TEORIA DA COMPUTAÇÃO

UNIDADE 2: AUTÔMATOS E LINGUAGENS

AULA 5: EQUIVALÊNCIA ENTRE **AP** E **GLC**

PROFESSOR: LUCAS CAMBUIM

Equivalência entre APs e GLCs

- **Teorema:** Uma linguagem é livre de contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

- **Lema 2.21**: Se uma linguagem é livre de contexto então algum autômato com pilha a reconhece.

Equivalência entre APs e GLCs

- **Ideia de prova do Lema:** Seja A uma LLC, por definição sabemos que A tem uma GLC G que a gera.

Equivalência entre APs e GLCs

- Vamos converter G em um AP, que chamaremos de P.

Equivalência entre APs e GLCs

- Vamos converter G em um AP, que chamaremos de P.
- Relembrando que uma derivação é uma sequência de substituições em que uma gramática gera uma palavra.

Equivalência entre APs e GLCs

- Vamos converter G em um AP, que chamaremos de P.
- Relembrando que uma derivação é uma sequência de substituições em que uma gramática gera uma palavra.
- Cada passo da derivação produz uma cadeia intermediária, formada por variáveis e terminais.

Equivalência entre APs e GLCs

- Quais **substituições** tem que ser feitas?
- O não determinismo de um AP vai nos ajudar a obter uma sequência correta de substituições;
- Insira o símbolo $ e a variável inicial na pilha;

Equivalência entre APs e GLCs

Repita isso infinitamente:

- Se o topo da pilha é um símbolo que representa a variável A: substitua de forma não-determinística pela palavra do lado direito da regra;

Equivalência entre APs e GLCs

Repita isso infinitamente:

- Se o topo da pilha é um símbolo que representa a variável A: substitua de forma não-determinística pela palavra do lado direito da regra;
- Se o topo da pilha é um símbolo que representa o terminal a: leia o próximo símbolo de entrada e compare-o com a; Se forem iguais, volte para o loop. Se não, rejeite este ramo;

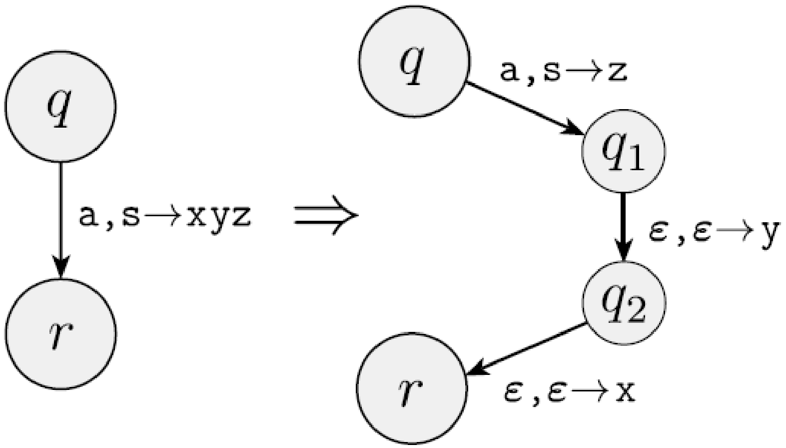
Equivalência entre APs e GLCs

Repita isso infinitamente:

- Se o topo da pilha é um símbolo que representa a variável A: substitua de forma não-determinística pela palavra do lado direito da regra;
- Se o topo da pilha é um símbolo que representa o terminal a: leia o próximo símbolo de entrada e compare-o com a; Se forem iguais, volte para o loop. Se não, rejeite este ramo;
- Se o topo da pilha é o símbolo $, então entre em um estado de aceitação;

Equivalência entre APs e GLCs

- **Prova:** Vamos utilizar uma notação reduzida para a função de transição;
  - $\delta(q, a, s) \longrightarrow \delta(q_1, z)$
  - $\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \delta(q_2, y)$
  - $\delta(q_2, \varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \delta(r, x)$
- Escrevemos como:
  - $\delta(q, a, s) \longrightarrow \delta(r, xyz)$

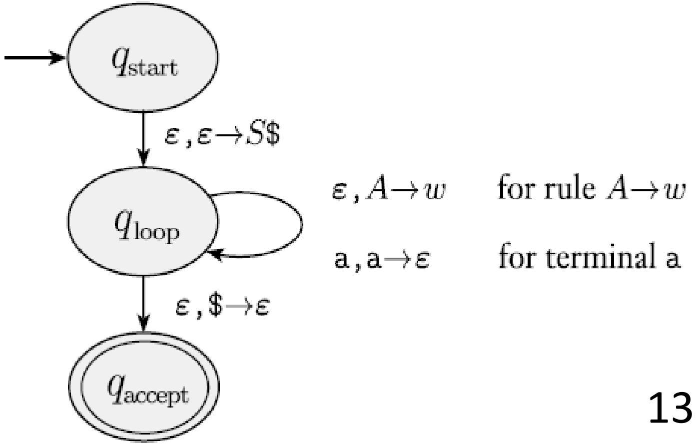


Equivalência entre APs e GLCs

- **Prova:** Os estados de P são:
- $Q = \{q_{inicio}, q_{loop}, q_{aceitação}\} \cup E$, onde E é o conjunto de estados omitidos na notação reduzida;

Equivalência entre APs e GLCs

- **Prova:** Os estados de P são:
- $Q = \{q_{inicio}, q_{loop}, q_{aceitação}\} \cup E$, onde E é o conjunto de estados omitidos na notação reduzida;
- A função de transição:
  - $\delta(q_{inicio}, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \{\delta(q_{loop}, S\$)\}$, S é a variável inicial da gramática G;
  - $\delta(q_{loop}, \varepsilon, A) \rightarrow \{\delta(q_{loop}, w)\}$ quando $A \rightarrow w$;
  - $\delta(q_{loop}, a, a) \rightarrow \{\delta(q_{loop}, \varepsilon)\}$;
  - $\delta(q_{loop}, \varepsilon, \$) \rightarrow \{\delta(q_{aceitação}, \varepsilon)\}$;

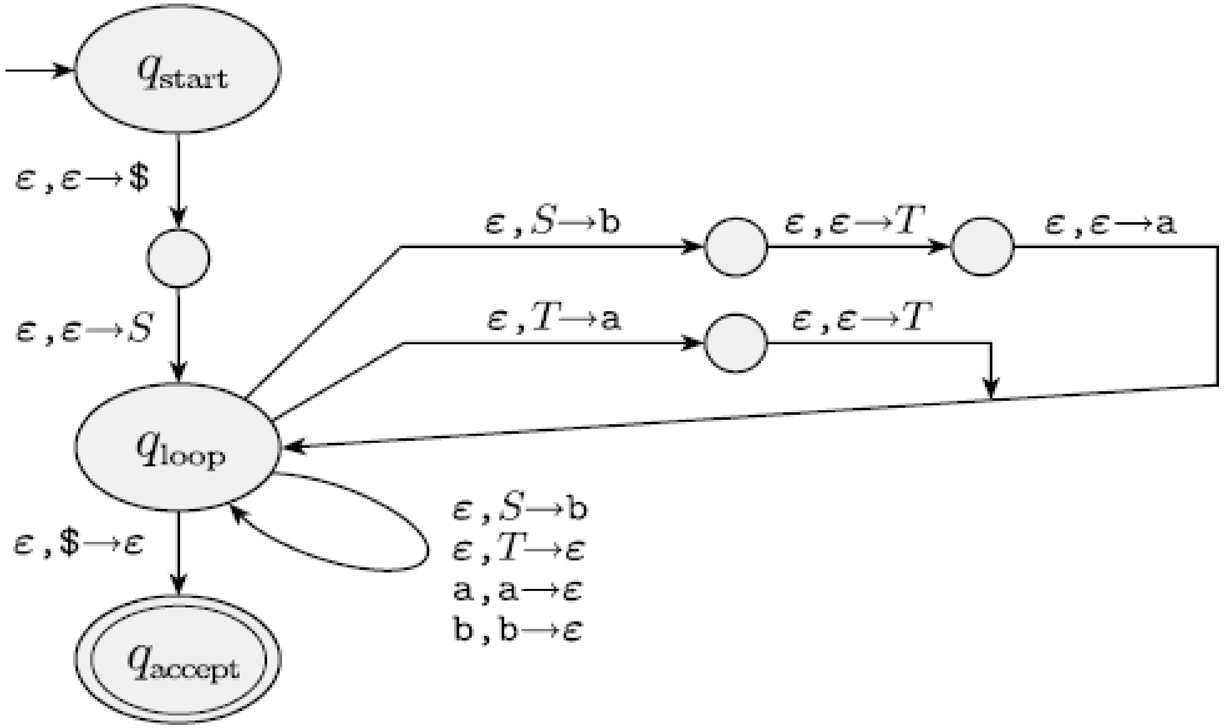


Equivalência entre APs e GLCs

- **Exemplo:** Vamos construir um AP P_1 a partir da GLC G_1;
  - $S \rightarrow aTb \mid b$
  - $T \rightarrow Ta \mid \varepsilon$

Equivalência entre APs e GLCs

- **Exemplo:** Vamos construir um AP P_1 a partir da GLC G_1;
  - $S \rightarrow aTb \mid b$
  - $T \rightarrow Ta \mid \varepsilon$



Equivalência entre APs e GLCs

- E assim provamos um lado do teorema;

- Vamos provar a segunda parte do teorema;

- **Lema 2.27:** Se um autômato com pilha reconhece uma linguagem, então ela é livre de contexto;

Equivalência entre APs e GLCs

- **Ideia de Prova:** Nós temos um AP P, e queremos desenvolver a GLC G, que gera todas as palavras em que P aceita;
- Primeiro, vamos simplificar modificando P, para que este possua algumas características:
  - Tenha um único estado de aceitação;
  - Esvazia a pilha antes de aceitar a palavra;
  - Uma transição deve apenas remover um símbolo ou adicionar um símbolo na pilha. Nunca as duas operações ao mesmo tempo;

Equivalência entre APs e GLCs

- **Prova:** Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_{aceita}\})$ e a GLC que queremos construir G;
- As variáveis de G são $\{A_{pq} \mid p,q \in Q\}$;
- $A_{q0,qaceita}$ é a variável inicial de G;
- Vamos para as regras de G;
  - Para todo $p, q, r, s \in Q$, $t \in \Gamma$ e $a, b \in \Sigma_\varepsilon$.
  - Se $\delta(p, a, \varepsilon) \rightarrow \delta(r, t)$ e $\delta(s, b, t) \rightarrow \delta(q, \varepsilon)$ então coloque a regra $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$ em G;
  - Para todo $p, q, r, s \in Q$ coloque a regra $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$ em G;
  - Para cada $p \in Q$ coloque a regra $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$ em G;

Equivalência entre APs e GLCs

- Agora temos que provar que A_{pq} gera x se e somente se x pode levar P do estado p com a pilha vazia para o estado q com a pilha vazia;
- Vamos considerar cada direção do se e somente se em separado;
- Se A_{pq} gera x, então x pode levar P do estado p com a pilha vazia para o estado q com a pilha vazia;
- Se x pode levar P do estado p com a pilha vazia para o estado q com a pilha vazia, então A_{pq} gera x;

Equivalência entre APs e GLCs

- As provas são feitas por indução e estão presentes no livro;
- Com isso é finalizada a prova do teorema, visto que foram provados os dois lemas;

Equivalência entre APs e GLCs

- Esta prova também permite fazermos uma relação entre as linguagens regulares e as linguagens livres de contexto;
- Toda linguagem regular é reconhecida por um AF e todo AF é um AP em que a pilha não é utilizada, então agora sabemos também que **toda linguagem regular é uma linguagem livre de contexto**;

Equivalência entre APs e GLCs

Relacionamento entre as linguagens regulares e livres-do-contexto