TEORIA DA COMPUTAÇÃO

AULA 1: INTRODUÇÃO

PROFESSOR: LUCAS CAMBUIM

SOBRE MIM

- Estudante de Doutorado em Ciência da Computação no Centro de Informática – UFPE
- Áreas de Interesse: Teoria da Computação, Arquitetura de Computadores, Aprendizagem de Máquina, Processamento de Imagem e Visão Computacional, Otimização.
- Tenho disponibilidade para orientação de trabalhos de TCC e projetos tecnológicos
- O que gosto de fazer? Lecionar, Pesquisar e Codificar
- Experiência em:
  - Circuitos Integrados
  - Processamento de Imagem
  - Inteligência Artificial
  - ...
- Email: lucascambuim@gmail.com || lfsc@cin.ufpe.br

SOBRE VOCÊS

Nome:

O que busca: Pesquisar, Desenvolver, Concurso Público

?????

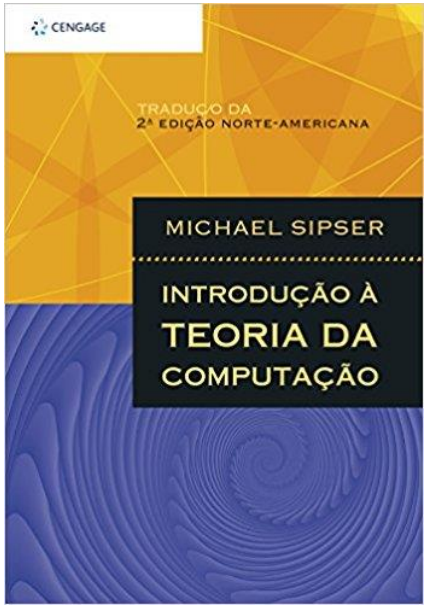
MATERIAL DE APOIO

Página web:

http://www.cin.ufpe.br/~lfsc/cursos/teoriadacomputacao

Material:

- Livro texto: Uma introdução à Teoria da Computação, Michael Sipser,
- Slides do curso disponibilizados na página web.



EMENTA

1 - Introdução a Teoria da Computação;

Sequências, alfabetos, linguagens.

2 - Expressões regulares e Gramáticas Livres de Contexto

Expressão regulares;

Conceito de gramática.

EMENTA

3 - Autômatos finitos e de Pilhas

Autômatos Finitos Deterministas e Não-Deterministas.

Autômatos a Pilha

Equivalência entre Autômatos

4 – Máquinas Universais

Máquina Turing

Funções Computáveis pela Máquina Turing

Equivalência de Modelos e Tese de Church

Máquina de Turing Universal

Caracterização da solucionabilidade de problemas

Problema de Decisão, da Parada, Princípio da Redução

EMENTA

5 - Funções Recursivas

Funções iniciais

Composição Generalizada. Recursão e Minimalização.

Funções Recursivas Primitivas

Funções Recursivas

Funções Computáveis

6 - Introdução à Complexidade de Problemas e Tópicos Avançados

Computabilidade e Indecidibilidade

Problemas intratáveis

AVALIAÇÃO

Listas de exercícios (L1, L2)

Duas Provas (T1, T2)

Nota da primeira unidade: N1 = (0.7 * T1 + 0.3 * L1)

Nota da segunda unidade: N2 = (0.7 * T2 + 0.3 * L2)

A média final é **M = (N1 + N2)/2**

Teoria é importante para a prática

- Ela provê ferramentas conceituais que os praticantes usam em ciência da computação.
- Projetando uma nova linguagem de programação para uma aplicação especializada?
- O que você irá aprender sobre *gramáticas* neste curso irá bem a calhar.

Teoria é importante para a prática

- Lidando com busca por cadeias e casamento de padrões?

- Lembre-se de *autômatos finitos* e *expressões regulares*.

Teoria é importante para a prática

- Confrontado com um problema que parece requerer mais tempo de computador do que você pode suportar?

- Pense no que você aprendeu sobre *NP -completude*.

Teoria é importante para a prática

- Os melhores projetos e aplicações de computadores são concebidos com elegância em mente.

- Um curso teórico pode elevar seu sentido estético e ajudá-lo a construir sistemas mais bonitos.

Teoria é importante para a prática

- Finalmente, teoria é bom para você porque estudá-la expande sua mente.
- Conhecimento técnico específico, embora útil hoje, fica desatualizado em apenas uns poucos anos.
- Essas habilidades têm valor duradouro. Estudar teoria treina você nessas áreas.

Teoria dos Autômatos

- Lida com as definições e propriedades de modelos matemáticos de computação.
- Um modelo, chamado *autômato finito*, é usado em processamento de texto, compiladores, e projeto de hardware.
- Um outro modelo, chamado *gramática livre-do-contexto*, é usado em linguagens de programação e inteligência artificial.

Teoria da Computação
Nosso curso

- Três áreas centrais: autômatos, computabilidade e complexidade.

Quais são as habilidades e limitações fundamentais dos computadores?

O que faz alguns problemas computacionalmente difíceis e outros fáceis?

Como separar os problemas que possuem solução computacional daqueles que não possuem?

Teoria da Computação
Nosso curso

- *As teorias da complexidade e computabilidade requerem uma definição precisa de um computador.*

- *A teoria dos autômatos introduz definições de modelos matemáticos de computação.*

- *Daí começamos o nosso curso estudando esses modelos.*

Teoria da Computação
Outros modelos

Só para sabermos:

Outros modelos de computação também foram propostos.

λ-cálculo (Alonzo Church)

Funções recursivas μ (Kurt Godel, Jacques Herbrand)

Lógica combinatória (Moses Schonfinkel, Haskell B. Curry)

Teoria da Computação
Contexto do que vamos começar a estudar

No curso iremos estudar os seguintes modelos de computação:

1. *Autômatos finitos*
2. *Autômatos com pilha*
3. *Máquinas de Turing*

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

CONJUNTOS

Operações

Produto cartesiano

Conjunto das partes

SEQUÊCIAS E UPLAS

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

FUNÇÕES E RELAÇÕES

Domínio, contra-domínio e imagem

Argumentos e aridade

Função n-ária, unária, binária, etc.

Relação n-ária, binária, etc.

Propriedades de uma relação

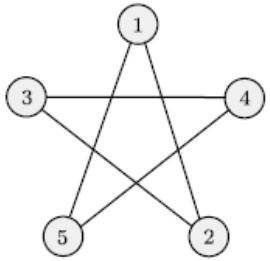
Relações de equivalência

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

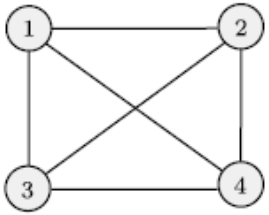
GRAFOS

É um conjunto de pontos com linhas conectando alguns pontos.

- Os pontos são chamados de **nós ou vertices** e as linhas de **arestas**.
- O número de aresta em um nó específicio é chamado de **grau** daquele nó**.**
- O par (i, j) representa a aresta que conecta i e j. A ordem não importa em um grafo **não-direcionado**
- G = (V, E), onde V é o conjunto de vertices e E é o conjunto de arestas.
  - Grafo 1: ({1,2,3,4,5}, {(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)})
  - Grafo 2: ({1,2,3,4},{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)})



Grafo 1



Grafo 2

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

GRAFOS

Grafos são frequentemente usados para representar dados

Grafo rotulado: quando arestas e vértices possuem um rótulo

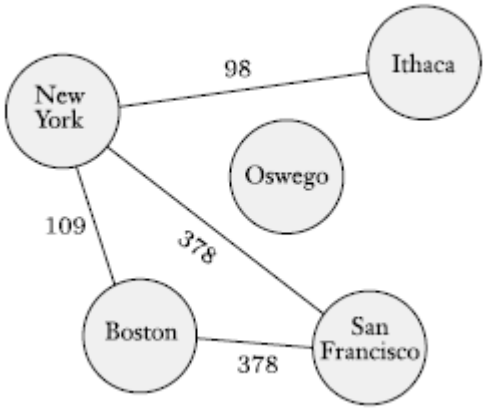


Figura 0.13: Tarifas aéreas sem-escalas mais baratas entre várias cidades

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

GRAFOS

Dizemos que o grafo G é um ***subgrafo*** do grafo H se os nós de G formam um subconjunto dos nós de H, e as arestas de G são as arestas de H sobre os nós correspondentes.

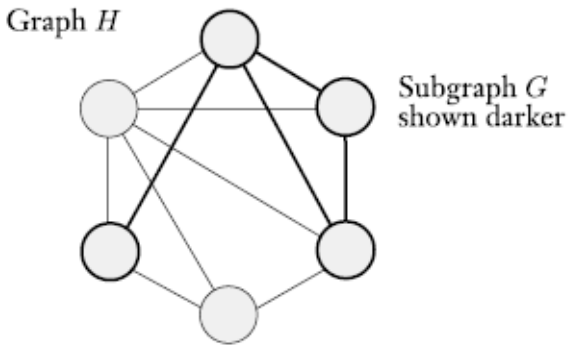


FIGURA 0.14
Grafo G (mais escuro) é um subgrafo de H

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

GRAFOS

- **Caminho**: Sequência de nós conectados por arestas
- **Caminho simples**: é um caminho que não repete nenhum nó.
- **Grafo Conexo**: A cada dois nós têm um caminho entre eles.
- **Um ciclo simples**: É aquele que contém pelo menos três nós e repete somente o primeiro e o ultimo nós.
- **Árvore**: Grafo conexo e não tem ciclos
  - Raiz
  - Folha: Nós de grau 1 exceto a raiz.

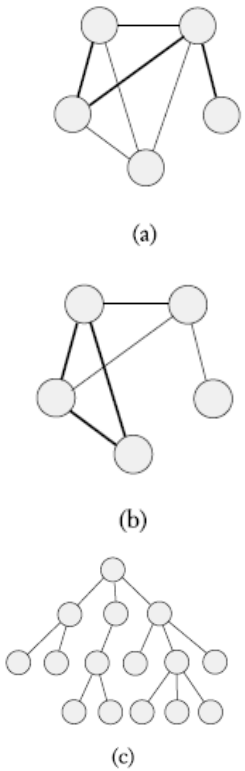


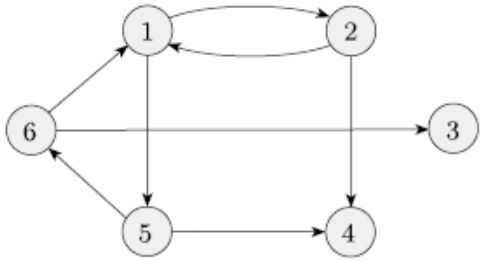
FIGURA 0.15
(a) Um caminho em um grafo, (b) um ciclo em um grafo, e (c) uma árvore

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

GRAFOS

Se o Grafo possuir setar é chamado de grafo direcionado

- **Grau de saída**
- **Grau de entrada**
- **Caminho direcionado**: Um caminho no qual todas as setas apontam na mesma direção que seus passos
- Um grafo direcionado é **fortemente conexo** se um caminho directionado conectado dois nós.



FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

CADEIAS E LINGUAGENS

São blocos básicos fundamentais em ciência da Computação

Alfabeto: Conjunto finito não vazio de símbolos.

Pode variar com a aplicação

Notação: Σ ou Γ

Exemplos:

$$\Sigma_1 = \{0,1\};$$

$$\Sigma_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{h}, \mathtt{i}, \mathtt{j}, \mathtt{k}, \mathtt{l}, \mathtt{m}, \mathtt{n}, \mathtt{o}, \mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{t}, \mathtt{u}, \mathtt{v}, \mathtt{w}, \mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\};$$

$$\Gamma = \{0, 1, \mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}.$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Cadeias sobre um alfabeto:

É uma sequência finita de símbolos daquele alfabeto. Descrito um seguido do outro não é separado por vírgulas.

Exemplos: Se $\sum_1 = \{0,1\}$ então 01001 é uma cadeia sobre $\sum_1$

Se $\sum_2 = \{a, b, c, \dots, z\}$ então abracadabra é uma cadeia sobre $\sum_2$

Σ^* é o conjunto de todas as cadeias sobre o alfabeto Σ

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

CADEIAS E LINGUAGENS

Tamanho de uma cadeia w: |w|.

Cadeia vazia (de tamanho zero): ε

Reverso de w: w^R é a cada obtida escrevendo w na ordem inversa. Assim, se $w = w_1 w_2 \dots w_n$ então w^R é $w = w_n w_{n-1} \dots w_1$

Subcadeia: Quando uma cadeia aparece dentro de outra cadeia na mesma ordem.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Operação de concatenação de cadeias.

Essa opereção pega duas cadeias *x* e *y* e forma uma nova colocando *y* após *x*.

A cadeia *xy* é chamada de concatenação de *x* e *y*.

Em geral *xy* é diferente de *yx*

Para concatenar uma cadeia com si própria muitas vezes usamos a notação com expoente:

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

CADEIAS E LINGUAGENS

Concatenação de cadeias: algumas propriedades

Associativa: $(xy)z = x(yz)$

A cadeia ε é a identidade: $\varepsilon x = x\varepsilon = x$

$|xy| = |x| + |y|$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

CADEIAS E LINGUAGENS

Concatenação de x com si própria: x^K.

Exemplo: $(ab)^3 = ababab$

$(ab)^0 = \varepsilon$

Definição recursiva para x^k:

$x^0 = \varepsilon$

$x^{n+1} = x^n x$

Linguagem*: conjunto de cadeias*

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

LÓGICA BOOLEANA

Usamos valores booleanos em situações com duas possibilidades, tais

como um o que pode ter uma voltagem alta ou baixa, uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa, ou uma questão que pode ser respondida com sim ou no.

Podemos manipular valores booleanos com Operações Booleanas

$$0 \wedge 0 = 0 \qquad 0 \vee 0 = 0 \qquad \neg 0 = 1$$
$$0 \wedge 1 = 0 \qquad 0 \vee 1 = 1 \qquad \neg 1 = 0$$
$$1 \wedge 0 = 0 \qquad 1 \vee 0 = 1$$
$$1 \wedge 1 = 1 \qquad 1 \vee 1 = 1$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

LÓGICA BOOLEANA

Usamos operações booleanas para combinar enunciados simples em expressões booleanas mais complexas

Ex: Sejam os enunciados:

P = “o sol está brilhando”

Q = “hoje é segunda feira”

Podemos escrever que P ^ Q para representar o valor-verdade do enunciado:

“O sol está brilhando e hoje é segunda feira”

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

LÓGICA BOOLEANA

Outras operações booleanas:

$$0 \oplus 0 = 0 \qquad 0 \leftrightarrow 0 = 1 \qquad 0 \rightarrow 0 = 1$$
$$0 \oplus 1 = 1 \qquad 0 \leftrightarrow 1 = 0 \qquad 0 \rightarrow 1 = 1$$
$$1 \oplus 0 = 1 \qquad 1 \leftrightarrow 0 = 0 \qquad 1 \rightarrow 0 = 0$$
$$1 \oplus 1 = 0 \qquad 1 \leftrightarrow 1 = 1 \qquad 1 \rightarrow 1 = 1$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

LÓGICA BOOLEANA

Podemos estabelecer vários relacionamentos entre essas operações

Podemos expressar todas as operações booleanas em termos das operações E e Não:

$$
\begin{array}{ll}
P \vee Q & \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\
P \rightarrow Q & \neg P \vee Q \\
P \leftrightarrow Q & (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\
P \oplus Q & \neg(P \leftrightarrow Q)
\end{array}
$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

LÓGICA BOOLEANA

A lei distributiva para E e OU muito útil para manipulação de expressões booleanas

$$P \wedge (Q \vee R) \text{ equals } (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \text{ and its dual}$$

$$P \vee (Q \wedge R) \text{ equals } (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

DEFINIÇÕES, TEOREMAS E PROVAS

Teoremas e Provas são o coração e alma da matemática e definições são seu espírito.

Definições: Descrevem os objetos e noções que usamos de maneira precisa.

Enunciado: Expressa que algum objeto tem uma certa propriedade. O enunciado pode ou não ser verdadeiro, mas tem que ser preciso.

Prova: É um argumento lógico convincente de que um enunciado é verdadeiro. Em matemática um argumento tem que ser justo, isto é, convincente em um sentido absoluto.

Teorema: é um enunciado matemático demonstrado verdadeiro.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

ENCONTRANDO PROVAS

- A única maneira de determinar a veracidade ou a falsidade de um enunciado matemático é com uma prova matemática
- Durante este curso, você será requisitado a apresentar provas de vários enunciados.
- As vezes as partes de um enunciado de múltiplas partes não são imediatamente evidentes.
- Por exemplo: P ⇔ Q essa notação é uma abreviação para um enunciado de duas partes. Parte 1: Preciso provar P => Q; e Parte 2: preciso provar P <= Q. Provando os dois enunciados então P ⇔ Q

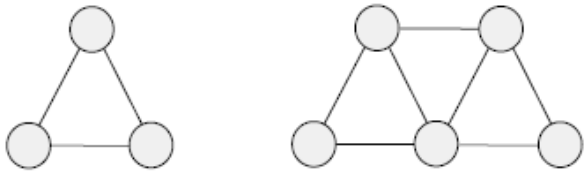
FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

- Experimentar com exemplos útil para compreender a afirmação conseguir observar alguma lógica ou padrão de repetição.
- Em seguida: Tente achar um contra exemplo

Exemplo

Quero provar "P*ara todo grafo* G*, a soma dos graus de todos os nós em* G *é um número par*.

1. Pegue alguns exemplos e observe esse enunciado em ação



sum = 2+2+2 = 6

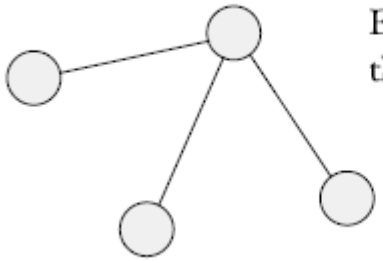
sum = 2+3+4+3+2 = 14

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exemplo

Quero provar "P*ara todo grafo* G*, a soma dos graus de todos os nós em* G *é um número par*.

2. Tente encontrar um contra-exemplo, ou seja, um grafo no qual a soma é número ímpar



Every time an edge is added,
the sum increases by 2.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Dica 2: Se você está tentando provar que alguma propriedade é verdadeira para todo $k > 0$, primeiro tente prová-la para $k = 1$. Se você conseguir, tente-a para $k = 2$, e assim por diante até que você possa entender o caso mais geral.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exemplo:

Teorema 0.20:

Para quaisquer dois conjuntos A e B

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exercício de casa:

Teorema 0.21 Para todo grafo G, a soma dos graus de todos os nós em G é um número par.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Tipos de Prova:

Vários tipos de argumentos surgem frequentemente em provas matemáticas. Note que uma prova pode conter mais que um tipo de argumento porque a prova pode conter dentro dela várias subprovas diferentes.

Prova por construção: Muitos teoremas enunciam que um tipo particular de objeto existe. Uma maneira de provar um teorema desse é demonstrar como construir o objeto. Em outras palavras, consiste em construir um exemplo concreto com determinada propriedade para mostrar que existe algo com tal propriedade.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exemplo: Teorema 0.22 Para cada número par n maior que 2, existe um grafo 3-regular com n nós. Um grafo k-***regular é um grafo onde*** todos os nós tem grau k.

PROVA Seja n um número par maior que 2. Construa o grafo $G = (V, E)$ com n nós da seguinte forma. O conjunto de nós de G é $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, e o conjunto de arestas de G é o conjunto

$$E = \{\, \{i, i+1\} \mid \text{ for } 0 \le i \le n-2 \} \cup \{\, \{n-1, 0\} \,\}$$
$$\cup \{\, \{i, i+n/2\} \mid \text{ for } 0 \le i \le n/2 - 1 \}.$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Provas por contradição: é mostrado que se algum enunciado fosse verdadeiro, ocorreria uma contradição lógica, e portanto o enunciado deve ser falso.

Exemplo 0.23: Jack vê Jill, que acaba de chegar da rua. Observando que ela está completamente enxuta, ele sabe que não está chovendo. Sua "prova". de que não está chovendo é que, *se estivesse chovendo* (a suposição de que o enunciado é falso), *Jill estaria molhada* (a consequência obviamente falsa). Portanto não pode estar chovendo.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exemplo de prova de contradição: Seja U um conjunto infinito, e seja S um subconjunto finito de U. Seja T o complemento de S em relação a U. Então T é infinito.

Suponha que T seja finito (ou seja, negamos a tese)

Pela definição de conjunto complemento, se T, finito, é complemento de S, finito, em relação a U, então U deve ser finito.

Mas, por hipótese, U é infinito. Então U seria ao mesmo tempo finito e infinito, o que é um absurdo (uma contradição). Logo, nossa hipótese inicial não pode ser verdadeira.

Portanto, T é infinito (provamos a tese).

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exemplo de prova de contradição: Vamos provar que $\sqrt{2}$ é irracional

- Um número é racional se puder ser escrito como $\frac{p}{q}$ onde p e q são inteiros
- Podemos supor que p e q são sempre primos entre si, isto é, que eles não tem fatores comuns, pois caso contrário poderíamos dividir ambos pelos fatores comuns tornando-os desta maneira primos entre si.

Queremos provar que é impossível escrever

$$\sqrt{2} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Vamos então supor por absurdo que isto é verdadeiro

Elevando ao quadrado

$$2 = \frac{\mathrm{p}^2}{\mathrm{q}^2}$$

Ou seja,

$$2q^2 = p^2$$

Logo p^2 é um número par pois é múltiplo de 2. Isto implica em p ser par também, pois o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

“p" pode ser escrito na forma "2m" onde m é um número inteiro e então teremos $p^2 = 4m^2$ que nos leva a

$$2q^2 = 4\mathrm{m}^2$$

Que depois de simplificada nos dá

$$2m^2 = q^2$$

Que nos faz concluir que q também é par.

Logo p e q não são primos entre si. Uma contradição porque dissemos que eram primos entre si

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Provas por contraposição: considerando uma declaração como uma proposição composta "se p, então q", inverte-se e nega-se a proposição (esta é a contrapositiva). Sendo "se p, então q", equivalente a "se não q, então não p", basta provar a segunda que a declaração estará provada.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Provas por contraposição:

Tabela Verdade

H	C	H → C	~C → ~H
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Provas por indução: Prova por indução é um método avançado usado para mostrar que todos os elementos de um conjunto infinito têm uma propriedade especificada.

- Dado uma propriedade *P* queremos provar que *P*(k) é verdadeiro para qualquer número natural k. Em outras palavras queremos provar que P(1) é verdadeiro assim como P(2), P(3), P(4), e assim por diante.
- Dividida em duas partes: o ***passo da indução*** e a ***base***
- ***Passo Base: Prova que P(1) é verdadeira***
- ***Passo da indução: Prova que para cada i≥1 se P(i) é verdadeira, então P(i+1) também será.***
- A suposição de que P(i) é verdadeiro é chamado a ***hipótese da indução***.
- Depois que provamos estes dois passos então sabemos que P(i) é verdadeiro para qualquer valor de i natural.

Obs: Variações da idéia anterior:

- A base não precisa começar em 1. Ela pode começar com qualquer valor b. Nesse caso a prova por indução mostra que P(k) é verdadeiro para todo k que é no mínimo b.

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exemplo: Queremos provar por indução a corretude da fórmula usada para calcular o tamanho dos pagamentos mensais de prestações da casa própria.

Montante inicial: $\boldsymbol{P_0 = P}$

Montante do empréstimo após um mês: $\boldsymbol{P_1 = MP_0 - Y}$

Montante do empréstimo após dois meses: $\boldsymbol{P_2 = MP_1 - Y}$

Para cada $\boldsymbol{t \geq 0}$**:**

$$P_t = PM^t - Y\left(\frac{M^t - 1}{M - 1}\right).$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Exemplo: Queremos provar por indução a corretude da fórmula usada para calcular o tamanho dos pagamentos mensais de prestações da casa própria. Tipicamente, os termos de tais pagamentos estipulam que uma quantidade fixa de dinheiro é paga a cada mês para cobrir os juros, assim como uma parte do montante original, de modo que o total é pago em 30 anos.

Montante inicial: $\boldsymbol{P_0 = P}$

Montante do empréstimo após um mês: $\boldsymbol{P_1 = MP_0 - Y}$***, Y é o pagamento mensal***

Montante do empréstimo após dois meses: $\boldsymbol{P_2 = MP_1 - Y}$

Juros composto: M = 1 + I/12, onde I = 0.06

Para cada $\boldsymbol{t \geq 0}$**:**

$$P_t = PM^t - Y\left(\frac{M^t - 1}{M - 1}\right).$$

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Prova:

$$P_t = PM^t - Y\left(\frac{M^t - 1}{M - 1}\right).$$

Próxima Aula

- Tarefa para trazer na próxima aula em manuscrito: Resolver os exercícios (0.1 ao 0.9) e problemas (0.1 a 0.13) do capítulo de introdução do livro base.
- Próxima aula: Linguagens Regulares e Automatos Finitos