Apostila de Lógica para Computação
Segunda unidade: Lógica de Predicados

Professor: Ruy J. Guerra B. de Queiroz
Transcrito por Ruan Vasconcelos B. Carvalho (rvbc)

SUMÁRIO

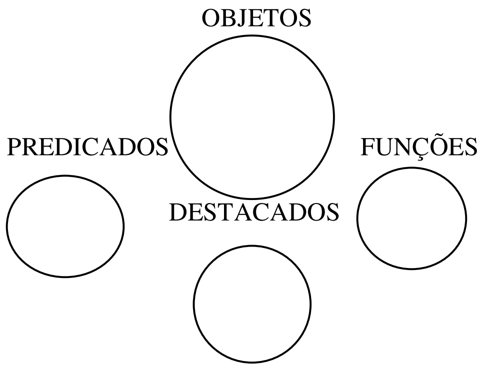
0. INTRODUÇÃO

OBJETIVO

➔ Trazer à tona na representação simbólica os objetos, os predicados e relações em cada sentença.

ESTRUTURA

➢ *Conjunto de objetos, lista de relações, lista de funções, lista de destaques.* As estruturas assumem o papel das valorações verdade da lógica proposicional.

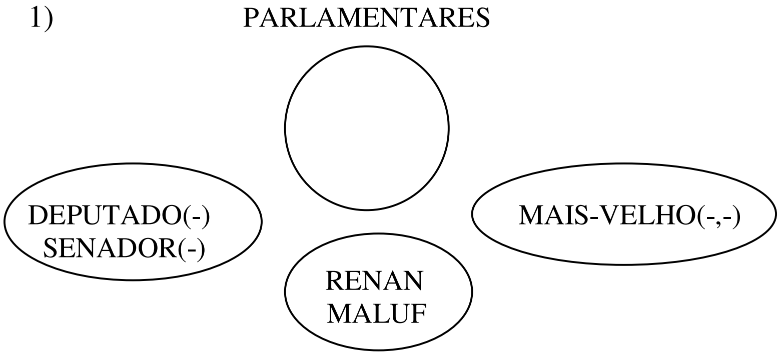


ESTRUTURA ⊃ ASSINATURA

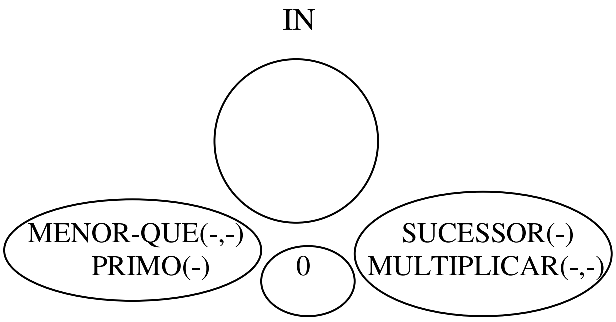
DOMÍNIO
RELAÇÕES → SÍMBOLOS DE RELAÇÃO
DESTAQUES → SÍMBOLOS DE CONSTANTES
FUNÇÕES → SÍMBOLOS DE FUNÇÕES

Exemplos:

1)



2)



1. SUBESTRUTURAS

- ➢ Dadas duas estruturas **A** e **B**, como sabemos se:
- ➲ **A** é subestrutura de **B**?
- ➲ **B** é subestrutura de **A**?

I) Mesma assinatura → Relações binárias, ternárias; funções...

II) Mesma natureza de domínio → $A \subseteq B$

III) "Tudo" é preservado

DEFINIÇÃO

➔ Sejam **A** e **B** duas estruturas de **MESMA ASSINATURA L**. Uma **função** entre os domínios de **A** e **B**, isto é, $h: dom(A) \to dom(B)$, "**preserva os papéis**" se:

1. Para todo símbolo de **constante** c de **L**:
   ➲ $h(c^A) = c^B$

2. Para todo símbolo de **relação n-ária** (n > 0) R de **L:**
   ➲ se $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^A$ então $(h(x_1), h(x_2), ..., h(x_n)) \in R^B$

3. Para todo símbolo de **função n-ária** (n > 0) m de **L:**
   ➲ $h(m^A(x_1, x_2, ..., x_n)) = m^B(h(x_1), h(x_2), ..., h(x_n))$

As definições acima definem um ***HOMOMORFISMO***. Para que haja um ***HOMOMORFISMO IMERSOR***, a função h deve ser ***INJETIVA*** e no lugar de ***SE*** temos ***SSE***. Já para o caso de ***ISOMORFISMO***, além de ser ***IMERSOR***, a função deve ser ***BIJETIVA*** (***IMERSÃO SOBREJETORA***).

Sejam **A** e **B** duas estruturas, dizemos que $A \subseteq B$ sse há um ***HOMOMORFISMO IMERSOR*** de **A** para **B** e $dom(A) \subseteq dom(B)$. Nesse caso dizemos que **A** é **SUBESTRUTURA** de **B** ou que **B** é **EXTENSÃO** de **A**.

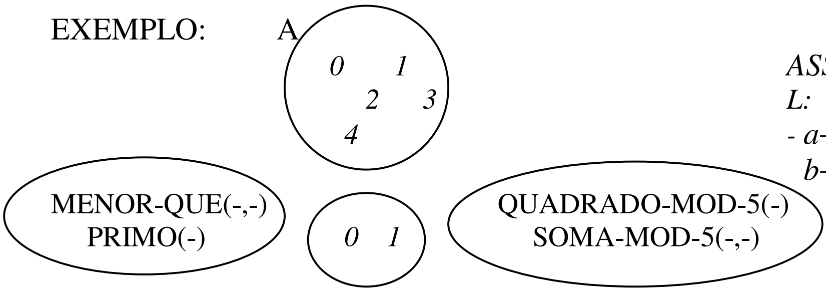
2. SINTAXE DA LÓGICA DE PREDICADOS

Qual é o ***FORMATO*** das fórmulas da lógica de predicados?

➢Como é uma FÓRMULA ATÔMICA?

➢Como se montam FÓRMULAS COMPOSTAS?

EXEMPLO: A



*ASSINATURA DE **A***

L:

- $a \rightarrow 0$ $\quad$ $-M(-,-)$ $\quad$ $-q(-)$

$b \rightarrow 1$ $\quad$ $P(-)$ $\quad$ $s(-,-)$

EXEMPLOS DE SENTENÇAS ATÔMICAS

➲ 3 é primo

$$\rightarrow P(s(s(b,b),b))$$

➲ 2 é menor-que 1

$$\rightarrow M(s(b,b),b)$$

➲ O quadrado mod 5 de 3 é primo

$$\rightarrow P(q(s(s(b,b),b)))$$

➲ A soma mod 5 de 1 e 3 é menor que o quadrado mod 5 de 3

$$\rightarrow M(s(b,s(s(b,b),b)),q(s(s(b,b),b)))$$

TERMOS DE UMA ASSINATURA DE UMA LINGUAGEM

➢A grosso modo, os temos de uma assinatura são expressões ***montadas*** a partir das ***constantes*** e símbolos das ***funções*** de **L** e ***representam elementos do domínio*** de uma estrutura de assinatura **L**.

DEFINIÇÃO FORMAL

➔ Seja **L** uma assinatura. O conjunto dos termos de **L** é definido indutivamente da seguinte forma:

I)BASE

➲ Todo símbolo de **constante** e de **variável** são termos.

II)FUNÇÕES GERADORAS

➲ Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ forem termos de **L** e ***f*** for um símbolo de uma função n-ária de **L**, então a expressão $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo de **L**.

III)NADA MAIS É TERMO

OBSERVAÇÃO ➔ Um termo é dito **fechado** se **nenhuma variável** ocorre nele.

FÓRMULAS ATÔMICAS DE UMA ASSINATURA

➢ Suponha que **L** seja uma assinatura. Uma fórmula atômica de **L** é:

➲ $R(t_1, t_2, ..., t_n)$ onde ***R*** é um símbolo de ***relação*** n-ária de L e $t_1, t_2, ..., t_n$ são ***termos*** de **L**.

➲ $t_1 = t_2$ onde t_1 e t_2 são **termos** de **L**.

SENTENÇA ATÔMICA

➔ Uma sentença atômica de **L** é uma **fórmula atômica** de **L** que **não contém variáveis**.

SUBSTITUIÇÃO

➔ Suponha que φ seja uma fórmula atômica de **L** na qual aparecem as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. (Escrevendo explicitamente: $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$). A substituição dos termos $t_1, t_2, ..., t_n$ pelos respectivos $x_1, x_2, ..., x_n$ em φ resulta na fórmula $\varphi(t_1, t_2, ..., t_n)$.

FÓRMULA BEM-FORMADA

➢ Seja **L** uma assinatura. O conjunto das fórmulas bem-formadas de **L** é definido indutivamente da seguinte forma:

➲ Toda **fórmula atômica** é uma FBF. **(CASO BASE)**

➲ Se φ é uma FBF, então $(\neg\varphi)$ também é FBF.

➲ Se φ e ψ são FBF's, então $(\varphi \wedge \psi)$ é FBF.

➲ Se φ e ψ são FBF's, então $(\varphi \vee \psi)$ é FBF.

➲ Se φ e ψ são FBF's, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é FBF.

➲ Se φ é uma FBF, então $\forall x \varphi(x)$ é uma FBF.

➲ Se φ é uma FBF, então $\exists x \varphi(x)$ é uma FBF.

➲ Nada mais é FBF.

DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS LIVRES

➔ Seja φ uma fórmula da assinatura de **L**. Vamos definir recursivamente o conjunto das variáveis livres (isto é, sem quantificação) que ocorrem em φ.

vl: FBF de L → *P*(variáveis)

➲ $vl(\varphi) = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ se φ for atômica e tem ocorrência de $x_1, x_2, ..., x_n$. **(BASE)**

➲ $vl((\neg\varphi)) = vl(\varphi)$

➲ $vl((\varphi \wedge \psi)) = vl(\varphi) \; U \; vl(\psi)$

➲ $vl((\varphi \vee \psi)) = vl(\varphi) \; U \; vl(\psi)$

➲ $vl((\varphi \rightarrow \psi)) = vl(\varphi) \; U \; vl(\psi)$

➲ $vl(\forall x \varphi) = vl(\varphi) - \{x\}$

➲ $vl(\exists x \varphi) = vl(\varphi) - \{x\}$

SENTENÇA→ Uma **sentença** de uma assinatura **L** é uma FBF de **L** cujo **conjunto de variáveis livres é vazio**.

3. SEMÂNTICA

INTERPRETAÇÃO DE UMA ASSINATURA NUMA ESTRUTURA

➢ Suponha que **L** seja uma assinatura e **A** uma L-estrutura. Uma interpretação de **L** em **A** é uma associação de:

➲ Cada símbolo c de constante de **L** a um elemento c^A destacado do domínio de **A**.

➲ Cada símbolo R de relação n-ária de **L** a uma relação n-ária R^A de **A** (n > 0).

➲ Cada símbolo f de função n-ária de **L** a uma função n-ária f^A de **A** (n > 0).

SEMÂNTICA DE TERMOS

DEFINIÇÃO

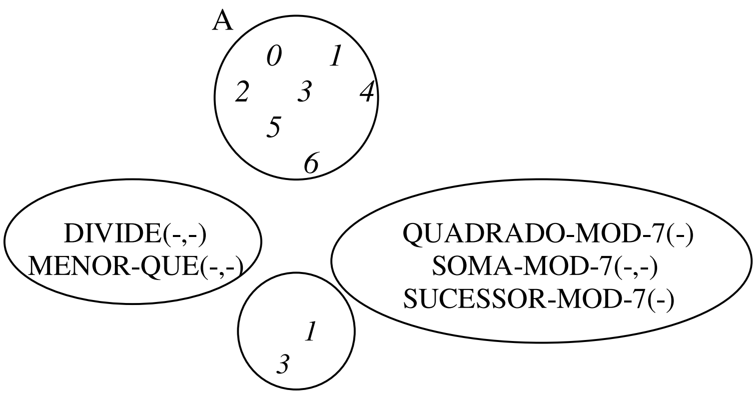
➔ Suponha que **L** seja uma assinatura e t seja um **termo fechado** (ou seja, sem variáveis). O "significado" de t na L-estrutura **A**, denotado por t^A, é o elemento resultante de se calcular a expressão correspondente a t na estrutura A conforme a interpretação dada aos símbolos de constante e de função. Assim:

➲ t^A é o elemento **destacado** c^A se t for um **termo atômico** constituído apenas pelo símbolo de **constante** c.

➲ t^A é o elemento resultante do cálculo de $j^A(t_1^A, t_2^A, ..., t_n^A)$ se t é a expressão $j(t_1, t_2, ..., t_n)$ onde j é o **símbolo de função** n-ária de L e $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos fechados de L.

EXEMPLO: Seja a seguinte interpretação:

- $a^A = 1$
  $b^A = 3$
- $R^A = DIVIDE$
  $S^A = MENOR - QUE$
- $f^A = SUCESSOR - MOD - 7$
  $g^A = SOMA - MOD - 7$
  $h^A = QUADRADO - MOD - 7$



$(f(a))^A \therefore f^A(a^A) \Rightarrow sucessor - \mathrm{mod}-7(1) = 2$
$(g(h(a), f(b)))^A \therefore g^A((h(a))^A, (f(b))^A) \therefore g^A(h^A(a^A), f^A(b^A))$
$\Rightarrow soma - \mathrm{mod}-7(quadrado - \mathrm{mod}-7(1), sucessor - \mathrm{mod}-7(3)) \therefore soma - \mathrm{mod}-7(1,4) = 5$

ATRIBUIÇÃO DE ELEMENTOS A VARIÁVEIS

➔ Suponha que t seja um termo da assinatura **L** no qual ocorrem as **variáveis** $x_1, x_2, ..., x_n$. Uma atribuição de elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ do domínio de uma L-estrutura **A** às variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, respectivamente, deverá permitir a nós calcular t^A.

EXEMPLO: Seja t o termo $g(h(x), f(y))$. Poderíamos escrever t como $t(x, y)$. Agora, teremos a atribuição:

- 3 no lugar de x
- 2 no lugar de y

Em símbolos: $t(x, y)[3/x][2/y]$. Agora vamos calcular $(t(x, y)[3/x][2/y])^A$.

$(g(h(x), f(y))[3/x][2/y])^A \therefore (g(h(3), f(2)))^A \therefore g^A((h(3))^A, (f(2))^A) \therefore g^A(h^A(3), f^A(2))$
$\Rightarrow soma - \mathrm{mod}-7(quadrado - \mathrm{mod}-7(3), sucessor - \mathrm{mod}-7(2)) \therefore soma - \mathrm{mod}-7(2,3) = 5$

SEMÂNTICA DE SENTENÇAS ATÔMICAS

➢ Suponha que φ seja uma **sentença atômica** (ou seja, não contém variáveis) de **L** e **A** seja uma L-estrutura. Dada uma interpretação de **L** em **A**, o significado de φ em **A** conforme tal interpretação é dado por:

➲ **I)** Se φ é da forma $R(t_1, t_2, ..., t_n)$ onde R é um símbolo de relação n-ária de **L** e $t_1, t_2, ..., t_n$ são **termos fechados** de **L**, então φ^A, ou seja, $R^A(t_1^A, t_2^A, ..., t_n^A)$, é verdadeira se e somente se a n-upla $(t_1^A, t_2^A, ..., t_n^A)$ pertence à relação R^A. Exemplo:
$(S(g(h(b), f(a)), g(a,b)))^A \therefore S^A((g(h(b), f(a)))^A, (g(a,b))^A) \therefore S^A(g^A((h(b))^A, (f(a))^A), g^A(a^A, b^A))$
$\Rightarrow menor - que(soma - \mathrm{mod}-7(quadrado - \mathrm{mod}-7(3), sucessor - \mathrm{mod}-7(1)), soma - \mathrm{mod}-7(1,3))$
$\Rightarrow menor - que(soma - \mathrm{mod}-7(2,2),4) \therefore menor - que(4,4) = FALSO$

➲ **II)** Se φ é da forma $t_1 = t_2$ tal que t_1 e t_2 são **termos fechados** de **L**, então φ^A, ou seja $(t_1 = t_2)^A$, isto é $t_1^A = t_2^A$, é verdadeiro se somente se t_1^A é o mesmo elemento que t_2^A.

MODELO E CONTRA-MODELO

➔ Seja **L** uma assinatura, **A** uma L-estrutura, **i** uma interpretação de **L** em **A** e φ uma **sentença atômica** de L.

- **A** é um **modelo** de φ se φ^A, conforme **i**, é **verdadeira**.
- **A** é um **contra-modelo** de φ se φ^A, conforme **i**, é **falsa**.

SEMÂNTICA DE SENTENÇAS

➢ Suponha que φ seja uma **sentença** de **L** e **A** seja uma L-estrutura. Dada uma interpretação de **L** em **A**, dizemos que φ^A é verdadeira em **A** da seguinte forma:

- Se φ for atômica, volte à definição anterior.
- Se φ é da forma $(\neg\psi)$, φ^A é verdadeira sse ψ^A **não** for verdadeira.
- Se φ é da forma $(\psi \wedge \rho)$, φ^A é verdadeira sse ψ^A **E** ρ^A são verdadeiras.
- Se φ é da forma $(\psi \vee \rho)$, φ^A é verdadeira sse ψ^A **OU** ρ^A é verdadeira.
- Se φ é da forma $(\psi \rightarrow \rho)$, φ^A é verdadeira sse $(\neg\psi \vee \rho)$ é verdadeira.
- Se φ é da forma $\forall x\psi(x)$, φ^A é verdadeira sse $(\psi(x)[a/x])^A$ é verdadeira **para todo** elemento **a** do domínio de **A**.
- Se φ é da forma $\exists x\psi(x)$, φ^A é verdadeira sse $(\psi(x)[a/x])^A$ é verdadeira **para algum** elemento **a** do domínio de **A**.

4. SATISFATIBILIDADE I

➢ $\forall y(Q(y) \vee Q(f(y)))$ é uma conseqüência lógica de $\{\forall x(P(x,b) \vee Q(x)),\ \forall y(P(f(y),b) \rightarrow Q(y))\}$? Podemos reformular nossa pergunta: $\{\forall x(P(x,b) \vee Q(x)),\ \forall y(P(f(y),b) \rightarrow Q(y)),\ \neg\forall y(Q(y) \vee Q(f(y)))\}$ é insatisfatível?

DEFINIÇÃO

➔ Seja $\varphi(\overline{x})$ uma **FÓRMULA** da lógica de predicados numa assinatura L.

➲ **I)** Dizemos que $\varphi(\overline{x})$ é **satisfatível** se **existe uma** L-estrutura **A**, uma interpretação de **L** em **A**, uma n-upla $a_1, a_2, ..., a_n$ de elementos do domínio de **A** tal que $\varphi^A(\overline{a})$ é **verdadeira**.

➲ **II)** Dizemos que $\varphi(\overline{x})$ é **refutável** se **existe uma** L-estrutura **A**, uma interpretação de **L** em **A**, uma n-upla $a_1, a_2, ..., a_n$ de elementos do domínio de **A** tal que $\varphi^A(\overline{a})$ é **falsa**.

➲ **III)** Dizemos que $\varphi(\overline{x})$ é **válida** se **para toda** L-estrutura **A**, toda interpretação de **L** em **A**, toda n-upla $a_1, a_2, ..., a_n$ de elementos do domínio de **A** tem-se que $\varphi^A(\overline{a})$ é **verdadeira**.

➲ **IV)** Dizemos que $\varphi(\overline{x})$ é **insatisfatível** se **para toda** L-estrutura **A**, toda interpretação de **L** em **A**, toda n-upla $a_1, a_2, ..., a_n$ de elementos do domínio de **A** tem-se que $\varphi^A(\overline{a})$ é **falsa**.

Seja φ uma **SENTENÇA** da lógica de predicados numa assinatura **L**.

➲ **I)** Dizemos que φ é **satisfatível** se existe uma L-estrutura **A**, uma interpretação de **L** em **A** tal que φ^A é verdadeira (ou seja, φ **tem modelo**).

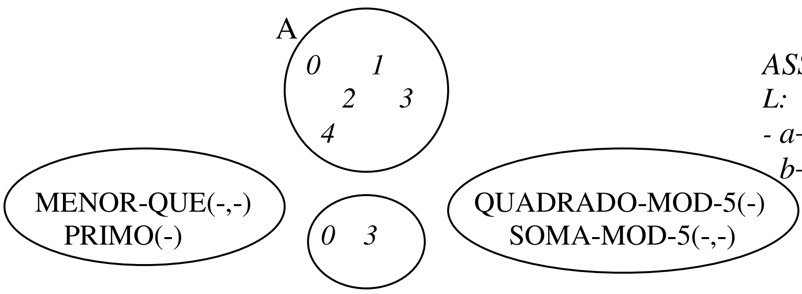
➲ **II)** Dizemos que φ é **refutável** se φ **tem contra-modelo**.

➲ **III)** Dizemos que φ é **válida** se φ **não tem contra-modelo**.

➲ **II)** Dizemos que φ é **insatisfatível** se φ **não tem modelo**.

DE ESTRUTURAS PARA SENTENÇAS (ATÔMICAS)

➢ Seja **L** uma assinatura e **A** uma L-estrutura. Devemos **listar todas as sentenças atômicas de L que sejam verdadeiras em A.**



ASSINATURA DE A
L:

- $a \rightarrow 0$	-M(-,-)	-q(-)
$b \rightarrow 3$	P(-)	s(-,-)

RELAÇÕES

➔ Para toda relação ***R*** n-ária de L listar $R(t_1,t_2,...,t_n)$ onde $t_1,t_2,...,t_n$ são termos fechados de L e $R(t_1,t_2,...,t_n)$ é verdadeira em **A**.

PRIMO

→ Listar todos os números que são primos.

- ➲ 2 é primo: $P(s(s(b,b), s(b,b)))$.
- ➲ 3 é primo: $P(b)$.

MENOR-QUE

→ Listar todos os pares (x,y) tal que $x<y$.

- ➲ 0 é menor-que 1: $M(a,s(b,b))$.
- ➲ 0 é menor-que 2: $M(a,s(s(b,b),s(b,b)))$.
- ➲ 0 é menor-que 3: $M(a,b)$.
- ➲ 0 é menor-que 4: $M(a,q(b))$.
- ➲ 1 é menor-que 2: $M(s(b,b),s(s(b,b),s(b,b))$.

  . . .
- ➲ 3 é menor-que 4: $M(b,q(b))$.

FUNÇÕES

➔ Para toda função **f** n-ária de **L** calcular $f(t_1,t_2,...,t_n)$ onde $t_1,t_2,...,t_n$ são termos fechados de L e expressar o resultado com a relação **igual (=)**.

QUADRADO-MOD-5

→ Para cada elemento x do domínio de **A**, calcular $q(x)$.

- ➲ O quadrado mod 5 de 0 é 0: $q(a)=a$.
- ➲ O quadrado mod 5 de 1 é 1: $q(s(b,b))=s(b,b)$.
- ➲ O quadrado mod 5 de 2 é 4: $q(s(s(b,b),s(b,b)))=s(b,s(b,b))$.
- ➲ O quadrado mod 5 de 3 é 4: $q(b)=s(b,s(b,b))$.
- ➲ O quadrado mod 5 de 4 é 1: $q(s(b,s(b,b)))=s(b,b)$.

SOMA-MOD-5

→ Para cada par (x,y) onde x e y são elementos do domínio de **A**, calcular $s(x,y)$.

- ➲ A soma mod 5 de 0 com 0 é 0: $s(a,a)=a$.
- ➲ A soma mod 5 de 0 com 1 é 1: $s(a,s(b,b))=s(b,b)$.

  . . .
- ➲ A soma mod 5 de 0 com 4 é 4: $s(a,q(b))=q(b)$.
- ➲ A soma mod 5 de 1 com 0 é 1: $s(s(b,b),a)=s(b,b)$.
- ➲ A soma mod 5 de 1 com 1 é 2: $s(s(b,b),s(b,b))=s(q(q(b)),q(q(b)))$.

  . . .
- ➲ A soma mod 5 de 4 com 4 é 3: $s(q(b),q(b))=b$.

DE SENTENÇAS (ATÔMICAS) PARA ESTRUTURAS

DEFINIÇÃO DE DIAGRAMA POSITIVO

➔ Suponha que **L** seja uma assinatura e que **A** seja uma L-estrutura. O diagrama positivo de **A** é o **conjunto de todas as sentenças atômicas de L que são verdadeiras em A**. Ou seja, na página anterior nós geramos o diagrama positivo de **A**.

DO DIAGRAMA POSITIVO PARA UMA ESTRUTURA

➔ Vamos definir uma estrutura B tal que o seu diagrama positivo seja:

$S(a,b)$	$f(a)=b$
$S(f(b),a)$	$f(f(b))=b$
$S(g(a,b),a)$	$g(a,a)=b$
$S(b,f(b))$	$g(b,a)=a$
$R(f(a))$	$g(b,b)=b$
$R(g(f(a),b))$	$g(f(b),f(a))=a$
$R(g(b,a))$	$g(f(b),a)=a$
	$g(a,b)=a$

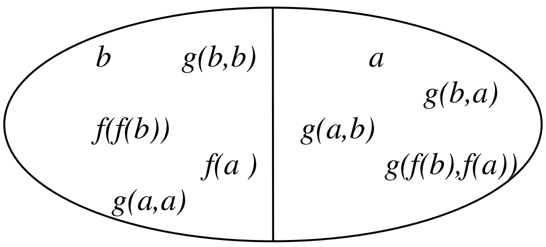
1. ASSINATURA L

→ - *S(-,-)*	- *a*	- *f(-)*
R(-)	*b*	*g(-,-)*

2. DOMÍNIO

→ Queremos definir uma estrutura **B** a **mais genérica possível (REFERENCIAL)** tal que qualquer que tenha sido a estrutura **C** que tenha gerado o **DIAGRAMA POSITIVO** dado, seja possível definir um **HOMOMORFIMO de B para C**. Chamaremos **B** de **MODELO CANÔNICO**.

→ DOMÍNIO DE B → **Termos fechados** de L: $a, b, f(a), f(b), g(a,a), g(a,b), g(b,a), g(b,b)$... Daí surge o problema: se o domínio da estrutura original fosse menor do que o definido acima? Para resolver isso nós **agrupamos os termos semelhantes usando classes de equivalência**.



Logo: **DOMÍNIO: [t] para t ∊ termos fechados de L**.

3. DESTAQUES

→ Basta listar: - $a^B = a$

$b^B = b$

4. RELAÇÕES E PREDICADOS

→ **I)** $S(a,b) \therefore S^B([a],[b])$ $S(f(b),a) \therefore S^B([f(b)],[a])$

$S(g(a,b),a) \therefore S^B([g(a,b)],[a])$ $S(b,f(b)) \therefore S^B([b],[f(b)])$

Logo, temos os pares: $S^B = \{([a],[b]),([f(b),[a]),([g(a,b)],[a]),([b],[f(b)])\}$.

II) Procedendo de forma análoga com R obtemos $R^B = \{[f(a)],[g(f(a),b)],[g(b,a)]\}$.

5. FUNÇÕES

→ **I)** $f^B([t]) = [f(t)]$.

II) $g^B([t_1],[t_2]) = [g(t_1,t_2)]$

Agora é possível definir um homomorfismo de **B** para **C**, mas não demonstraremos isso aqui.

5. SATISFATIBILIDADE II

PROBLEMA

- Dado um **CONJUNTO** Γ **DE SENTENÇAS**, pergunta-se: "Γ é **satisfatível**?"
  - Se Γ fosse um conjunto de **sentenças atômicas**, então a resposta é **SIM**, pois podemos montar o "**MODELO CANÔNICO**".
  - Senão, vamos tentar decompor sentenças de Γ em sentenças "pequenas", preferivelmente atômicas.

EXEMPLO: $\Delta = \{\forall x(P(x,b) v Q(x)), \forall y(P(f(y),b) \rightarrow Q(y)), \neg\forall y(Q(y) v Q(f(y)))\}$ é insatisfatível? Seria fácil responder se $\boldsymbol{\Delta}$ fosse composto apenas por sentenças atômicas. Logo, o nosso problema se resume no seguinte: **é possível criar um conjunto de sentenças atômicas que representa Δ?**

O primeiro passo para isso é eliminar os quantificadores.

ELIMINAÇÃO DE QUANTIFICADORES

- Dada uma sentença φ, queremos encontrar φ' tal que:
  - φ' seja logicamente equivalente a φ.
  - φ' não contenha quantificadores.

FÓRMULA PRENEX

➔ Uma fórmula da lógica de predicados está na fórmula **PRENEX** (*Prefixed Normal Expression*) se ela tem o seguinte formato:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Onde $Q_i (1 \leq i \leq n)$ é $\forall$ ou $\exists$ e ψ **não tem quantificadores.**

TEOREMA

→ Para toda fórmula φ da lógica de predicados numa dada assinatura **L**, existe φ' de **L** tal que:

- φ' é **logicamente equivalente** a φ;
- φ' está na forma **PRENEX**.

EQUIVALÊNCIAS

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ e $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x(P(x) \vee Q(x))$

Prova: $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ ^ $Q(a_1) \wedge Q(a_2) \wedge ... \wedge Q(a_n)$

$(P(a_1) \wedge Q(a_1))$ ^ $(P(a_2) \wedge Q(a_2))$ ^ ... ^ $(P(a_n) \wedge Q(a_n))$ $= \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

➲ $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \equiv \forall x\forall z(P(x) \vee Q(z))$ e $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \equiv \exists x\exists z(P(x) \wedge Q(z))$

Prova: $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \therefore \underline{\underline{\forall xP(x)}} \vee \underline{\forall zQ(z)}$ (mudança de variável)

$\underline{\underline{(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n))}} \vee \underline{\psi}$ (fazendo $\psi = \forall zQ(z)$)

$\underline{\forall x(P(x)} \vee \psi)$ (ψ não depende de x)

$\underline{\theta} \vee \forall zQ(z)$ (fazendo $\theta = \forall xP(x)$)

$\forall z(\theta \vee Q(z))$ (aplicando o mesmo raciocínio)

$\forall x\forall z(P(x) \vee Q(z))$

➲ $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x) \equiv \exists x\forall z(\neg P(x) \vee Q(z))$ e $\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) \equiv \forall x\exists z(\neg P(x) \wedge Q(z))$

Prova: $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ (mudança de variável e implicação)

$\neg\forall xP(x) \vee \forall zQ(z)$ (negação)

$\exists x\neg P(x) \vee \forall zQ(z)$

$\exists x(\neg P(x) \vee \forall zQ(z))$

$\exists x\forall z(\neg P(x) \vee Q(z))$

Agora que sabemos como transformar uma fórmula φ na sua forma PRENEX, vamos começar a eliminar os quantificadores.

ELIMINAR OS QUANTIFICADORES EXISTENCIAIS

➔ Técnica: *Skolemização* por Thoralf Skolem (1915-1920).
Início: artigo de 1915 com Lowenheim.

EXEMPLO: $\forall x\exists y(R(x,y))$

→ Considere uma estrutura **A** tal que $dom(A) = IN$ e que $R^A = MENOR-QUE$. Para eliminarmos o '$\exists$' nós temos que substituir o valor de y. Para isso criamos uma estrutura **B** que difere de **A** por ter uma **função** $f(-)$.

➲ 1. $\forall x\exists y(R(x,y)) \Rightarrow \forall xR(x, f(x))$

$f^B(-)$ pode ser *"soma 5"*, *"soma 1"*, *"multiplica por 2"*... Enfim, qualquer função que se adapte à relação R^A.

OUTROS EXEMPLOS:

➲ 2. $\forall x\forall y\exists zP(x,y,z) \Rightarrow \forall x\forall yP(x,y,f(x,y))$

➲ 3. $\exists x\forall yQ(x,y) \Rightarrow \forall yQ(b,y)$

No terceiro exemplo, não há '$\forall$' antes do '$\exists$'. Em casos desse tipo substitui-se a variável do '$\exists$' por uma **constante**.

FORMA NORMAL DE SKOLEM

→ Suponha que φ seja uma fórmula da lógica de predicados na assinatura **L**. Assuma que φ está na forma **PRENEX**.

A fórmula φ', que é a **FORMA NORMAL DE SKOLEM** de φ, é obtida a partir de φ **ELIMINANDO-SE CADA QUANTIFICADOR EXISTENCIAL** do tipo $\exists x_i$ e substituindo-se todas as ocorrências de x_i por uma expressão da forma $f(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk})$ onde:

- f é um **símbolo novo de função**;
- $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk}$ são **variáveis quantificadas universalmente na frente do** $\exists x_i$**,** isto é, $j_1 < i, j_2 < i, ..., j_k < i$.

TEOREMA DE SKOLEM

→ Seja φ e φ' como na definição anterior. Nessas circunstâncias, se **A** é um modelo de φ, então existe uma estrutura **A'** de assinatura **L** U {TODOS OS SÍMBOLOS DE CONSTANTE E DE FUNÇÃO QUE FORAM ACRESCENTADOS A φ }.

TERCEIRO PASSO

→ Agora que temos uma fórmula na FORMA NORMAL DE SKOLEM, basta simplesmente **apagar os quantificadores universais**.

QUARTO PASSO

→ Converta todas as fórmulas para a **FORMA NORMAL CONJUNTIVA** e aplique o **MÉTODO DA RESOLUÇÃO**.

PROBLEMA DA UNIFICAÇÃO DE TERMOS

➢ Dados dois termos t_1 e t_2 numa assinatura L, obtenha (se possível) uma **lista de termos** $s_1, s_2, ..., s_n$ que **quando entrarem no lugar das variáveis** $x_1, x_2, ..., x_n$ que ocorrem em t_1 e t_2 **tornem ambos os termos idênticos**.

EXEMPLOS:

➲ 1. $S = \{\underline{f}(\underline{\underline{x}}, g(a, y)) \stackrel{?}{=} \underline{f}(\underline{\underline{x}}, g(y, x))\}$

$S_1 = \{\underline{\underline{x \stackrel{?}{=} x}}, g(a, y) \stackrel{?}{=} g(y, x)\}$ (eliminar trivial)

$S_2 = \{\underline{g}(a, y) \stackrel{?}{=} \underline{g}(y, x)\}$ (decomposição)

$S_3 = \{\underline{a \stackrel{?}{=} y}, y \stackrel{?}{=} x\}$ (atribuição $[a / y]$)

$S_4 = \{[a / y], y \stackrel{?}{=} x\}$

$S_5 = \{[a / y], a \stackrel{?}{=} x\}$ (atribuição $[a / x]$)

$S_6 = \{[a / y], [a / x]\}$

➲ 2. $S = \{\underline{f}(g(z), x) \stackrel{?}{=} \underline{f}(y, x), f(y, x) \stackrel{?}{=} f(y, h(a))\}$

$S_1 = \{g(z) \stackrel{?}{=} y, \underline{\underline{x \stackrel{?}{=} x}}, f(y, x) \stackrel{?}{=} f(y, h(a))\}$ (eliminar trivial)

$S_2 = \{g(z) \stackrel{?}{=} y, \underline{f}(y, x) \stackrel{?}{=} \underline{f}(y, h(a))\}$ (decomposição)

$S_3 = \{g(z) \stackrel{?}{=} y, \underline{y \stackrel{?}{=} y}, x \stackrel{?}{=} h(a)\}$ (eliminar trivial)

$S_4 = \{g(z) \stackrel{?}{=} y, x \stackrel{?}{=} h(a)\}$ (atribuir)

$S_5 = \{[h(a) / x], [g(z) / y], [z / z]\}$

Dizemos que S_5 é a **SUBSTITUIÇÃO UNIFICADORA MAIS GERAL**. Poderíamos ter $S_6 = \{[h(a) / x], [g(f(a, h(a))) / y], [f(a, h(a)) / z]\}$, mas S_6 não seria mais geral que S_5. Essa é uma característica do método: **quando há uma solução, o método nos dá a mais geral**.

➲ 3. $S = \{\underline{g}(f(x, x)) \stackrel{?}{=} \underline{g}(f(h(a), g(b)))\}$ (decomposição)

$S_1 = \{\underline{f}(x,x) \stackrel{?}{=} \underline{f}(h(a), g(b))\}$ (decomposição)

$S_2 = \{x \stackrel{?}{=} h(a), x \stackrel{?}{=} g(b)\}$

$\xcancel{S_3 = \{x \stackrel{?}{=} h(a), \underline{h(a) \stackrel{?}{=} g(b)}\}}$

Como queremos **ser o mais genérico possível**, não podemos garantir que $h(a) = g(b)$. Pode até existir uma estrutura onde isso seja verdade, mas não podemos garantir para todas.

➲ 4. $S = \{\underline{f}(x, g(x)) \stackrel{?}{=} \underline{f}(g(x), g(g(x)))\}$ (decomposição)

$S_1 = \{x \stackrel{?}{=} g(x), \underline{g}(x) \stackrel{?}{=} \underline{g}(g(x))\}$ (decomposição)

$S_2 = \{x \stackrel{?}{=} g(x), x \stackrel{?}{=} g(x)\}$

$\xcancel{S_3 = \{x \stackrel{?}{=} g(x)\}}$

Nesse caso o programa entraria num LOOP INFINITO.

➲ 5. $S = \{\underline{g}(f(x,y)) \stackrel{?}{=} \underline{g}(f(h(y), g(z)))\}$ (decomposição)

$S_1 = \{\underline{f}(x,y) \stackrel{?}{=} \underline{f}(h(y), g(z))\}$ (decomposição)

$S_2 = \{x \stackrel{?}{=} h(y), y \stackrel{?}{=} g(z)\}$

Perceba que devemos substituir primeiramente y. Nesse caso dizemos que x é uma **VARIÁVEL RESOLVIDA** pois y aparece em outra equação. Logo, temos:

$S_3 = \{[h(g(z))/x], [g(z)/y], [z/z]\}$

EQUAÇÃO NA FORMA RESOLVIDA

➔ Suponha que **S** um conjunto de equações. Uma equação se S da forma $x \stackrel{?}{=} t$ está na **FORMA RESOLVIDA** (e nesse caso, x seria uma **VARIÁVEL RESOLVIDA**) se x **NÃO OCORRE MAIS EM QUALQUER OUTRO LUGAR DE S, NEM MESMO EM** t**.**

O **sistema** S está na forma resolvida se TODAS AS SUAS EQUAÇÕES ESTIVEREM NA FORMA RESOLVIDA.

MÉTODO DA UNIFICAÇÃO DE TERMOS POR TRANSFORMAÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

➔ JACQUES HERBRAND, 1930.

Seja **S** um sistema de equações. Para encontrar a **SUBSTITUIÇÃO UNIFICADORA MAIS GERAL** para **S**, caso exista, aplique as seguintes regras de transformação sobre **S** até obter, se possível, um sistema **S'** na forma resolvida.

→ 1. ELIMINAÇÃO DE EQUAÇÕES TRIVIAIS

➲ $\{x \overset{?}{=} x\} \; U \; S \Rightarrow \; S$

→ 2. DECOMPOSIÇÃO DE TERMOS→ Para qualquer símbolo de função f de aridade $n \geq 0$:

➲ $\{f(t_1, t_2, ..., t_n) \overset{?}{=} f(s_1, s_2, ..., s_n)\} \; U \; S \Rightarrow \; S \; U \; \{t_1 \overset{?}{=} s_1, t_2 \overset{?}{=} s_2, ..., t_n \overset{?}{=} s_n\}$

→ 3. ELIMINAÇÃO DE VARIÁVEIS

➲ $\{x \overset{?}{=} t\} \; U \; S \Rightarrow \; \{x \overset{?}{=} t\} \; U \; S\{[t/x]\}$

TEOREMA DE HERBRAND

➢ Seja **S** um conjunto de cláusulas. **S** é **INSATISFATÍVEL** se e somente se **EXISTE UM CONJUNTO FINITO DE INSTÂCIAS BÁSICAS** das cláusulas de **S** que é **INSATISFATÍVEL**.

TEOREMA DA COMPACCIDADE

➔ Seja Γ um conjunto de fórmulas da lógica proposicional. Γ é **SATISFATÍVEL** se e somente se **TODO SUBCONJUNTO FINITO DE Γ É SATISFATÍVEL**. O teorema é válido mesmo que Γ seja infinito. Prova:

1. IDA

→ Assuma que Γ seja satisfatível. Então existe uma valoração v que satisfaz Γ. Tome **S** como sendo um subconjunto qualquer de Γ. Tome v como valoração. Como v satisfaz ao conjunto todo (ou seja, satisfaz a Γ), v satisfaz cada uma das partes. Logo v satisfaz **S**. Portanto, **S** é satisfatível.

2. VOLTA

→ Assuma que todo subconjunto finito de Γ é satisfatível (nesse caso dizemos que Γ é **FINITAMENTE SATISFATÍVEL**). Temos que provar que Γ é satisfatível, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz Γ.

Vamos aumentar Γ de forma consistente até quando esse processo chegue em um **CONJUNTO MAXIMALMENTE CONSISTENTE**, isto é, um conjunto Δ tal que:

➲ 1. Para toda fórmula θ, $\theta \in \Delta$ ou $\neg\theta \in \Delta$.

➲ 2. Para nenhuma fórmula δ, $\delta \in \Delta$ e $\neg\delta \in \Delta$.

Seja $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$ uma *enumeração do conjunto de fórmulas PROP*. Agora tome:

➲ $\Delta_0 = \Gamma$.

$$\text{➲ } \Delta_{n+1} \begin{cases} \{\alpha_n\} \ U \ \ \Delta_n \text{ se } \{\alpha_n\} \text{ é consistente com } \Delta_n \\ \\ \Gamma \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Faça $\Delta = \bigcup_{i=0} \Delta_i$.

Podemos afirmar que Δ é FINITAMENTE SATISFATÍVEL. A prova é por indução sobre *n*, mostrando que para todo *n* o Δ_n é finitamente satisfatível.

Seja a seguinte valoração: $v(x) = 1$ sse $x \in \Delta$. Claramente v satisfaz a todas as fórmulas atômicas em Δ. Ou seja, precisamos provar que PARA TODA $\alpha \in PROP$ $\hat{}v(\alpha) = 1$ SSE $\alpha \in \Delta$.

Prova: por indução sobre a complexidade de α.

1. *CASO BASE:* α *é atômica.*

➲ Trivial, pois a própria definição de *v* atesta que *v* satisfaz α quando α é atômica e pertence a Δ.

2. *CASOS INDUTIVOS:*

I) α é da forma $\neg\beta$.
II) α é da forma $(\rho \wedge \theta)$.
III) α é da forma $(\rho \vee \theta)$.
IV) α é da forma $(\rho \rightarrow \theta)$.

Demonstraremos apenas o caso da negação:

➲ **I)** HI: $\hat{}v(\beta) = 1 \; sse \; \beta \in \Delta$
TESE: $\hat{}v(\neg\beta) = 1 \; sse \; \neg\beta \in \Delta$

IDA: *Se* $\hat{}v(\neg\beta) = 1$ *então* $\neg\beta \in \Delta$. Suponha que $\neg\beta \notin \Delta$. Como Δ é maximalmente consistente então $\beta \in \Delta$. Logo, pela HI, $\hat{}v(\beta) = 1$. Daí, $\hat{}v(\neg\beta) = 0$. Portanto, $\hat{}v(\neg\beta) \neq 0$.

VOLTA: *Se* $\neg\beta \in \Delta$, *então* $\hat{}v(\neg\beta) = 1$. Assuma que $\neg\beta \in \Delta$. Como Δ é maximalmente consistente, $\beta \notin \Delta$. Da HI, $\hat{}v(\beta) = 0$. Daí, $\hat{}v(\neg\beta) = 1$.

INSTÂNCIA BÁSICA

→ Seja **C** uma cláusula numa assinatura **L** tal que contém a ocorrências das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Uma **INSTÂNCIA BÁSICA** de **C** é uma **cláusula resultante da substituição** $[t_1 / x_1], [t_2 / x_2], ..., [t_n / x_n]$ em C, tal que $t_1, t_2, ..., t_n$ são **termos fechados** de **L**.