}_j\cap(A_j\oplus B_j))}{\mu(A_j\oplus B_j)}=0$$

$$\phi^1(A_1,B_1)=\frac{1}{2}(0.857+0)=0.429$$

Exemplo 6

A$_1$ = [30,40] B$_1$ = [35,65] O=[30,70]

A$_2$ = {amarelo,branco} B$_2$ = {preto,cinza}

Para variável 2: Função de Comparação

$$\phi_c^1(A_2,B_2)=1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=1-\frac{1}{1+1+1}=0.667$$

$$\phi_P^1(A_1,B_1)=\frac{\mu(\overline{A}_1\cap\overline{B}_j\cap(A_j\oplus B_j))}{\mu(A_j\oplus B_j)}=0$$

$$\phi^1(A_1,B_1)=\frac{1}{2}(0.667+0)=0.334$$

Exemplo 6

A_1 = [30,40] B_1 = [35,65] O=[30,70]

A_2 = {amarelo,branco} B_2 = {preto,cinza}

Função de Agregação

$$d_2(a,b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2} (\phi(A_j, B_j))^2}$$

$$d_2(a,b) = \sqrt{\frac{1}{2}(0.429^2 + 0.334^2)} = 0.384$$

Medidas para Dados Simbólicos Modais

$I_1,\ldots,I_m$ - intervalos disjuntos

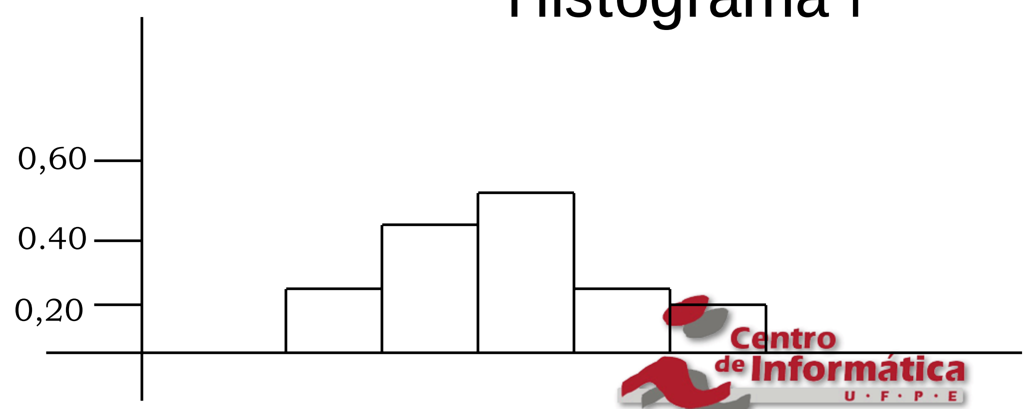
Histogramas

$J_1,\ldots,J_M$ - intervalos disjuntos

$$p(y) = \sum_{s=1}^{m} p_s \, 1\!\!1_{I_s}(y) \qquad q(y) = \sum_{t=1}^{M} q_t \, 1\!\!1_{I_t}(y)$$

$\lambda_1(K_{st})$ - largura de K_{st} $\qquad K_{st} = I_s \cap J_t$

Histograma P



1 - Csiszár (1967)

$$d(P,Q)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{M}\log\left\{\frac{q_t}{p_s}\right\}\cdot p_s\cdot\lambda_1(K_{st})$$

2 - Kullback-Leibler

$$d(P,Q)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{M}\log\left\{\frac{q_t}{p_s}\right\}\cdot(q_t-p_s)\cdot\lambda_1(K_{st})$$

3 - X^2 - divergente

$$d(P,Q)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{M}\frac{\left|p_s-q_t\right|^2}{p_s}\cdot\lambda_1(K_{st})$$

Exemplo 7

	V – freq %	Q – freq %
10 — 20	5	10
20 — 30	10	30
30 — 40	40	15
40 — 50	12	10
50 — 60	15	20
60 — 70	10	10
70 — 80	8	5

3 - X^2 - divergente

$$d(P,Q) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{M} \frac{|p_s - q_t|^2}{p_s} \cdot \lambda_1(K_{st}) = 57{,}61$$

Coeficiente de Afinidade

A – Caso Histogramas ($I_1,\ldots,I_m$ - intervalos disjuntos)

E	…	Y_i	…	Σ
:				
p		$(p_{i1},..,p_{im})$		
:				
q		$(q_{i1},..,q_{im})$		
:				
Σ				n

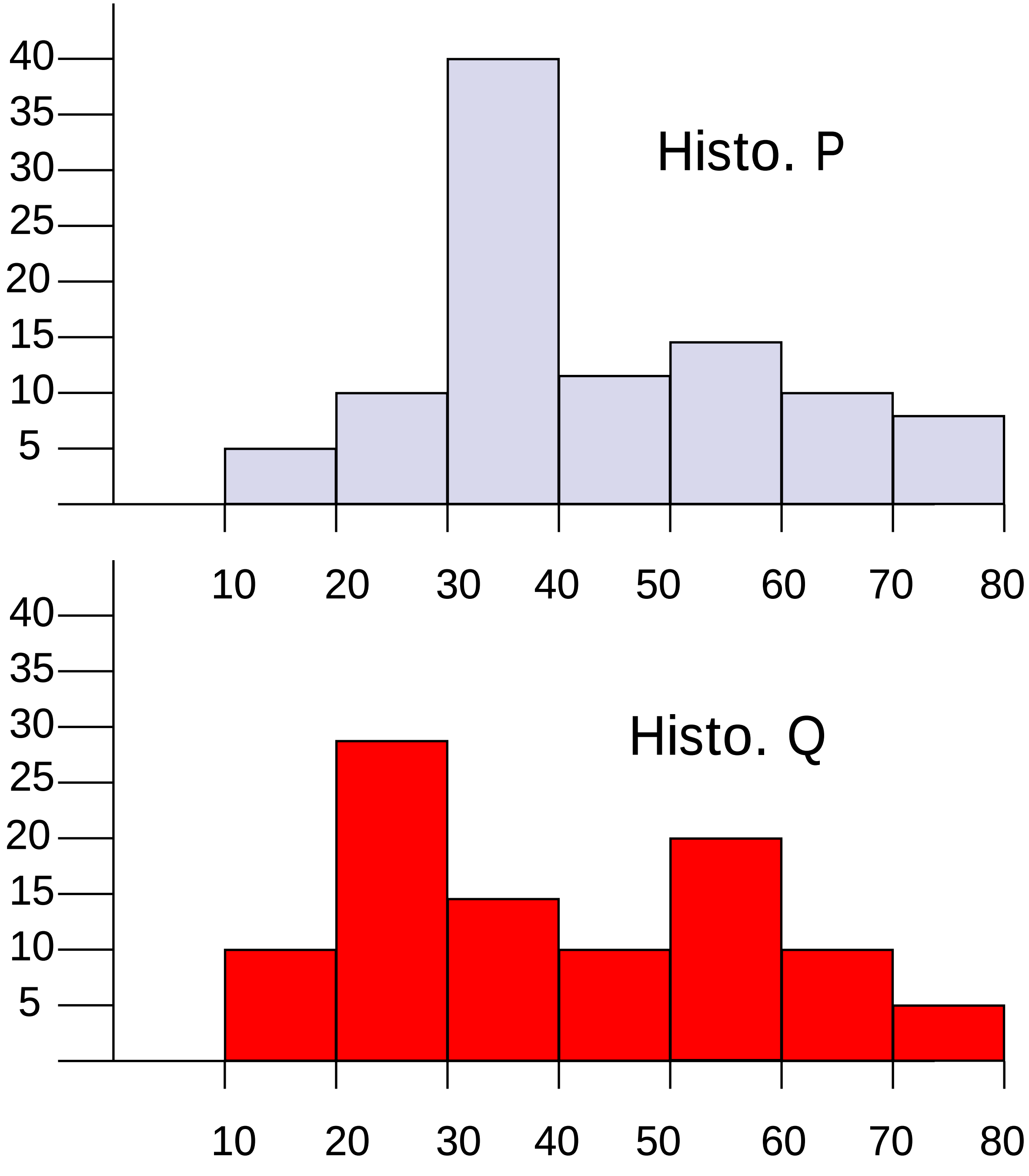
$$aff(d_{ip}, d_{iq}) = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{p_{ij}(y) \cdot q_{ij}(y)}$$

- $0 \leq aff(d_p, d_q) \leq 1$
- $aff(d_p, d_q) = 1$ se $d_p = d_q$
- $aff(d_p, d_q) = 0$ se d_p e d_q são ortogonais

Coeficiente de afinidade ponderado

$$aff(p, q) = \sum_{i=1}^{p} w_i \cdot aff(d_{pi}, d_{qi})$$

se todas variáveis têm o mesmo peso $w_i = 1/p$



aff(P,Q) = 0.93

B – Caso Distribuições paramétricas

$$a(p,q) = \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p_i(y) \cdot q_i(y)}\, dy$$

$$a(p,q) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{O} \sqrt{p_i(y) \cdot q_i(y)}$$