# TEORIA DA COMPUTAÇÃO

## UNIDADE 2: AUTÔMATOS E LINGUAGENS

## AULA 4: AUTÔMATOS COM PILHA

PROFESSOR: LUCAS CAMBUIM

# Autômatos Com Pilha

- São como autômatos finitos não-determinísticos mas com uma ***pilha***.

# Autômatos Com Pilha

- São como autômatos finitos não-determinísticos mas com uma ***pilha***.
- A pilha provê memória adicional.

# Autômatos Com Pilha

- São como autômatos finitos não-determinísticos mas com uma ***pilha***.
- A pilha provê memória adicional.
- A ***pilha*** permite que o autômato com pilha reconheça algumas linguagens **não-regulares.**

# Autômatos Com Pilha

- Autômatos com pilha são equivalentes em poder a gramáticas livres-do-contexto.

# Autômatos Com Pilha

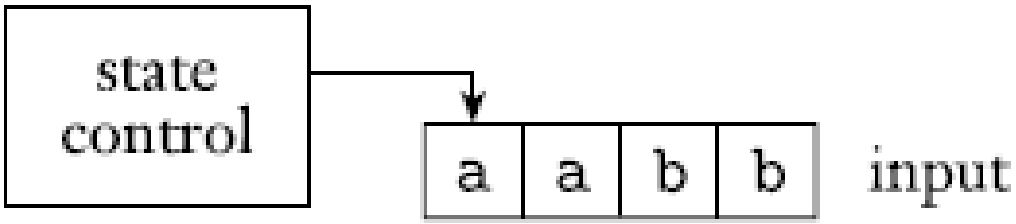
- Autômatos com pilha são equivalentes em poder a gramáticas livres-do-contexto.
  - Nos dá duas opções para provar que uma linguagem é livre-do-contexto

# Autômatos Com Pilha

- Autômatos com pilha são equivalentes em poder a gramáticas livres-do-contexto.
  - Nos dá duas opções para provar que uma linguagem é livre-do-contexto
  - Podemos dar ou uma gramática que a gera ou um autômato com pilha que a reconhece.

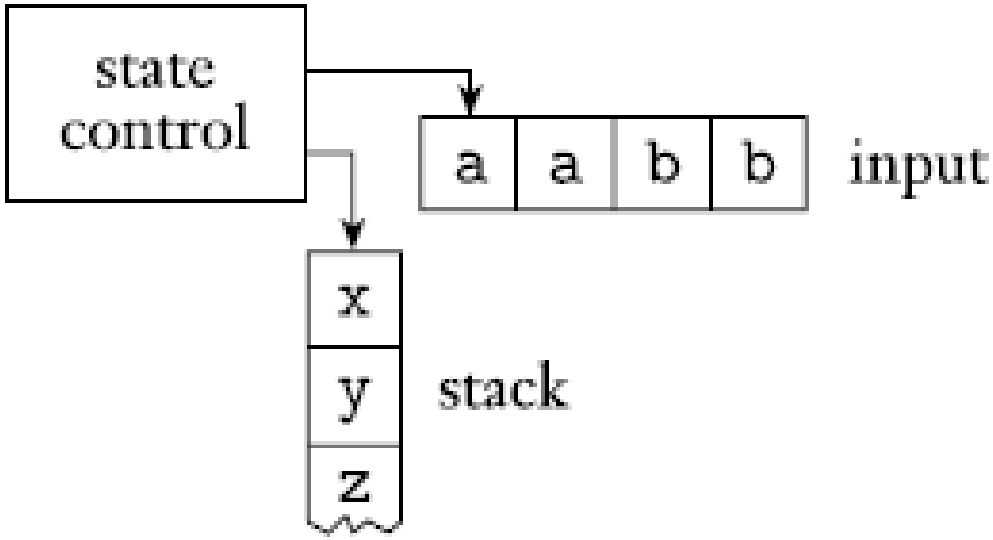
# Autômatos Finitos

- O controle representa os estados e a função de transição
- A fita contém a cadeia de entrada
- A seta representa a cabeça de entrada, apontando para o próximo símbolo de entrada a ser lido




Esquema de um autômato finito

# Autômatos com Pilha



# Definição Formal

Um autômato com pilha é uma 6-upla (Q, $\Sigma$, $\Gamma$, $\delta$, $q_0$, F), onde:

1. Q é um conjunto finito denominado ***estados***
2. $\Sigma$ é um conjunto finito, o ***alfabeto de entrada***
3. $\Gamma$ é um conjunto finito, o ***alfabeto da pilha***
4. $\delta$: Q x $\Sigma_\epsilon$ x $\Gamma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}$(Q x $\Gamma_\epsilon$) é a ***função de transição***
5. $q_0 \in$ Q é o ***estado inicial,*** e
6. F $\subseteq$ Q é o ***conjunto de estados de aceitação***.

# AP Definição Formal de computação

Seja N=(Q, Σ, Γ, $\delta$, $q_0$, F), um AFN e w uma cadeia de Σ.

Dada uma cadeia w que pode ser reescrita como
w = $y_1 y_2 \ldots y_n$ onde:

- cada $y_i \in \Sigma_\epsilon$
- a sequência de conteúdo de conteúdo na pilha $s_0$, $s_1$, … ∈ $\Gamma^*$ existe,
- a sequência de estados $r_0, r_1, \ldots r_n$ ∈ Q existe

**N aceita w se:**

1. $r_0 = q_0$, $s_0 = \epsilon$ (pilha vazia, inicialmente)
2. ($r_{i+1}$,b) ∈ $\delta(r_i, y_{i+1}$,a), para i = 0,…,m-1, onde $s_i$=at e $s_{i+1}$=bt, para algum a,b ∈ $\Gamma_\epsilon$ e t ∈ $\Gamma^*$
3. $r_m$ ∈ F

# AP Definição Formal de computação

Seja N=(Q, Σ, Γ, $\delta$, $q_0$, F), um AFN e w uma cadeia de Σ.

Dada uma cadeia w que pode ser reescrita como
w = $y_1 y_2 \ldots y_n$ onde:

- cada $y_i \in \Sigma_\epsilon$
- a sequência de conteúdo de conteúdo na pilha $s_0$, $s_1$, … ∈ $\Gamma^*$ existe,
- a sequência de estados $r_0, r_1, \ldots r_n$ ∈ Q existe

**N aceita w se:**

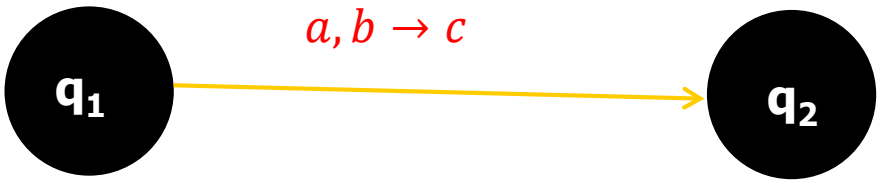
1. $r_0 = q_0$, $s_0 = \epsilon$ (pilha vazia, inicialmente)
2. ($r_{i+1}$,b) ∈ $\delta(r_i, y_{i+1}$,a), para i = 0,…,m-1, onde $s_i$=at e $s_{i+1}$=bt, para algum a,b ∈ $\Gamma_\epsilon$ e t ∈ $\Gamma^*$
3. $r_m$ ∈ F

Observe que $\delta(r_i, y_{i+1}, a)$ ***é o conjunto de próximos estados possíveis*** **de acordo com o conteúdo da pilha**.

# Autômatos com pilha

## Sobre a função de transição:

Entrada do autômato: a

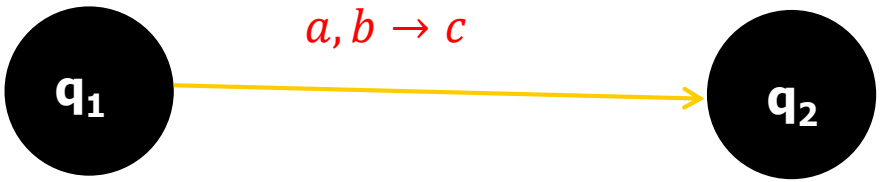


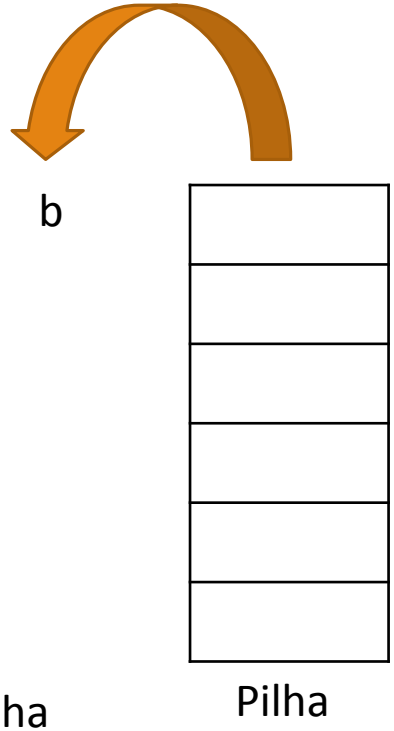
significa que quando a máquina está lendo um **a** da entrada ela pode substituir o símbolo **b** no topo da pilha por um **c**.

# Autômatos com pilha

## Sobre a função de transição:

Entrada do autômato: a



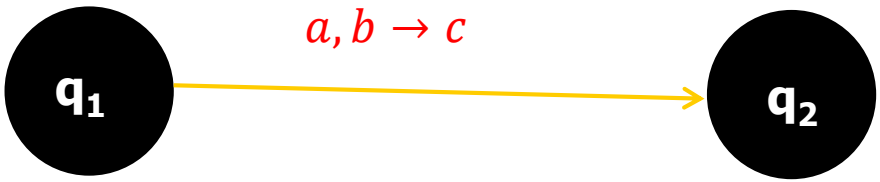



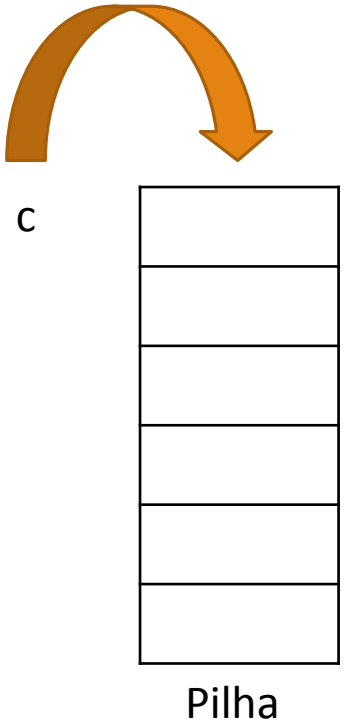

significa que quando a máquina está lendo um **a** da entrada ela pode substituir o símbolo **b** no topo da pilha por um **c**.

# Autômatos com pilha

## Sobre a função de transição:

Entrada do autômato: a



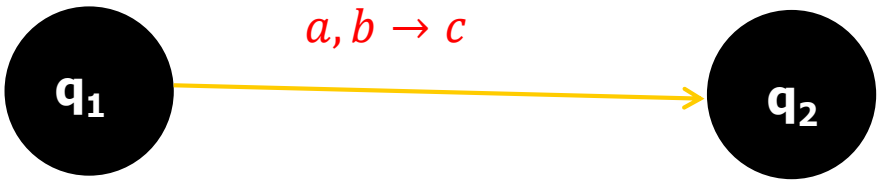



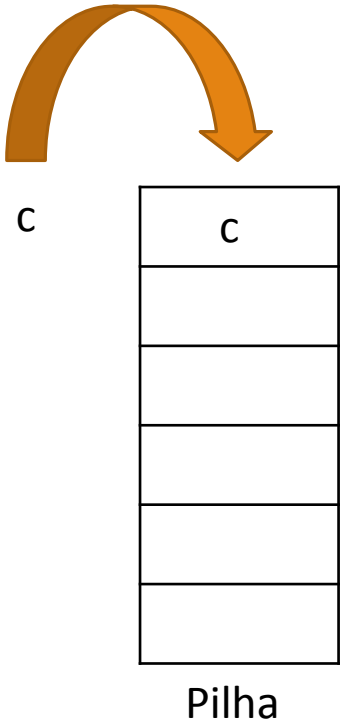

significa que quando a máquina está lendo um **a** da entrada ela pode substituir o símbolo **b** no topo da pilha por um **c**.

# Autômatos com pilha

## Sobre a função de transição:

Entrada do autômato: a

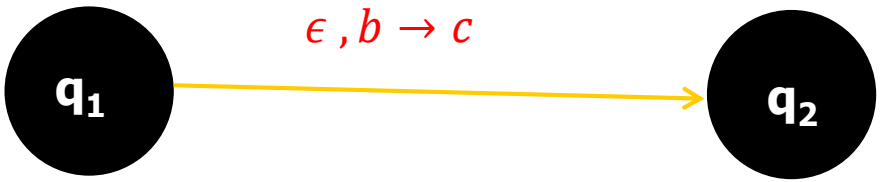



significa que quando a máquina está lendo um **a** da entrada ela pode substituir o símbolo **b** no topo da pilha por um **c**.

# Autômatos com pilha

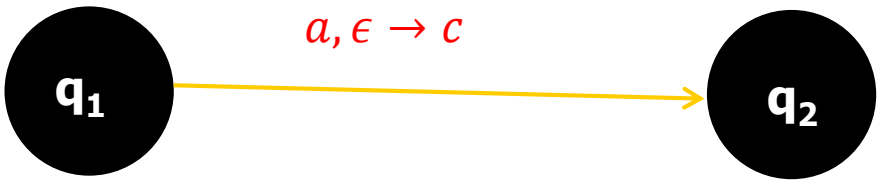
Sobre a função de transição:

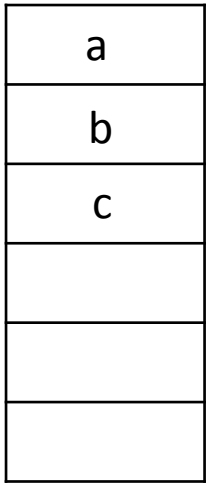



a máquina pode fazer essa transição sem ler qualquer símbolo da entrada. Desempilha o **b** no topo da pilha e inseri o elemento **c**.

# Autômatos com pilha

Sobre a função de transição:

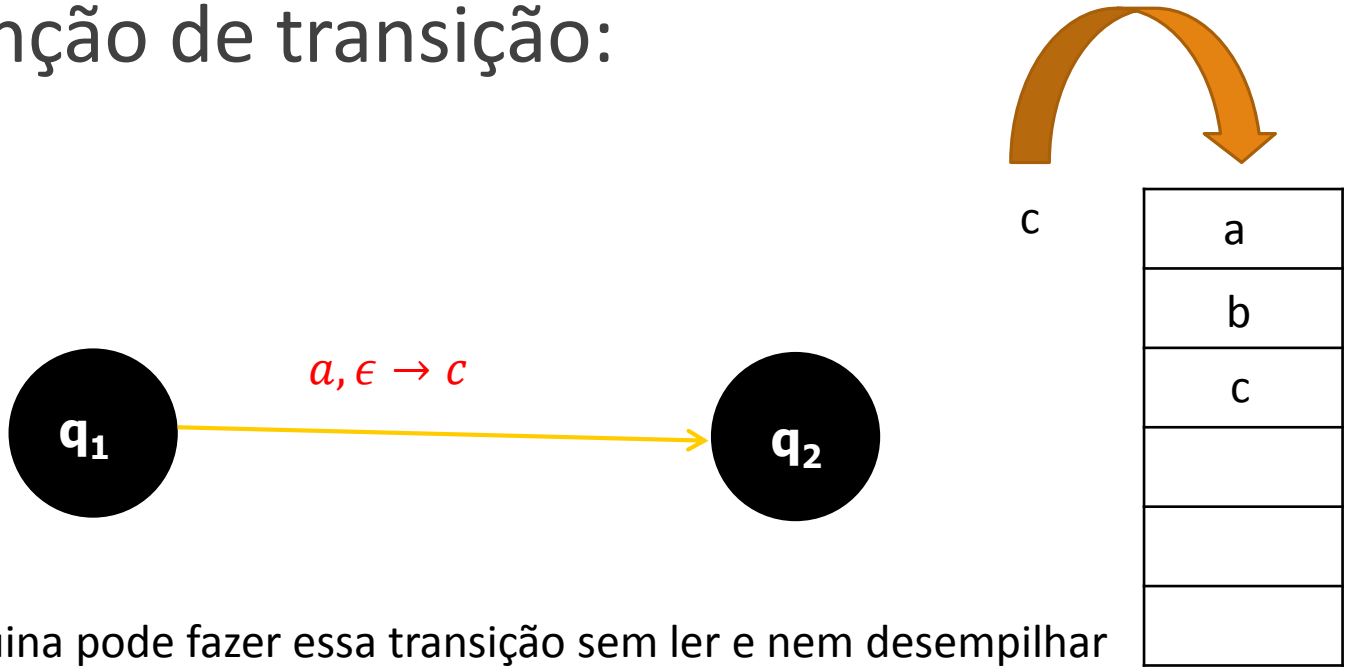



a máquina pode fazer essa transição sem ler e nem desempilhar qualquer símbolo da pilha, mas irá empilhar o elemento **c**

# Autômatos com pilha

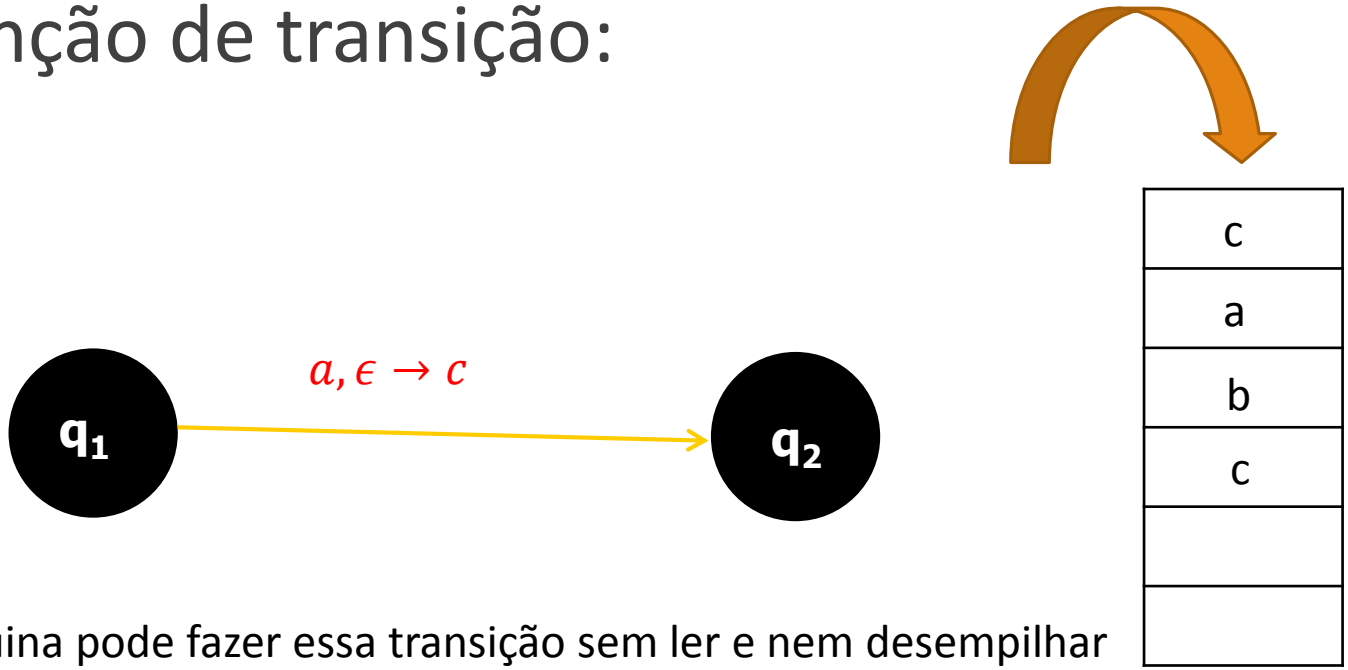
Sobre a função de transição:




a máquina pode fazer essa transição sem ler e nem desempilhar qualquer símbolo da pilha, mas irá empilhar o elemento **c**

# Autômatos com pilha

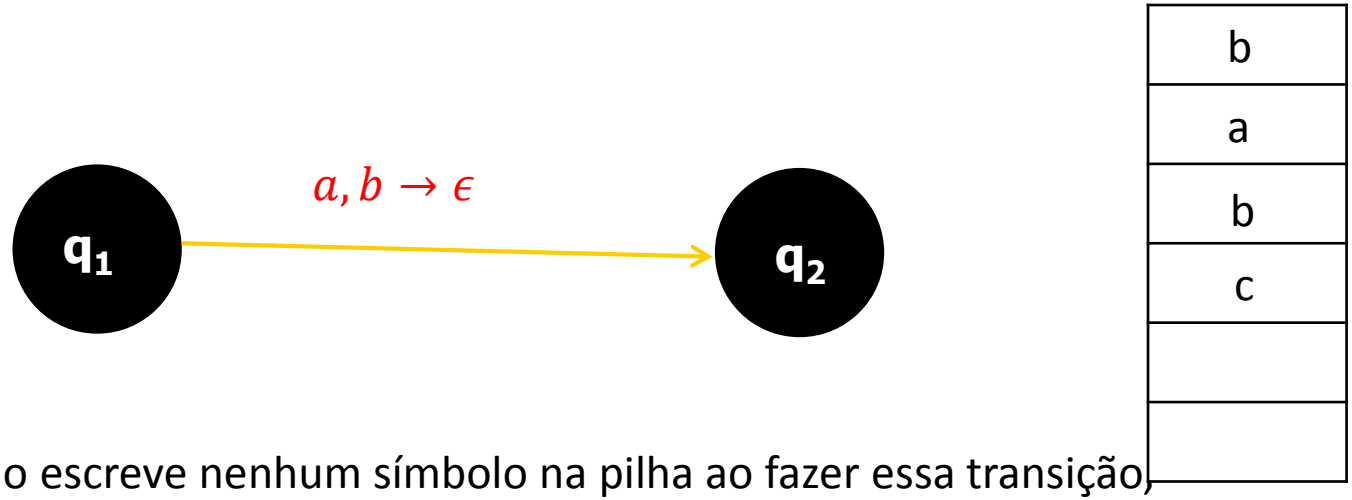
Sobre a função de transição:




a máquina pode fazer essa transição sem ler e nem desempilhar qualquer símbolo da pilha, mas irá empilhar o elemento **c**

# Autômatos com pilha

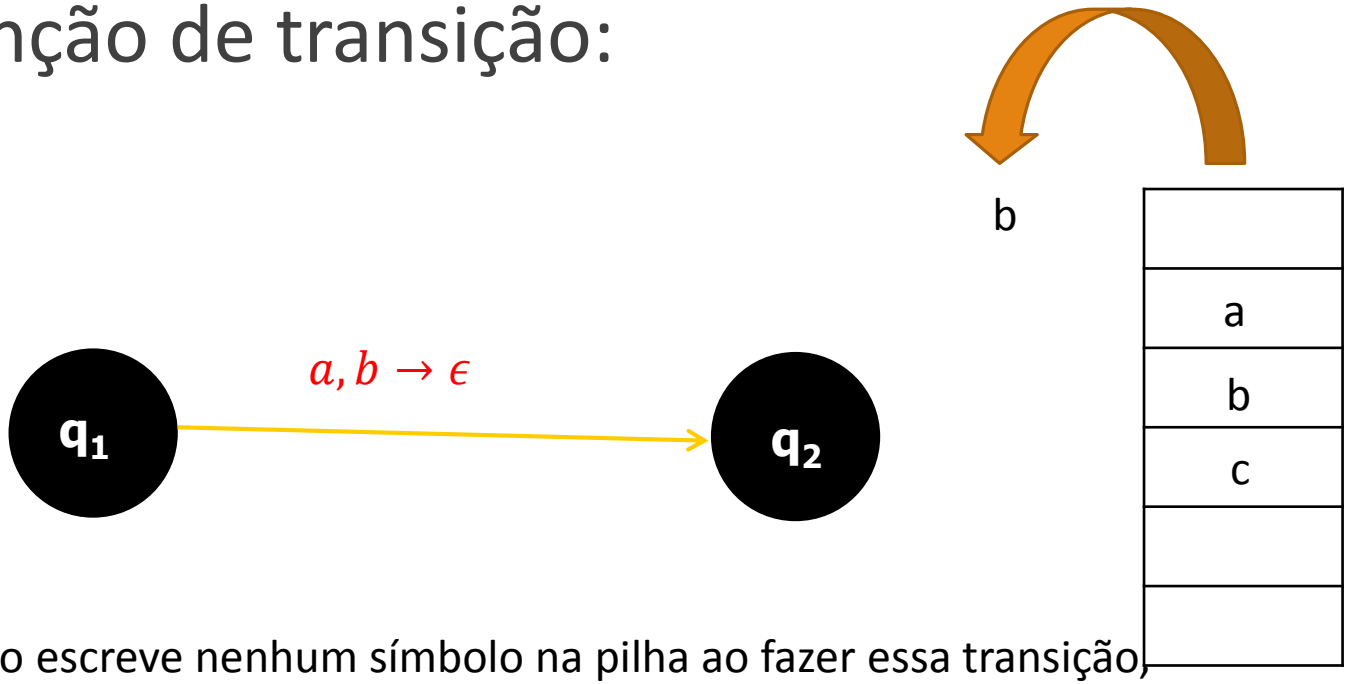
Sobre a função de transição:




a máquina não escreve nenhum símbolo na pilha ao fazer essa transição, mas remove o elemento **b** do topo da pilha

# Autômatos com pilha

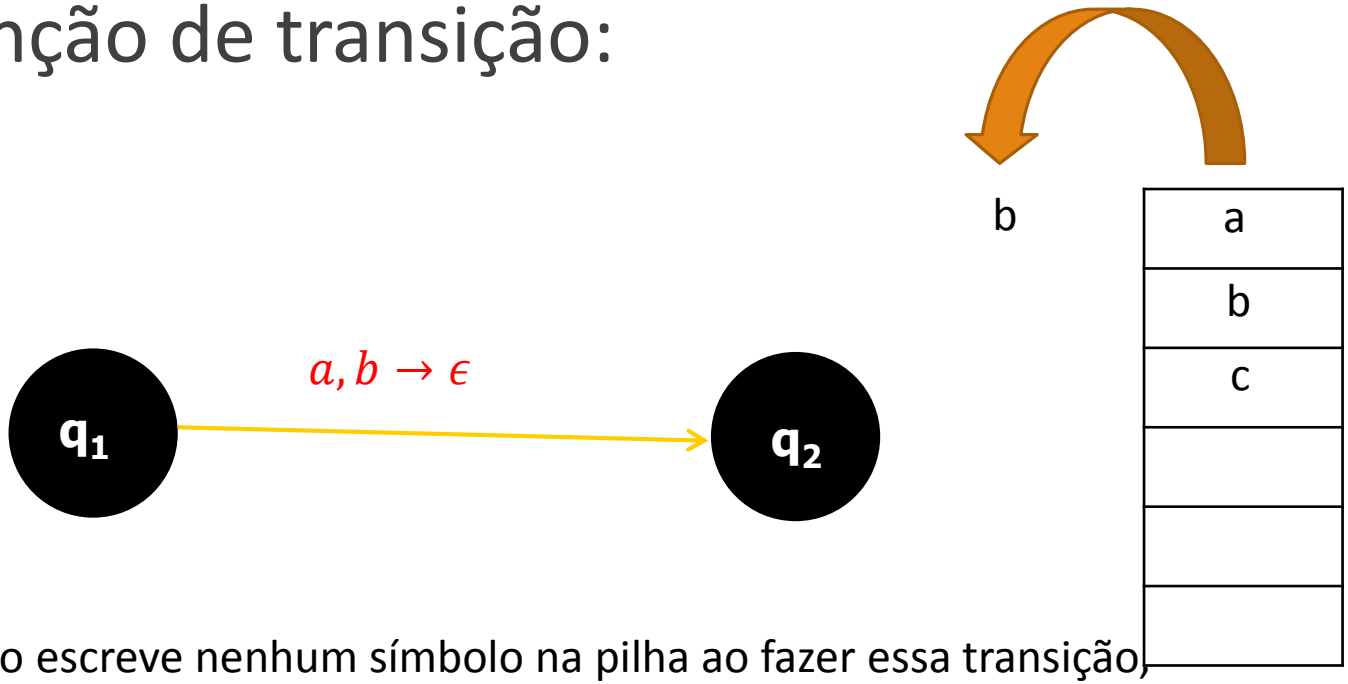
Sobre a função de transição:




a máquina não escreve nenhum símbolo na pilha ao fazer essa transição, mas remove o elemento **b** do topo da pilha

# Autômatos com pilha

Sobre a função de transição:




a máquina não escreve nenhum símbolo na pilha ao fazer essa transição, mas remove o elemento **b** do topo da pilha

# Autômatos com pilha

- A descrição formal não contém nenhum mecanismo explícito para permitir ao AP testar por pilha vazia.

# Autômatos com pilha

- A descrição formal não contém nenhum mecanismo explícito para permitir ao AP testar por pilha vazia.
- Esse AP é capaz de obter o mesmo efeito inicialmente colocando o símbolo especial **$** na pilha.

# Autômatos com pilha

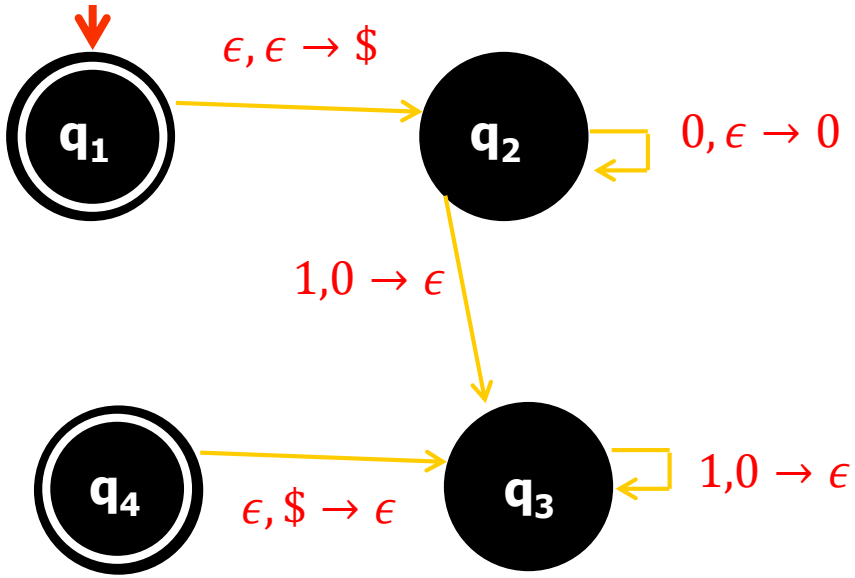
- A descrição formal não contém nenhum mecanismo explícito para permitir ao AP testar por pilha vazia.
- Esse AP é capaz de obter o mesmo efeito inicialmente colocando o símbolo especial **$** na pilha.
- Então, se ele em algum momento futuro vê o **$** novamente, ele sabe que a pilha efetivamente está vazia.

# Autômatos com pilha

Considere um AP, $M_1$ que aceita as cadeias da linguagem $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ .

# Autômatos com pilha

Considere um AP, $M_1$ que aceita as cadeias da linguagem $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ .




$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$

$\Sigma=\{0,1\}$

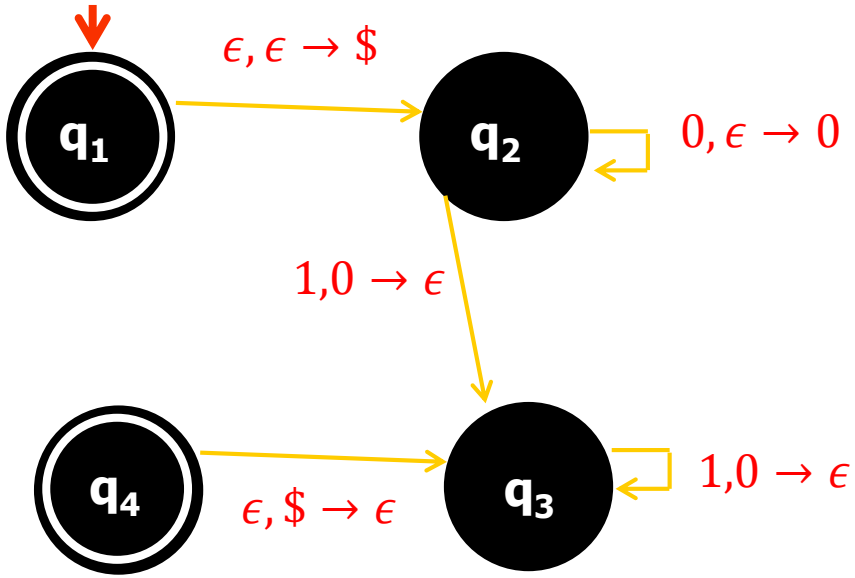
$\Gamma=\{0,\$\}$

$q_1$ é o estado inicial

$F=\{q_1,q_4\}$

# Autômatos com pilha

Considere um AP, $M_1$ que aceita as cadeias da linguagem $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ .




$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$

$\Sigma=\{0,1\}$

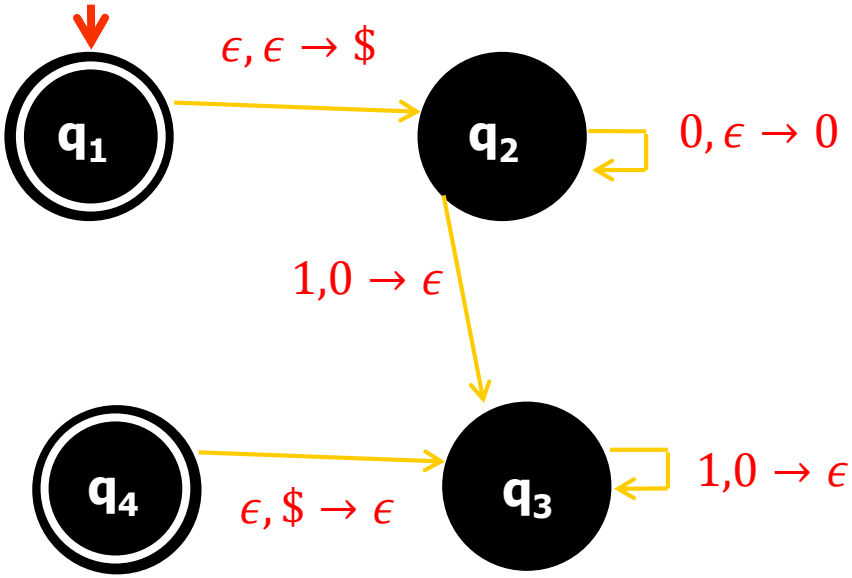
$\Gamma=\{0, \$\}$

$q_1$ é o estado inicial

$F=\{q_1, q_4\}$

# Autômatos com pilha

Considere um AP, $M_1$ que aceita as cadeias da linguagem $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$.



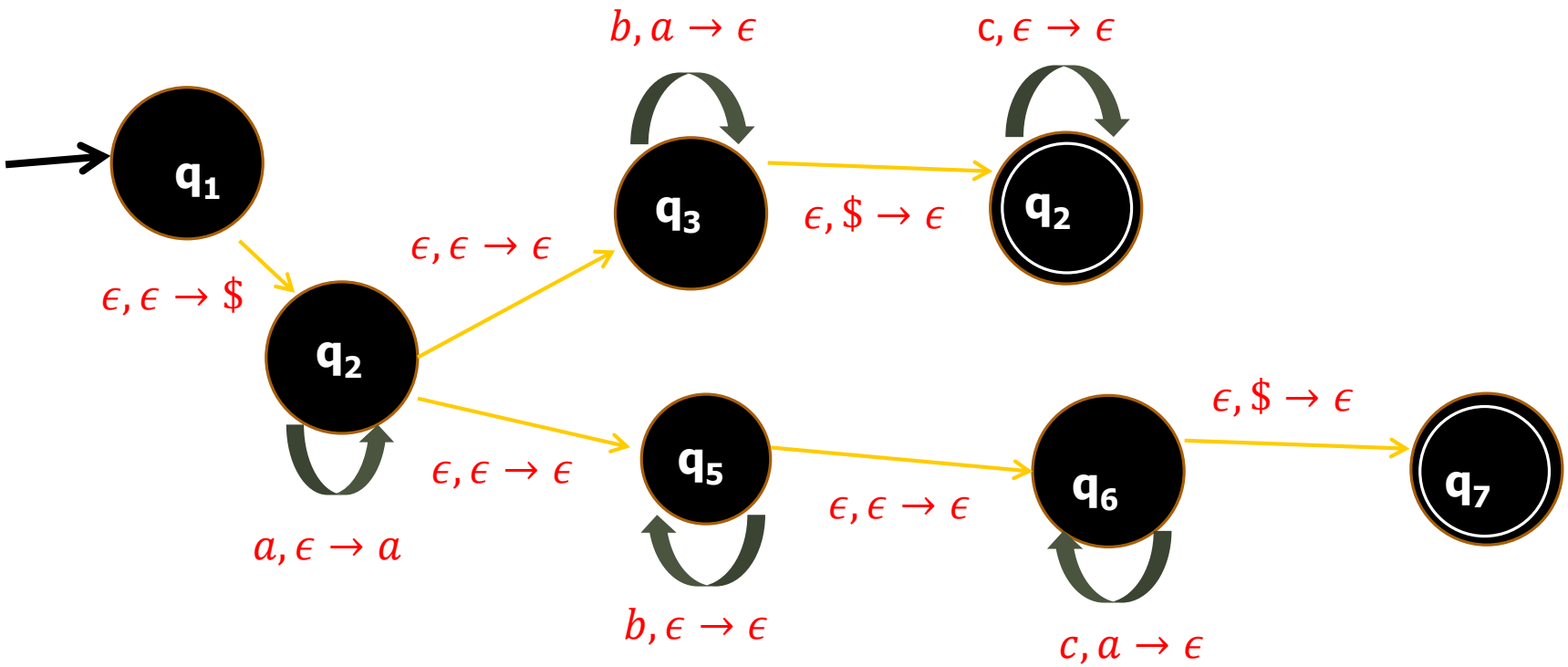

| Input: | 0 | | | 1 | | | $\varepsilon$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pilha: | 0 | \$ | $\varepsilon$ | 0 | \$ | $\varepsilon$ | 0 | \$ | $\varepsilon$ |
| $q_1$ | | | | | | | | | $\{(q_2, \$)\}$ |
| $q_2$ | | | $\{(q_2, 0)\}$ | $\{(q_3, \varepsilon)\}$ | | | | | |
| $q_3$ | | | | $\{(q_3, \varepsilon)\}$ | | | | $\{(q_4, \varepsilon)\}$ | |
| $q_4$ | | | | | | | | | |

# Autômatos com pilha

Construir um AP que reconhece a seguinte linguagem: $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \; e \; i = j \; ou \; i = k\}$

# Autômatos com pilha

Construir um AP que reconhece a seguinte linguagem: $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \; e \; i = j \; ou \; i = k\}$



# Equivalência entre APs e GLCs

- Qualquer GLC pode ser convertida num autômato com pilha que reconhece a linguagem que ela descreve, e vice versa.

# Equivalência entre APs e GLCs

- **Teorema:** Uma linguagem é livre de contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

# Equivalência entre APs e GLCs

- Esse teorema tem duas direções. Enunciamos e provamos cada uma das direções como um lema separado.

# Equivalência entre APs e GLCs

- Esse teorema tem duas direções. Enunciamos e provamos cada uma das direções como um lema separado.
- **Lema 2.21:** Se uma linguagem é livre de contexto então algum autômato com pilha a reconhece.

# Equivalência entre APs e GLCs

- Esse teorema tem duas direções. Enunciamos e provamos cada uma das direções como um lema separado.
- **Lema 2.21:** Se uma linguagem é livre de contexto então algum autômato com pilha a reconhece.
- **Lema 2.27:** Se algum autômato com pilha reconhece uma linguagem então ela é livre de contexto.