TEORIA DA COMPUTAÇÃO

AULA 6: AUTÔMATOS E LINGUAGENS (CAP 1)

FECHO SOB AS OPERAÇÕES REGULARES

PROFESSOR: LUCAS CAMBUIM

Fecho sob as operações regulares

Agora retornamos ao fecho da classe de linguagens regulares.

O uso de não-determinismo torna as provas muito mais fáceis.

Operações Regulares

Teorema: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

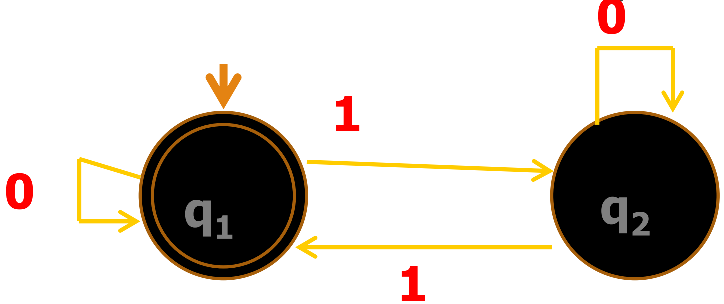
Em outras palavras, se A_1 e A_2 são linguagens regulares, o mesmo acontece com $A_1 \cup A_2$.

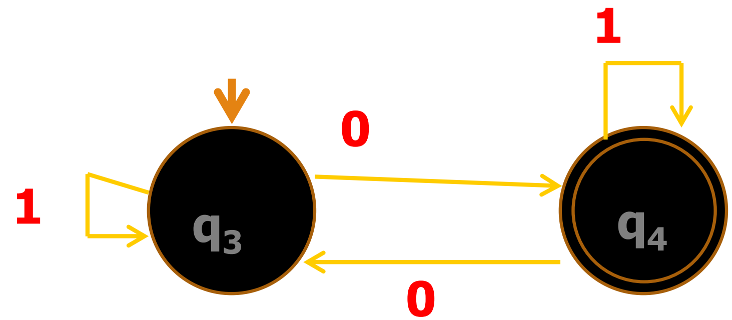
Idéia da Prova: Se A_1 e A_2 são linguagens regulares, então existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

Vamos fazer uma nova prova. Vamos construir um AFN N, que reconheça $A_1 \cup A_2$, a partir de N_1 e N_2.

Fecho sob as operações regulares

Antes provamos o fecho sob união simulando deterministicamente ambas as máquinas simultaneamente via uma construção de produto cartesiano.



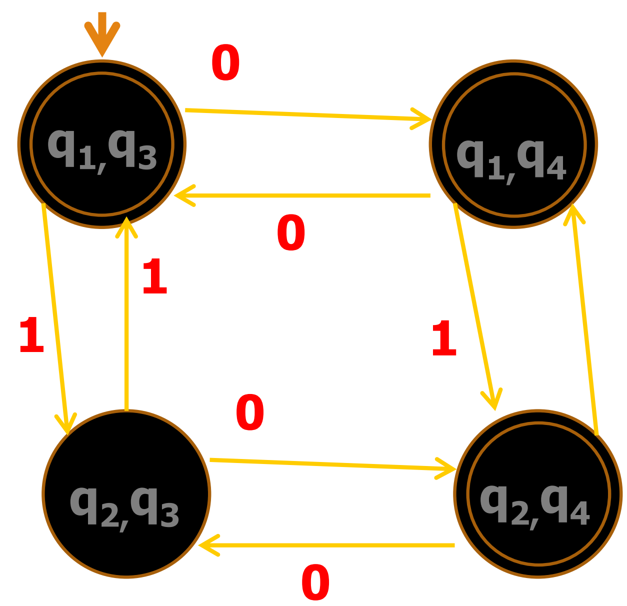


$M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_1,F_1)$, $M_2=(Q_2,\Sigma_2,\delta_2,q_3,F_2)$

$M =(Q_1\times Q_2,\Sigma,\delta,(q_{1,}q_3),F)$

$\delta((r_{1,}r_2),a)=(\delta_1(r_1,a),\delta_2(r_2,a))$

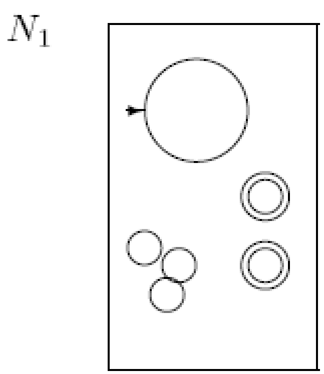
$F_1= (F_1\times Q_2) \cup (Q_1\times F_2)$

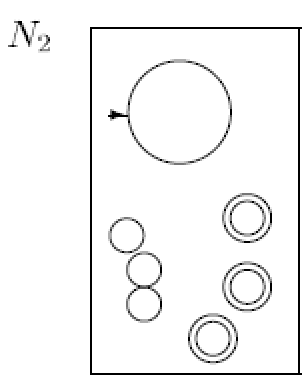


$M_1 \cup M_2$

União

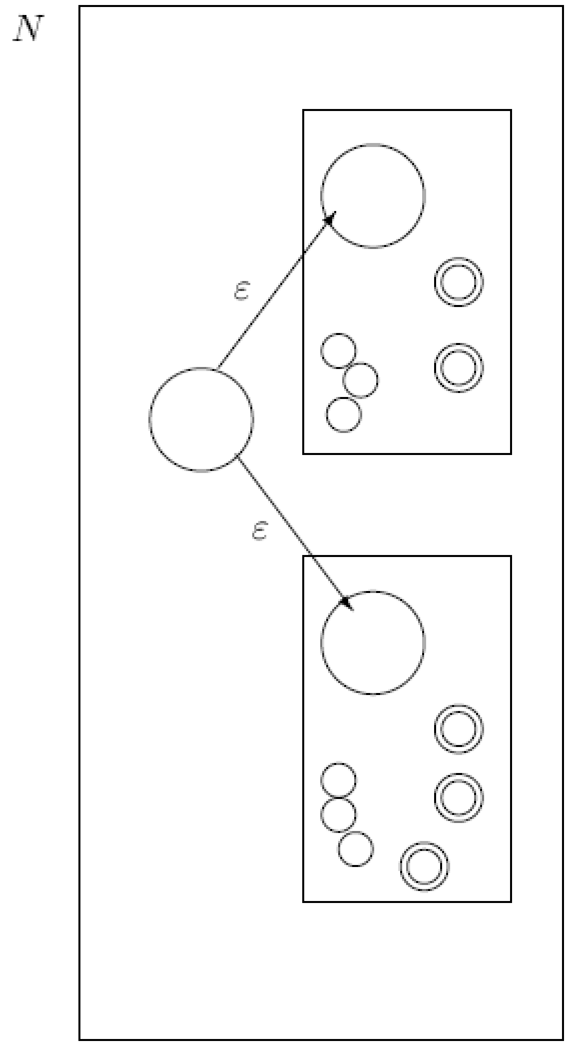
$N_1 = (Q_1,\Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$
reconhece A_1





$N_2 = (Q_2,\Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$
reconhece A_2.

$N = (Q,\Sigma, \delta, q_0, F)$
reconhece $A_1 \cup A_2$



$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$

$F = F_1 \cup F_2$

$\delta(q,a) =$

$\delta_1(q,a)$ se $q \in Q_1$,

$\delta_2(q,a)$ se $q \in Q_2$,

$\{q_1,q_2\}$ se $q=q_0$ e $a=\varepsilon$

$\varnothing$ se $q=q_0$ e $a\neq\varepsilon$

Construção Formal

Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1, e
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconheça A_2.

Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ para reconhecer $A_1 \cup A_2$.

1. $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$.
   Os estados de N são todos os estados de N_1 e N_2, com a adição de um novo estado inicial q_0.
2. O estado q_0 é o estado inicial de N.
3. Os estados de aceitação $F = F_1 \cup F_2$.
   Os estados de aceitação de N são todos os estados de aceitação de N_1 e N_2. Dessa forma N aceita se N_1 aceita ou N_2 aceita.
4. Defina δ de modo que para qualquer $q \in Q$ e qualquer $a \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon. \end{cases}$$

Operações Regulares

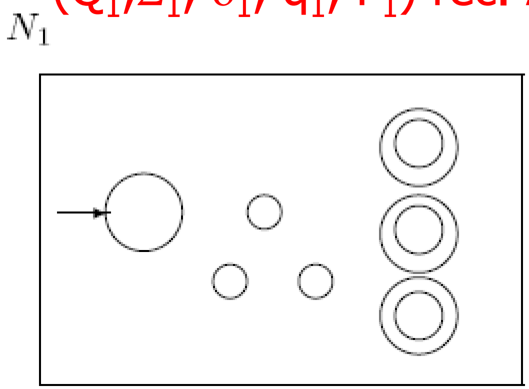
Teorema: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

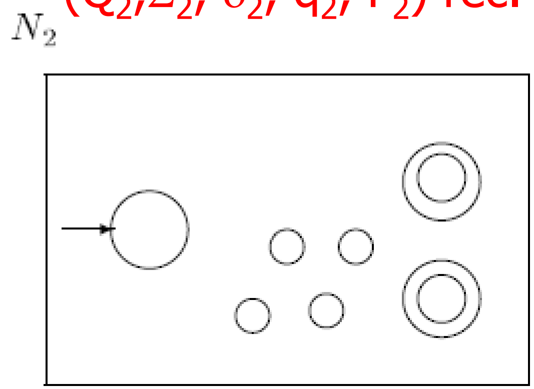
Idéia da Prova: Se A_1 e A_2 são linguagens regulares, então existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

Vamos construir um AFN N, que reconheça $A_1 \circ A_2$, a partir de N_1 e N_2.

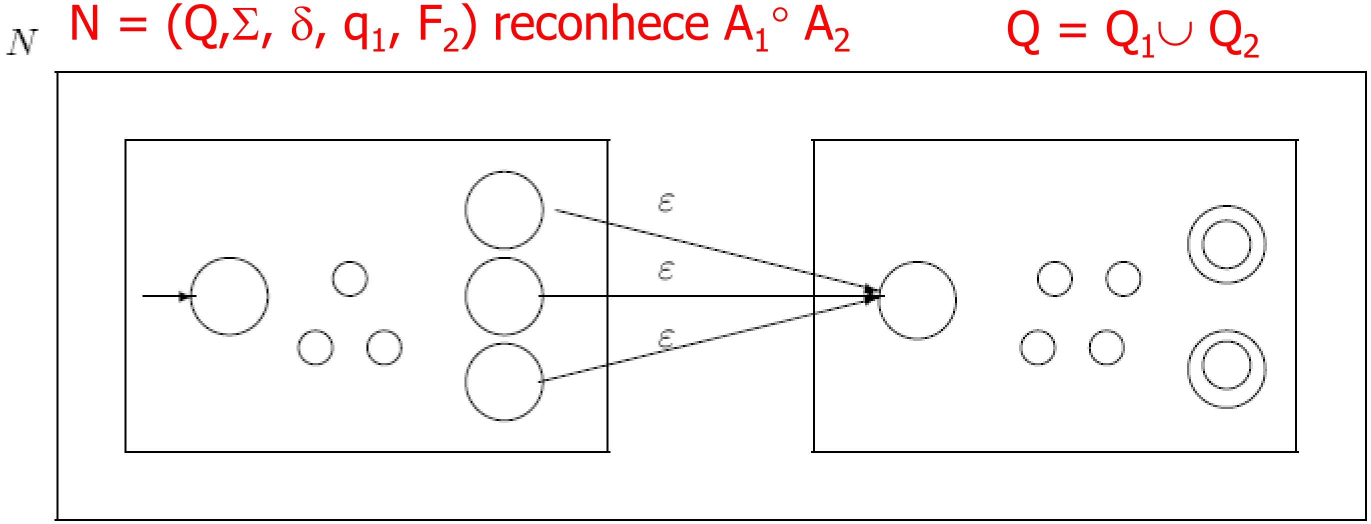
Concatenação

$N_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$ rec. A_1 $N_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ rec. A_2.





$N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$ reconhece $A_1 \circ A_2$ $Q = Q_1 \cup Q_2$



$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

Construção Formal

Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1, e
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconheça A_2.

Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$ para reconhecer $A_1 \circ A_2$.

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$.
   Os estados de N são todos os estados de N_1 e N_2.
2. O estado q_1 é o mesmo que o estado inicial de N_1.
3. Os estados de aceitação F_2 são os mesmos que os estados de aceitação de N_2.
4. Defina δ de modo que para qualquer $q \in Q$ e qualquer $a \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2. \end{cases}$$

Operações Regulares

Teorema: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação estrela.

Idéia da Prova: Se A_1 é uma linguagem regular, então existe um AFN N_1 que a reconheça.

Vamos construir um AFN N, que reconheça A_1*, a partir de N_1.

Operação Estrela

Podemos construir N como N1 com setas ε adicionais retornando ao estado inicial a partir dos estados de aceitação.

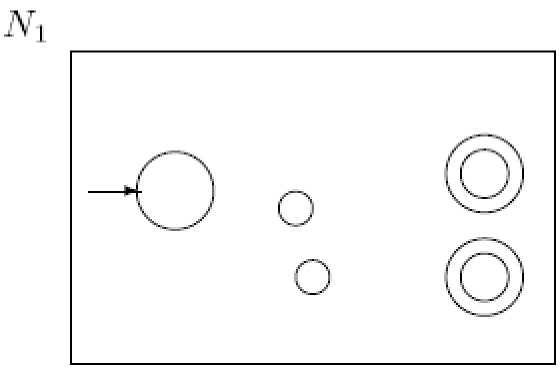
Adicionalmente, temos que modificar N de tal forma que ele aceite ε, que é sempre um membro de A*.

Uma idéia (levemente má) é simplesmente adicionar o estado inicial ao conjunto de estados de aceitação.

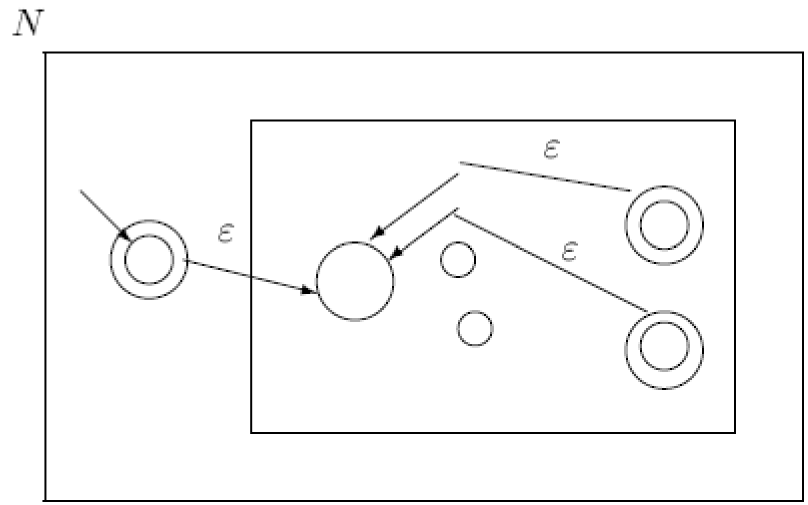
O que você acha dessa abordagem?

Fecho

$N_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$



$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ reconhece A_1^*



$Q = Q_1 \cup \{q_0\}$ $\quad$ $F = F_1 \cup \{q_0\}$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \varnothing & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Construção Formal

1. $Q = \{q_0\} \cup Q_1$.
   Os estados de N são os estados de N_1 mais um novo estado inicial.
2. O estado q_0 é o novo estado inicial.
3. $F = \{q_0\} \cup F_1$.
   Os estados de aceitação são os antigos estados de aceitação mais o novo estado inicial.
4. Defina δ de modo que para qualquer $q \in Q$ e qualquer $a \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon. \end{cases}$$

Exercícios

Fazer os exercícios 1.8 o 1.9 e 1.10 do livro texto.