TEORIA DA COMPUTAÇÃO

UNIDADE 2: AUTÔMATOS E LINGUAGENS

AULA 1: **LEMA DO BOMBEAMENTO**

PROFESSOR: LUCAS CAMBUIM

Motivação

- Precisamos entender as limitações dos AFs.
- Exemplo: $B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
  - A máquina precisa lembrar quantos 0s foram vistos
  - Desta forma, máquina terá de registrar um número ilimitado de possibilidades.
  - Mas ela não pode fazer isso com qualquer quantidade finita de estados.

Motivação

- Cuidado: Nem sempre toda linguagem que pareça requerer memória ilimitada significa que precisa de memória ilimitada.
- Por exemplo:

$\boldsymbol{D = \{w | w}$ **tem um número igual de ocorrências de 01 e 10 como subcadeias}**

D é uma linguagem regular

Lema do Bombeamento

O lema do bombeamento diz que todas as cadeias da linguagem podem ser “bombeadas” se elas são no mínimo tão longas como um determinado valor especial, denominado ***comprimento de bombeamento.***

Lema do Bombeamento

A linguagem pode ser bombeada se qualquer cadeia suficientemente longa na linguagem pode ser quebrada em pedaços, alguns dos quais podem ser **repetidos** um número **arbitrário de vezes** para produzir uma cadeia mais longa na linguagem.

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- Para toda linguagem regular A, há um autômato AFD a aceita.

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- Para toda linguagem regular A, há um autômato AFD a aceita.
- Seja o AFD mais simples possível, isto é, aquele com o menor número de estados possível.

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- Para toda linguagem regular A, há um autômato AFD a aceita.
- Seja o AFD mais simples possível, isto é, aquele com o menor número de estados possível.
- Seja *p,* a quantidade de estados desse AFD.

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- Para toda linguagem regular A, há um autômato AFD a aceita.
- Seja o AFD mais simples possível, isto é, aquele com o menor número de estados possível.
- Seja *p,* a quantidade de estados desse AFD.
- Seja $s \in A$, t.q. $|s| \geq p$

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- Logo, existe uma sequência de estados $q_1, \ldots, q_f$ (q_f é final e q_1 inicial), para reconhecer s.
- Como o AFD tem apenas *p* estados e $|s| \geq p$, deverá haver **ao menos um estado "repetido"**, i.e. visitado mais de uma vez. (pelo princípio da casa dos pombos).
- Seja q_r o estado repetido.

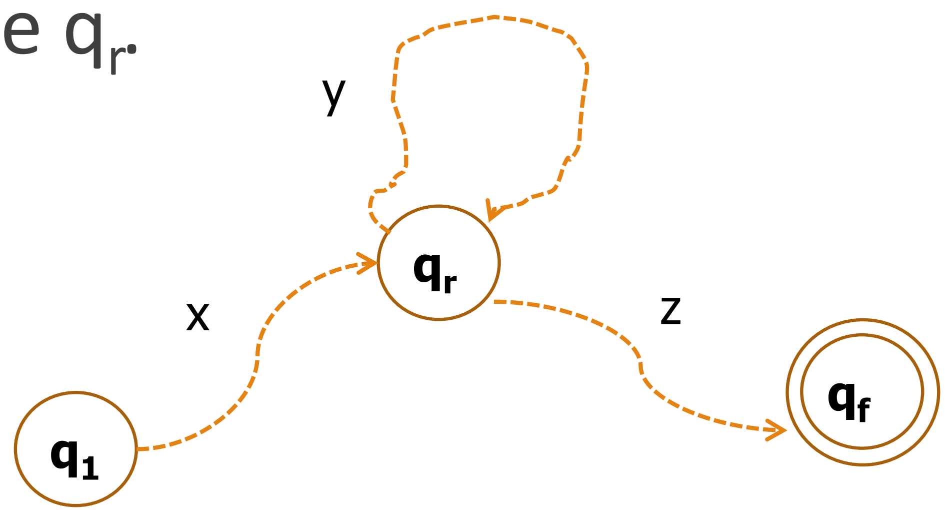
Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

Vamos dividir s em três **subcadeias: s=xyz**.

x é a parte que aparece antes de q_r,

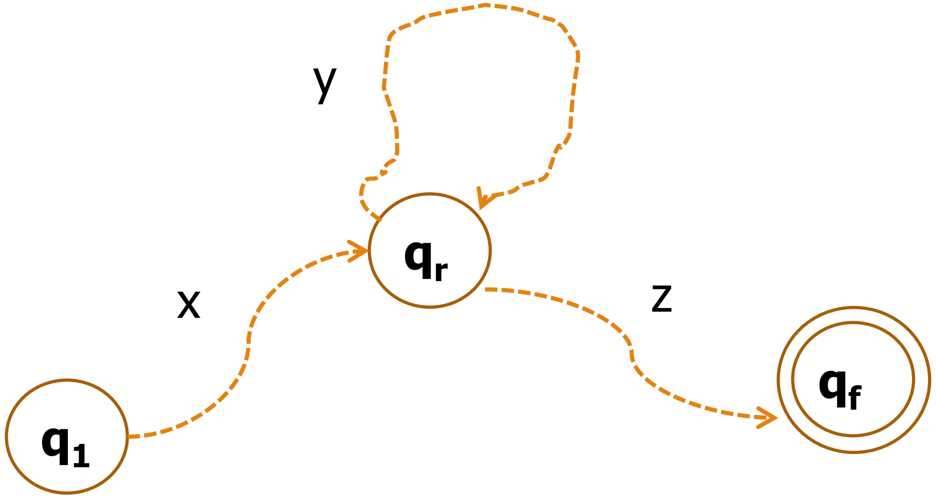
y é a parte que aparece entre as duas ocorrências de q_r

e z a parte restante, que aparece após a segunda ocorrência de q_r.



Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

Então, para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in L$



Lema do Bombeamento

Para qualquer linguagem regular L, existe um número p tal que qualquer cadeia s de comprimento ***igual ou maior*** *que p pode ser dividida em três subcadeias, s = xyz, tal que a parte do meio (não-vazia), y, pode ser repetida um número arbitrário de vezes (inclusive 0 vezes, o que significa remover y), gerando uma nova cadeia que também pertence a L.*

Lema do Bombeamento

Lema: Seja L uma linguagem regular. Então existe um inteiro $p \geq 1$ (chamado "comprimento de bombeamento") tal que cada cadeia s de L com comprimento maior ou igual a p pode ser escrita como $s = xyz$ satisfazendo as seguintes condições:

1. para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in L$
2. $|y| \geq 1$
3. $|xy| \leq p$

y é a subcadeia que pode ser bombeada (removida ou repetida arbitrariamente).

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- O lema do bombeamento para linguagens regulares determina se uma dada linguagem não é regular.

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- O lema do bombeamento para linguagens regulares determina se uma dada linguagem não é regular.
- Suponha que a linguagem B seja regular.

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- O lema do bombeamento para linguagens regulares determina se uma dada linguagem não é regular.
- Suponha que a linguagem B seja regular.
- Então use o lema do bombeamento para garantir a existência de um comprimento de bombeamento p.

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- Em seguida, encontre uma cadeia s que tenha comprimento p ou mais, mas que não possa ser bombeada **(contradição)**

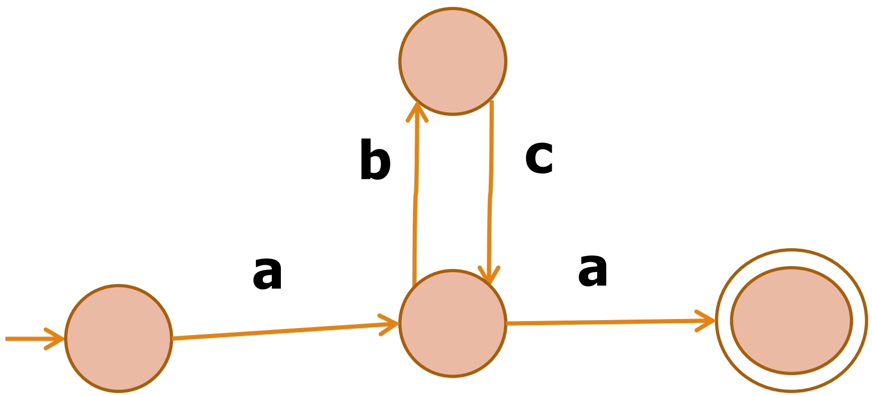
Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

- Em seguida, encontre uma cadeia s que tenha comprimento p ou mais, mas que não possa ser bombeada **(contradição)**
- Demonstre que s não pode ser bombeada.

Exemplos

Vamos mostrar como o lema se aplica a LRs.

Seja L= a(bc)*a. Então um AFD para L seria:



p = 4

s = xyz

x=a, y=bc e z=a

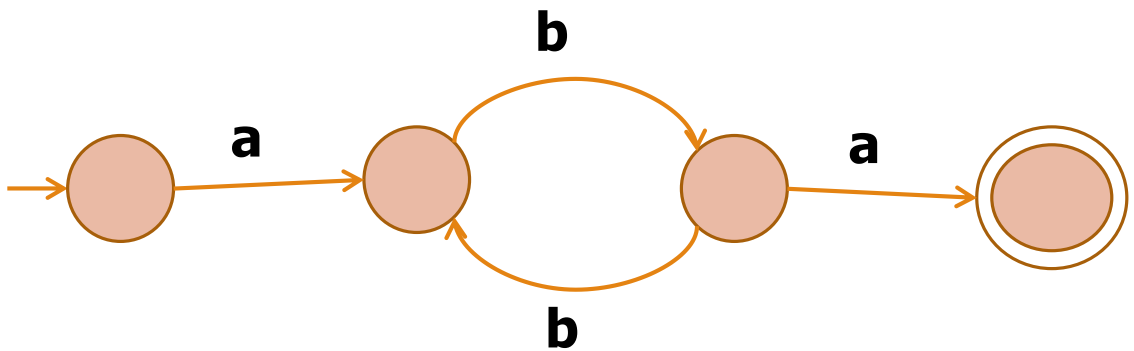
1. $\forall i \geq 0, xy^iz \in L$

2. $|y| \geq 1$

3. $|xy| \leq p$

Exemplos

Mostre que o lema se aplica para L = $\{ab^na \mid n >= 1$ e impar$\}$



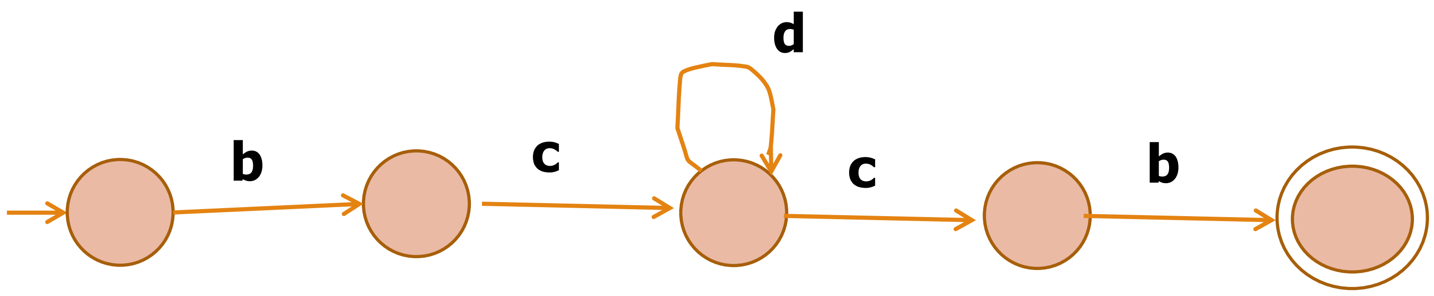
p = 4

s = xyz
x=ab, y=bb e z=a

1. $\forall i \geq 0, xy^iz \in L$
2. $|y| \geq 1$
3. $|xy| \leq p$

Exemplos

Mostre que o lema se aplica para $L = \{bcd^ncb \mid n \geq 0\}$



p = 5

s = xyz
x=bc, y=d e z=cb

1. $\forall i \geq 0, xy^iz \in L$

2. $|y| \geq 1$

3. $|xy| \leq p$

Exemplos

Mostre que $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular

Vamos fazer uma prova por contradição.

Exemplos

Vamos supor que L é regular, logo o lema do bombeamento se aplica.

Seja $s = 0^p 1^p$. (|s| ≥ p, logo o lema pode se aplicar)

$s = xyz$

Onde para qualquer $i \geq 0$ a cadeia xy^iz está em L.

Exemplos

1. Se y possui apenas 0s. Nesse caso, xyyz $\notin$ L. Temos uma contradição.

Exemplos

1. Se y possui apenas 0s. Nesse caso, xyyz $\notin$ L. Temos uma contradição.
2. Se y possui apenas 1s. Nesse caso |xy| $>$ p, violando a condição 3.

Exemplos

3. Se y possui 0s e 1s, a condição 3 também é violada. Além disso, xyyz não pertencerá à linguagem.

Exemplos

Mostre que $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é regular

Exemplos

Mostre que $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é regular

Vamos supor que L é regular.

Exemplos

Seja $s = 0^p10^p1$ (como $|s| \geq p$, logo o lema pode se aplicar)

1. Se $x=\varepsilon$ e y possui apena 0s. Nesse caso, $xyyz \notin L$. Temos uma contradição.

Exemplos

Seja s = 0^p10^p1 (como $|s| \geq p$, logo o lema pode se aplicar)

1. Se x=ε e y possui apena 0s. Nesse caso, xyyz $\notin$ L. Temos uma contradição.
2. Se x=z=ε, $xy^iz \in L$. Mas, $|xy| > p$, violando a condição 3.

Observações

- Precisamos prestar bastante atenção na escolha da cadeia.

Observações

- Precisamos prestar bastante atenção na escolha da cadeia.
- Deve ser uma cadeia onde todas as divisões (em x,y e z) possíveis não obedecem ao lema.

Observações

- Precisamos prestar bastante atenção na escolha da cadeia.
- Deve ser uma cadeia onde todas as divisões (em x,y e z) possíveis não obedecem ao lema.
- Se existir apenas uma divisão onde o lema se aplica, a cadeia pode ser bombeada e portanto não seria um bom exemplo.

Observações

- Precisamos prestar bastante atenção na escolha da cadeia.
- Deve ser uma cadeia onde todas as divisões (em x,y e z) possíveis não obedecem ao lema.
- Se existir apenas uma divisão onde o lema se aplica, a cadeia pode ser bombeada e portanto não seria um bom exemplo.
- No exemplo anterior, se $s = 0^p0^p$, $x = 0^{p-2}$, $y=0^2$, teríamos o lema aplicado.

Exemplo de linguagem não-regular na qual o lema se aplica:

$L = \{w=uu^kv \mid w \in \{0,1\}^*\}$.