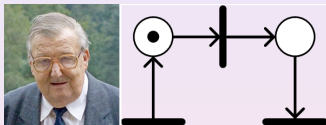


Redes de Petri: Visão Geral

Arianna Z. Olivera Salmon

06/04/2018

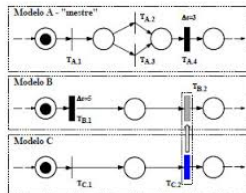
Redes de Petri



- Figuram entre os métodos formais mais usados na modelagem e análise de sistemas discretos concorrentes.
- Criada em 1962 com a tese de doutorado de Carl Adam Petri (*Communication with Automata*).

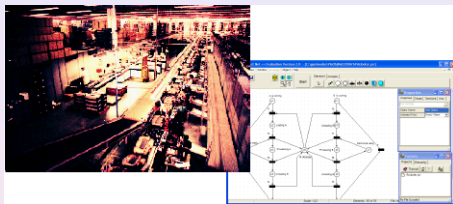
- O formalismo evoluiu juntamente com os métodos de *design* de sistema direcionados a modelos.
- Aumentou o escopo de aplicação
- Foi unificado (ISO/IEC 15.909).

Modelos



- Modelar é produzir uma representação esquemática de um objeto ou sistema capturando suas propriedades mais importantes
- Em Engenharia, a maior parte das vezes um modelo é o ponto de partida para a análise de um artefato que pode ser feita analiticamente ou através de simulação.

Por que construir Modelos?



- Modelos permitem **analisar o sistema e detectar possíveis falhas** antes de sua construção;
- Modelagem é uma **ferramenta de comunicação e documentação**;
- Modelagem é um meio de se **lidar com sistemas complexos**;
- É uma forma de **entender melhor o sistema** que está sendo desenvolvido e ver como mudanças no projeto podem modificar o comportamento do sistema;

Classificação de Sistemas

- A classificação do sistema vai depender tanto da **natureza das variáveis envolvidas** quanto das **especificações do comportamento** desejado para o mesmo;
- Nos sistemas dinâmicos o estado do sistema se modifica ao longo do tempo;
- Atendendo a estes factores os sistemas dinâmicos poderão ser classificados como:

Sistemas de Variáveis Contínuas (SVC)

Sistemas a Eventos Discretos (SED)

Sistemas Híbridos

Sistemas a Eventos Discretos (SED)

No dia a dia do mundo tecnológico em que vivemos, somos cada vez mais dependentes de computadores, o que nos leva as seguintes situações:

- Muitas das quantidades com que lidamos são “discretas” (número de peças produzidas, número de chamadas de telefones ativas, etc.)
- O que gera mudança nos estados de processos são eventos instantâneos (apertar um botão, golpear uma tecla, uma luz de um semáforo é ligada)

Abordagem de **SISTEMAS (DIRIGIDOS) A EVENTOS DISCRETOS**

Sistemas a Eventos Discretos

Sistemas a Eventos Discretos

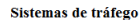
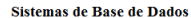
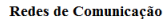
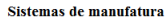
Sistema a eventos discretos (SED) é um sistema dinâmico que evolui de acordo com a ocorrência abrupta de eventos físicos, em intervalos de tempo em geral irregulares e desconhecidos.

Conceito de Estados

- O **Estado** de um sistema num determinado tempo t é dado pelo valor de cada uma das variáveis que o formam no instante de tempo t ;
- O **Espaço de estados** de um sistema está dado então pelo conjunto de todos os estados que o sistema pode atingir.

Arianna Z. Olivera Salmon

- Contém um numero definido e enumerável de estados;
- As transições entre estados são causadas por eventos e ocorrem de forma abrupta;
- O comportamento destes sistemas pode ser descrito por modelos do tipo gráfico de estados;



Sistemas a Eventos Discretos - Exemplos



Sistemas de manufatura Estados: máquina desligada/ligada, peça pronta;
Eventos: robô pega peça, liga máquina.

Redes de Comunicação Estados: linha livre/ocupada, pacote enviado;
Eventos: envia pacote, recebe mensagem.

Sistemas de tráfego Estados: farol ligado/desligado; Eventos: ligar farol,
desligar farol;

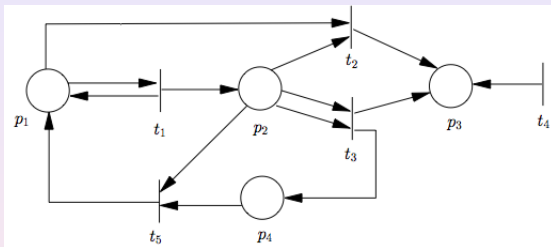
Sistemas de Base de Dados Estados: dado atualizado, transação
completada; Eventos: Apagar dado, copiar dado.

modelos utilizados para SED

Alguns dos principais modelos utilizados para sistemas a eventos discretos são os seguintes:

- Redes de Petri com e sem temporização;
- Cadeias de Markov;
- Teoria das Filas;
- Lógica Temporal e Lógica Temporal de Tempo Real;
- Teoria de Linguagens e Autômatos (Ramadge-Wonham)

Redes de Petri



- Permitem uma representação gráfica;
- São intuitivas e capturam significativa informação estrutural sobre os sistemas que modelam;
- A evolução dos estados nas RdP pode ser formalizada através de operações com matrizes permitindo o uso de técnicas de análise sofisticadas;

Definição formal de rede de Petri

Uma rede de Petri L/T (lugar/transição) é uma 5-tuple, $PN = (P, T, F, W, Mo)$ onde:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares,

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ é um conjunto finito de transições,

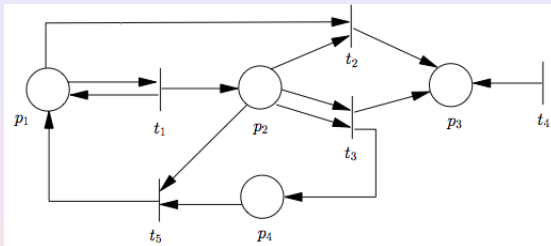
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é um conjunto de arcos (relação de fluxo),

$W : F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ é uma função de peso,

$M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é a marcação inicial,

$P \cap T = \emptyset$ e $P \cup T = \emptyset$.

Exemplo de rede de Petri



Estrutura da rede

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$F = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_2), (p_2, t_3), (p_2, t_3), (p_2, t_5), (p_4, t_5), \\ (t_1, p_1), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_3, p_3), (t_3, p_4), (t_4, p_3), (t_5, p_1)\}$$

Matriz de Incidência

A Matriz de incidência é uma representação matricial da estrutura de uma rede de Petri. Para uma rede de Petri $N = (P, T, F, w)$ a matriz de incidência $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $n \times m$ ($n = |P|$ e $m = |T|$) de inteiros onde cada elemento da matriz e dado por:

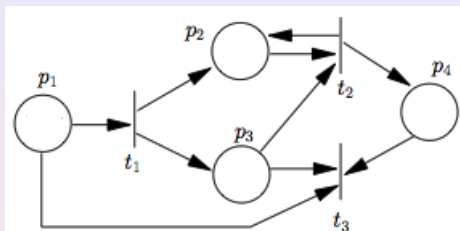
$$a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^-$$

onde $a_{ij}^+ = w(t_j, p_i)$ e $a_{ij}^- = w(p_i, t_j)$

Observações

- Os elementos a_{ij}^- , a_{ij}^+ e a_{ij} representam respectivamente a quantidade de marcas removidas, adicionadas e a diferença de marcas no lugar i quando a transição j é disparada;
- Dependendo do autor a matriz de incidência pode mudar o formato dependendo de como é usada na equação de estados;

Exemplo de matriz de Incidência



Matriz de incidência

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Marcação nas rede de Petri

- As transições $t \in T$ representam os eventos num SED;
- Os lugares descrevem as condições necessárias para que um determinado evento aconteça;
- É necessário um mecanismo que indique quando as condições estão satisfeitas ou não;
- Um *token* ou marca colocada num determinado lugar indica que a condição representada por esse lugar é satisfeita.

Marcação nas rede de Petri

- As transições $t \in T$ representam os eventos num SED;
- Os lugares descrevem as condições necessárias para que um determinado evento aconteça;
- É necessário um mecanismo que indique quando as condições estão satisfeitas ou não;
- Um *token* ou marca colocada num determinado lugar indica que a condição representada por esse lugar é satisfeita.

Definição de marcação

É a forma em que as marcas são distribuídas numa rede de Petri.

Formalmente: Uma marcação M numa rede de Petri $N = (P, T, A, w)$ é uma função: $M : P \rightarrow \mathbb{N}$

Pode ser expressa por um vetor fila $M = [M(p_1), M(p_2), \dots, M(p_n)] \in \mathbb{N}^n$

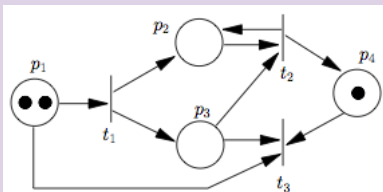
Marcação nas rede de Petri

Rede de Petri marcada

Uma rede de Petri marcada é uma quintupla $N = (P, T, A, w, M)$ onde $N = (P, T, A, w)$ é uma rede de Petri e M é uma marcação.

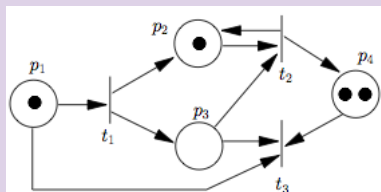
Exemplo de marcações numa rede de Petri

Exemplo 1



$$M = [2, 0, 0, 1]^T$$

Exemplo 2



$$M = [1, 1, 0, 2]^T$$

Dinâmica das redes de Petri

- Os estados são representados por uma marcação e portanto são representados de forma distribuída;
- O mecanismo de transição de estados nas RdP é suportado via movimentação das marcas nos lugares;
- Nas RdP, a mudança de um estado a outro, é feita através do “disparo” de transições;
- Para que uma transição seja “disparada” é necessário que a mesma esteja “habilitada”.

Definição de habilitação

Uma transição $t_j \in T$ numa rede de Petri $N = (P, T, A, w)$ é dita habilitada se:

$$\forall p_i \in I(t_j) \quad M(p_i) \geq w(p_i, t_j)$$

Dinâmica das redes de Petri

Disparo de uma transição

Uma transição $t_j \in T$ de uma rede de Petri marcada $N = (P, T, A, w, M_0)$ pode ser disparada numa marcação M se e somente se a transição t_j está habilitada

$$\forall p_i \in I(t_j) \quad M(p_i) \geq w(p_i, t_j)$$

O disparo da transição t_j leva a uma nova marcação M' onde:

$$M'(p_i) = M(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Equação de estados

$$M_k = M_{k-1} + Au_k \quad k = 1, 2, \dots$$

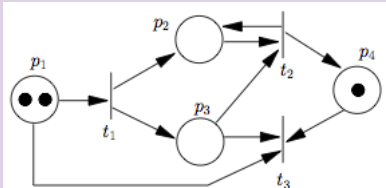
onde u_k é o vetor de disparo. Este vetor define a transição que foi disparada no estado M_{k-1} para atingir o estado M_k

Dinâmica das redes de Petri

Disparando a transição t_1 em $M_0 = [2, 0, 0, 1]^T$

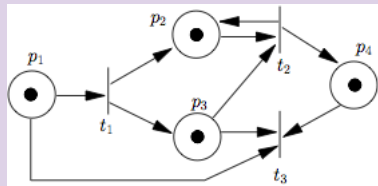
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t_1 está habilitada



$$M_0 = [2, 0, 0, 1]^T$$

Resultado do disparo de t_1 em M_0



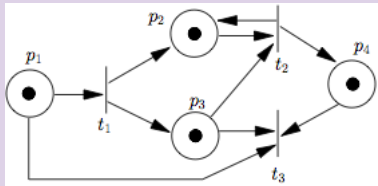
$$M_1 = [1, 1, 1, 1]^T$$

Dinâmica das redes de Petri

Disparando a transição t_1 em $M_1 = [1, 1, 1, 1]^T$

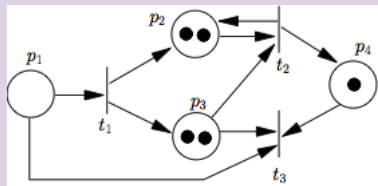
$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t_1, t_2 e t_3 estão habilitadas



$$M_1 = [1, 1, 1, 1]^T$$

Resultado do disparo de t_1 em M_1



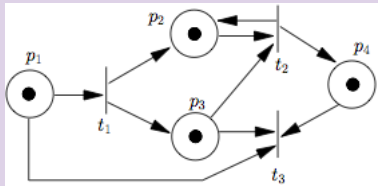
$$M_2 = [0, 2, 2, 1]^T$$

Dinâmica das redes de Petri

Disparando a transição t_3 em $M_1 = [1, 1, 1, 1]^T$

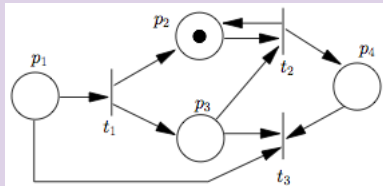
$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t_1, t_2 e t_3 estão habilitadas



$$M_1 = [1, 1, 1, 1]^T$$

Resultado do disparo de t_3 em M_1



$$M_4 = [0, 1, 0, 0]^T$$

Estados alcançáveis

A função de transição de estados $f : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$ de uma rede de Petri (P, T, F, w, M_0) pode ser estendida ao domínio $\mathbb{N}^n \times T^*$ da mesma forma que foi feito para os autômatos:

$$\begin{aligned} f(M_0, \varepsilon) &:= M_0 \\ f(M_0, st) &:= f(f(M_0, s), t) \quad \text{para } s \in T^* \text{ e } t \in T \end{aligned}$$

o simbolo ε é entendido aqui como “nenhuma transição foi disparada”

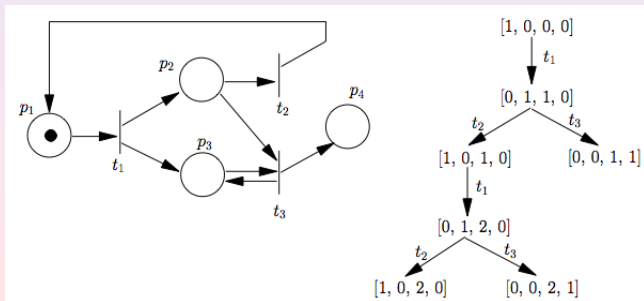
Estados alcançáveis (*Reachable States*)

P conjunto de estados alcançáveis de uma rede de Petri
 $N = (P, T, F, w, M_0)$ é:

$$R[(P, T, F, w, M_0)] := \{M \in \mathbb{N}^n : \exists s \in T^* (f(M_0, s) = M)\}$$

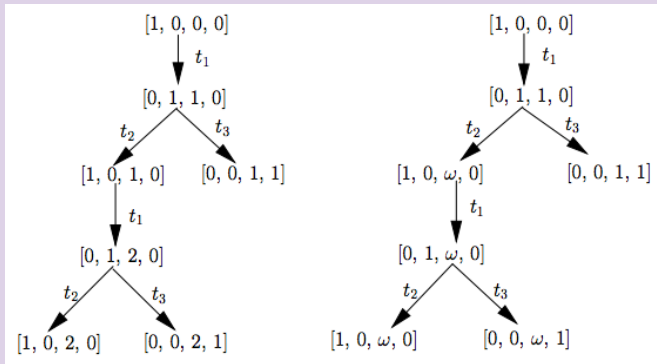
Estados alcançáveis

- A obtenção de todos os estados alcançáveis nem sempre é possível, pois a rede pode conter infinitos estados;
- Existem técnicas para representar alguns destes sistemas com infinitos estados de forma finita;



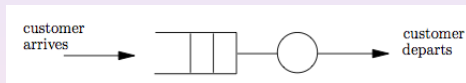
Estados alcançáveis

Construção de árvores de cobertura finitos

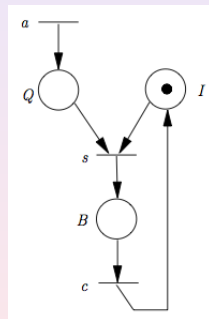


O símbolo w pode ser visto como “infinito” pois representa a marcação de lugares onde a mesma pode aumentar sem limites

Exemplo - Sistema de fila simples



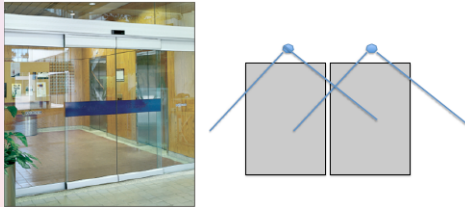
- a* : chegada de usuário;
- s* : começo do serviço;
- c* : fim do serviço;
- d* : saída do usuário;



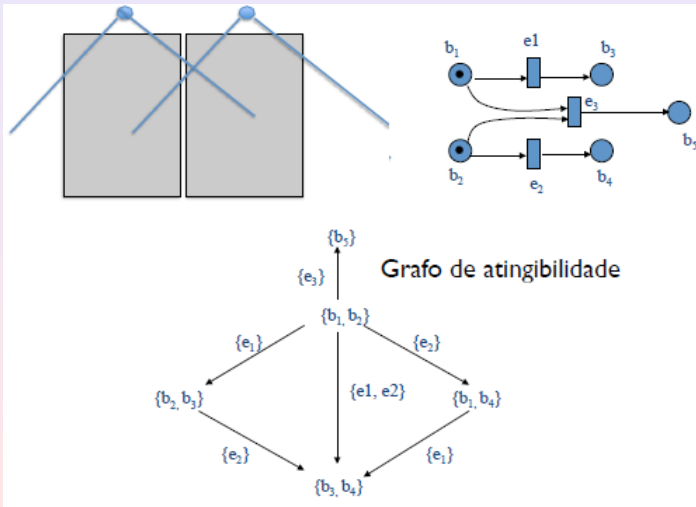
Exemplo - porta automática

Um modelo bastante simples é dado pelo esquema abaixo, onde:

- Cada porta tem um sensor.
- Ao detectar a aproximação de uma pessoa a porta correspondente se abre, ou os dois lados se abrem no caso das duas detectarem simultâneamente a aproximação.



Exemplo - porta automática



Técnicas de análise

Existem vários métodos de análise que podem ser classificados em três grupos:

Enumeração

Enumeração de todas as marcações que podem ser alcançadas desde a marcação inicial.

Desvantagem:

Os grafos podem ser consideravelmente grandes inclusive para sistemas pequenos.

Transformação

Reduzir o sistema modelado preservando as propriedades.

Desvantagem:

As regras de transformação não podem ser aplicadas a todos os modelos.

Análise estrutural

Analisar a estrutura da rede, independentemente da marcação inicial.

Técnicas de análise

Existem vários métodos de análise que podem ser classificados em três grupos:

Enumeração

Enumeração de todas as marcações que podem ser alcançadas desde a marcação inicial.

Desvantagem:

Os grafos podem ser consideravelmente grandes inclusive para sistemas pequenos.

Transformação

Reduzir o sistema modelado preservando as propriedades.

Desvantagem:

As regras de transformação não podem ser aplicadas a todos os modelos.

Análise estrutural

Analisar a estrutura da rede, independentemente da marcação inicial.

Técnicas de análise

Existem vários métodos de análise que podem ser classificados em três grupos:

Enumeração

Enumeração de todas as marcações que podem ser alcançadas desde a marcação inicial.

Desvantagem:

Os grafos podem ser consideravelmente grandes inclusive para sistemas pequenos.

Transformação

Reduzir o sistema modelado preservando as propriedades.

Desvantagem:

As regras de transformação não podem ser aplicadas a todos os modelos.

Análise estrutural

Analisar a estrutura da rede, independentemente da marcação inicial.

Padronização da rede de Petri

Parte I: 15909-1

- Publicada como uma IS , em dezembro de 2004.
- Fornece uma documentação completa da **terminologia**, do **modelo semântico** e das **notações gráficas** para **redes de Petri de alto nível**.

Part2 II- 15909-1

- Publicada em fevereiro de 2011
- Define o **formato de intercâmbio** para modelos de rede de Petri: Petri Net Markup Language (PNML).

Parte III- 15909-3

- Padronização das extensões das redes de Petri: hierarquias, tempo e recursos estocásticos.
- Se encontra ainda em desenvolvimento.

Aplicações das Redes de Petri

Aplicações históricas e Tradicionais das RdP

- Aplicação clássica em SED
- **Engenharia de Software** desde os anos 80

Novas Aplicações das RdP

- Hoje as redes de Petri são aplicadas em um universo ainda mais amplo e muito mais abrangente do que a comunicação entre processos, redes de computadores, etc.
- As novas aplicações mais abrangentes são feitas em sistemas complexos que podem ser associados, por exemplo a sistemas complexos de manufatura, sistemas de automação mais complexos e sistemas biológicos

Exemplo de SED: Ocupação de uma sala

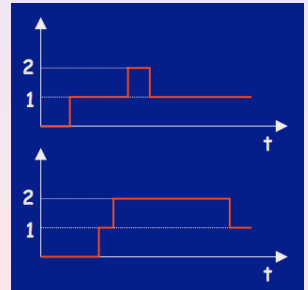
Estado 1: sala vazia
Evento: Entrada de uma pessoa

Estado 2: 1 pessoa na sala
Evento: Entrada de uma pessoa

Estado 3: 2 pessoas na sala
Evento: Saída de uma pessoa

Estado 2: 1 pessoa na sala

Possíveis evoluções ao longo do tempo



Bibliografia básica

- C. G. Cassandras “Discrete Event Systems: Modelling and Performance Analysis”, Springer, 1993.
- R. David, and H. Alla, “Petri Nets & Grafcet: Tools for Modelling Discrete Event Systems”, Prentice-Hall, New York, 1992.
- J. L. Peterson, “Petri Net Theory and the Modeling of Systems”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- T. Murata “Petri nets: Properties, analysis and applications”, Proceedings of the IEEE , 1989.