

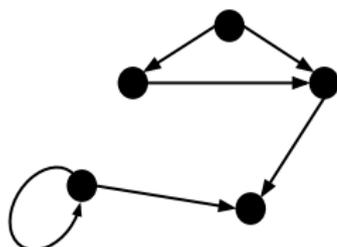
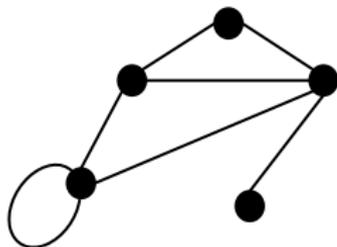
# Grafos

Centro de Informática  
UFPE

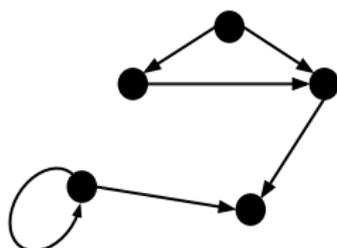
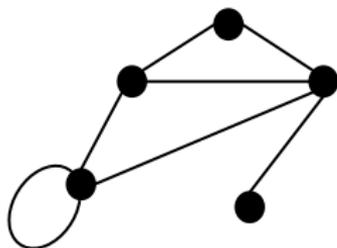
## ① Grafos

## ② Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

- Um **grafo**  $G$  é composto pelo par  $(V, A)$ .
- $V$  é um conjunto **não vazio** de **vértices** ou **nós**.
- $A$  é um conjunto de **arestas**.

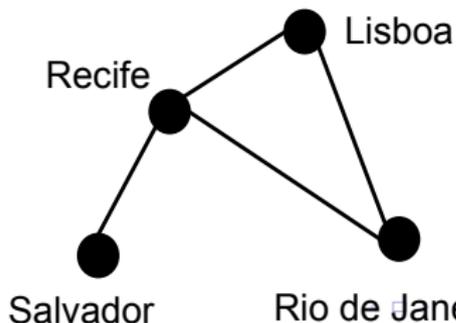


- Um **grafo**  $G$  é composto pelo par  $(V, A)$ .
- $V$  é um conjunto **não vazio** de **vértices** ou **nós**.
- $A$  é um conjunto de **arestas**.
- Cada aresta tem 1 ou 2 vértices associados, chamados de **terminais**.
- Uma aresta conecta seus terminais.



## Grafo simples

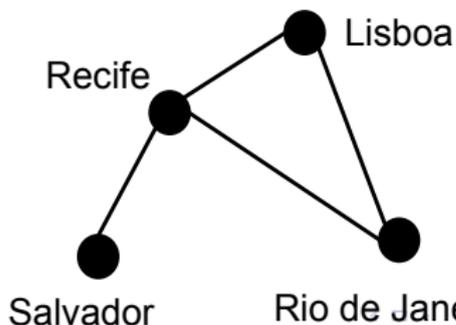
- Não dirigida (sem setas)
- A aresta não dirigida está associada a um conjunto de vértices
- Sem arestas paralelas (no máximo uma aresta por par de vértices)
- Sem laços ou *loops* (sem vértice conectado a ele mesmo)
- Exemplo: voos de ida-e-volta da companhia aérea Golaço:



## Grafo simples

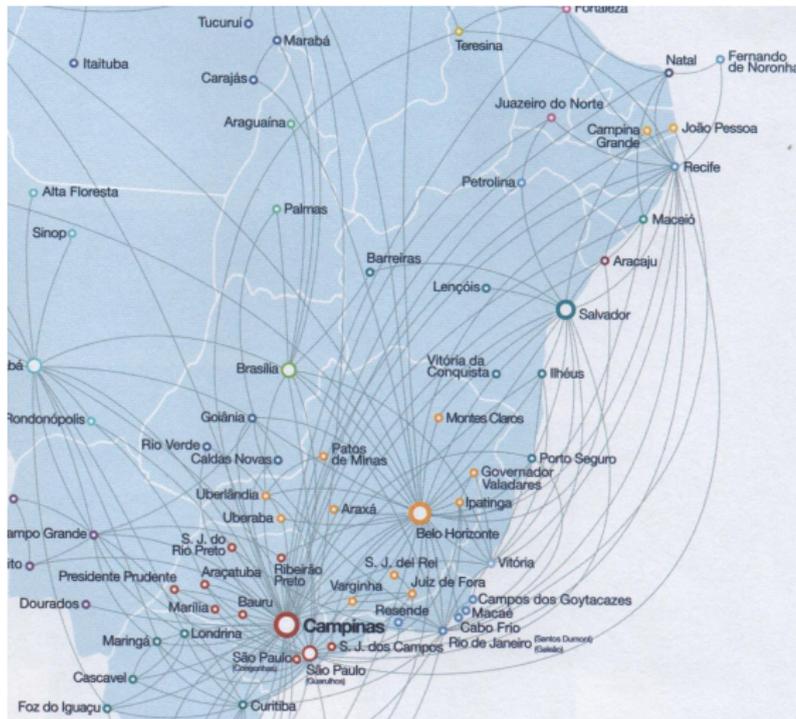
## Exemplo.

- Matematicamente:

$$\left( \{ Recife, Lisboa, Rio de Janeiro, Salvador \}, \right. \\ \left. \{ \{ Recife, Lisboa \}, \right. \\ \left. \{ Lisboa, Rio de Janeiro \} \right. \\ \left. \{ Rio de Janeiro, Recife \}, \right. \\ \left. \{ Recife, Salvador \} \} \right)$$


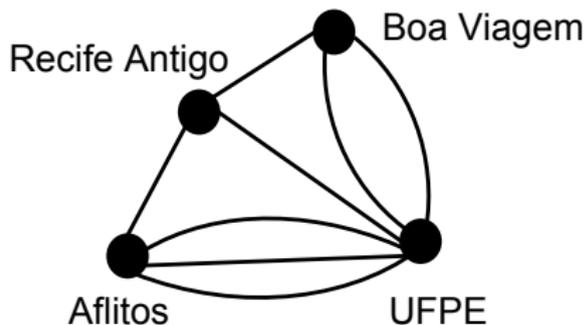
### Grafo simples

### Exemplo.



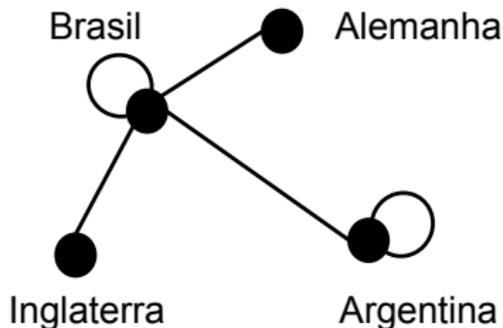
## Multigrafo

- Não dirigida
- Arestas paralelas
- Sem laços
- Exemplo: rotas possíveis entre bairros.  
Dizemos que  $\{UFPE, Aflitos\}$  é uma aresta de **multiplicidade 3**.



## Pseudografo

- Não dirigida
- Arestas paralelas
- Permite laços
- Exemplo. A aresta  $\{x, y\}$  significa que  $x$  fez gol em  $y$  ou  $y$  fez gol em  $x$ . O laço representa um gol contra.



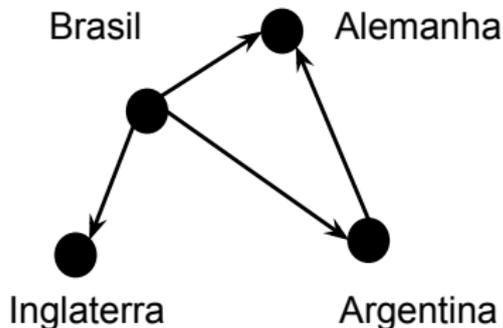
# Grafos

## Grafos e Modelos

- Um **grafo dirigido** ou **dígrafo** é aquele em que cada aresta tem uma direção (seta).
- A aresta dirigida está associada a um par ordenado.
- Dizemos que a aresta  $(u, v)$  começa em  $u$  e termina em  $v$ .

## Grafo dirigido simples

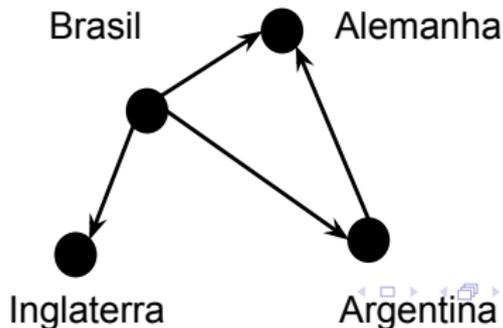
- Dirigido
- Sem arestas paralelas
- Sem laços
- Exemplo. A aresta dirigida  $(x, y)$  significa que  $x$  fez gol em  $y$ .



## Grafo dirigido simples

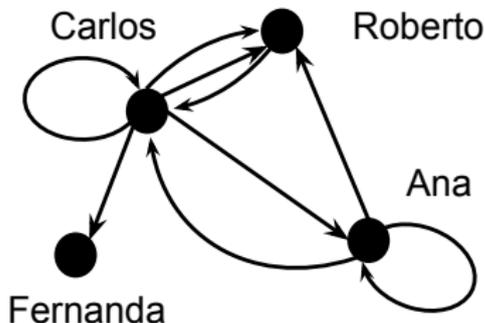
Exemplo.

- Matematicamente:

$$\left( \{ \text{Brasil, Inglaterra, Alemanha, Argentina} \}, \right. \\ \left. \{ (\text{Brasil, Inglaterra}), \right. \\ (\text{Brasil, Alemanha}), \\ (\text{Brasil, Argentina}), \\ \left. (\text{Argentina, Alemanha}) \} \right)$$


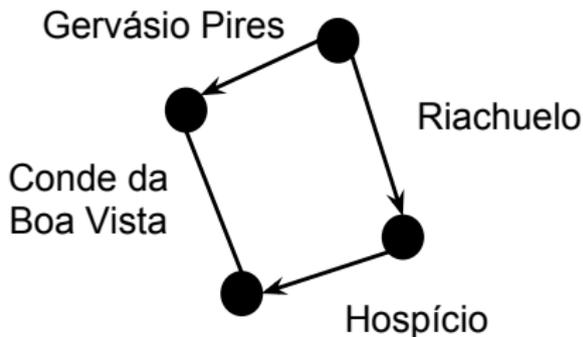
## Multigrafo dirigido

- Dirigido
- Arestas paralelas
- **Permite** laços
- Exemplo. A aresta dirigida  $(x, y)$  significa que  $x$  mandou um email para  $y$ .



## Grafo misto

- Arestas dirigidas e não dirigidas
- Arestas paralelas
- Permite laços
- Exemplo. A aresta  $\{a, b\}$  é uma rua de mão dupla. A aresta  $(a, b)$  é uma rua de mão única (sentido  $a$  para  $b$ ).



# Grafos

## Grafos e Modelos

### Cuidado!

- A classificação (simples, multigrafo, pseudografo, etc) não é padrão!
- Varia de livro para livro.

Exercício. Faça um grafo representando

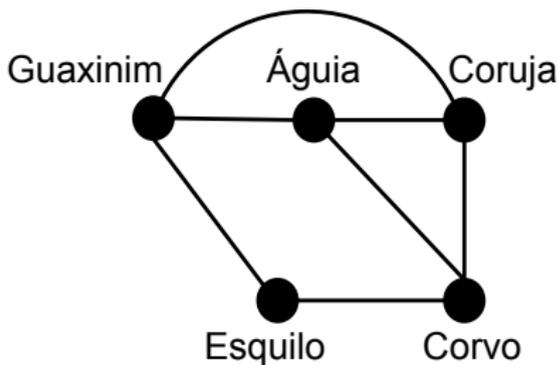
- seus amigos do Orkut (ou Facebook) (cada nó é uma pessoa);
- links entre website (cada nó é um site);
- chamadas de função em um programa (cada nó é uma função);

Exercício. Faça um grafo representando

- seus amigos do Orkut (ou Facebook) (cada nó é uma pessoa);
- links entre website (cada nó é um site);
- chamadas de função em um programa (cada nó é uma função);
- Curiosidade:  
<http://www.cin.ufpe.br/~jmi/md/facebook.jpg>

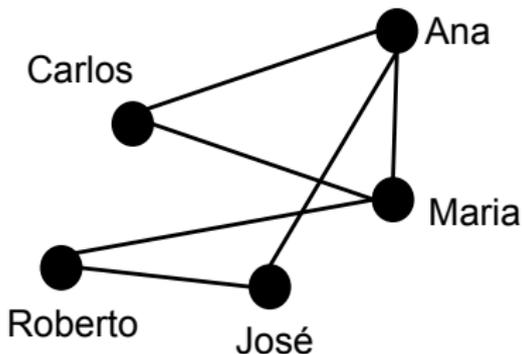
## Grafo de Sobreposição de Nichos Ecológicos

- Cada vértice é uma espécie.
- A aresta  $\{a, b\}$  significa que  $a$  e  $b$  competem pela mesma comida.



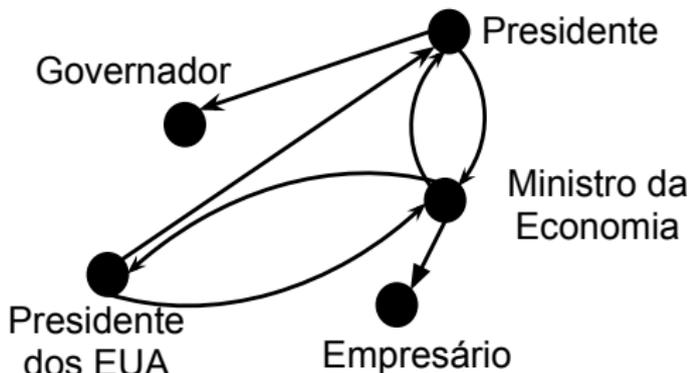
## Rede Social

- Cada vértice é uma pessoa.
- A aresta  $\{a, b\}$  significa que  $a$  conhece  $b$ .
- Quantos vértices tem o grafo que inclui todo mundo?



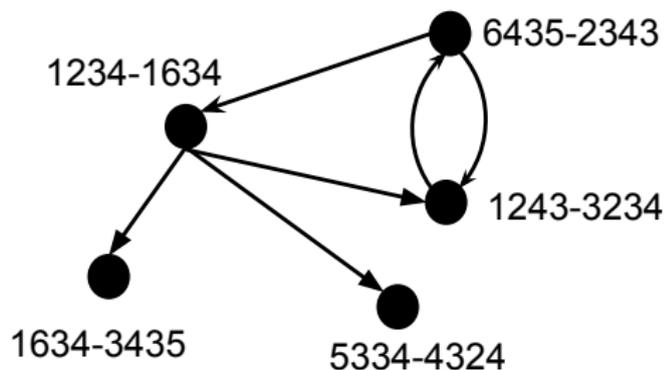
## Rede de Influência

- Cada vértice é uma pessoa.
- A aresta  $(a, b)$  significa que  $a$  influencia  $b$ .



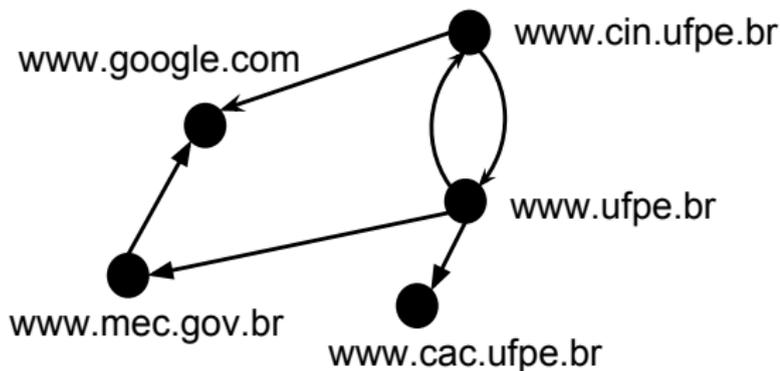
## Grafo de Ligações

- Cada vértice é um telefone.
- A aresta  $(a, b)$  significa que  $a$  ligou para  $b$ .



## Grafo Web

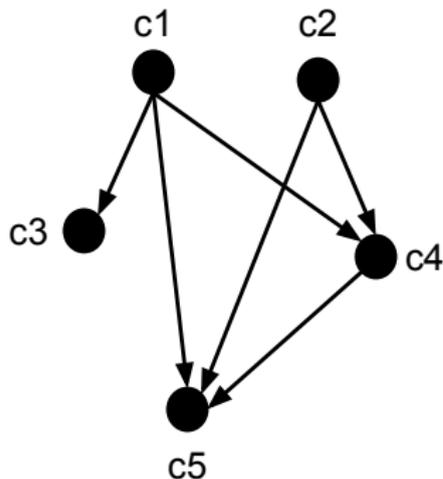
- Cada vértice é um site.
- A aresta  $(a, b)$  significa que o site  $a$  tem um link para o site  $b$ .



## Grafo de Precedência

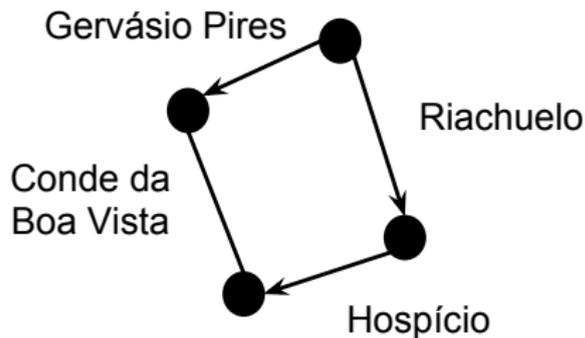
- Cada vértice é um comando de um programa.
- A aresta  $(a, b)$  significa que o comando  $a$  tem ser executado **antes** do comando  $b$ .

```
a = 0; // c1  
b = 1; // c2  
c = a + 1; // c3  
d = b + a; // c4  
e = d + 1; // c5
```



## Mapa de Rua

- Cada vértice é uma esquina.
- A aresta  $\{a, b\}$  é uma rua de mão-dupla.
- A aresta  $(a, b)$  é uma rua de mão única, sentido  $a$  para  $b$ .



# Exercícios recomendados

## Seção 9.1

- Fazer todos
- Discrete Mathematics and Its Applications  
Kenneth Rosen, 6a edição

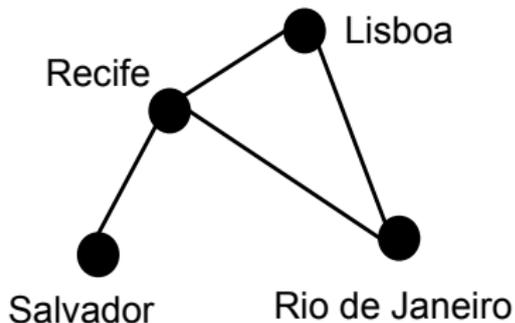
## ① Grafos

## ② Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

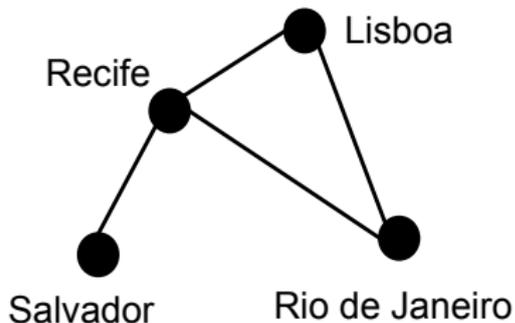
- Seja  $G$  um grafo não dirigido.
- Os vértices  $u$  e  $v$  são **adjacentes** se eles são os terminais de uma aresta.



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

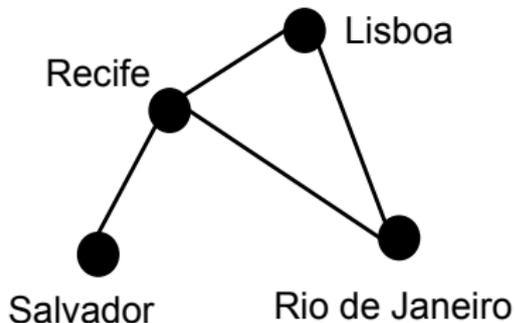
- Seja  $G$  um grafo não dirigido.
- Os vértices  $u$  e  $v$  são **adjacentes** se eles são os terminais de uma aresta.
- Quais são os vértices adjacentes abaixo?



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

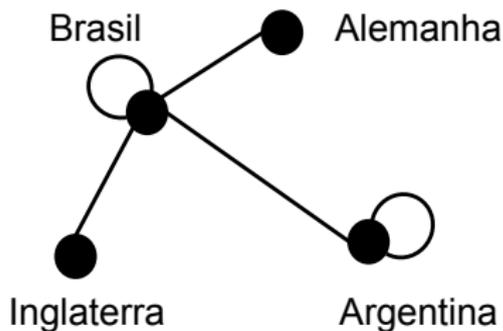
- Seja  $G$  um grafo não dirigido.
- Se uma aresta **conecta** 2 vértices  $\{u, v\}$ , dizemos que a aresta é **incidente** aos vértices.



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

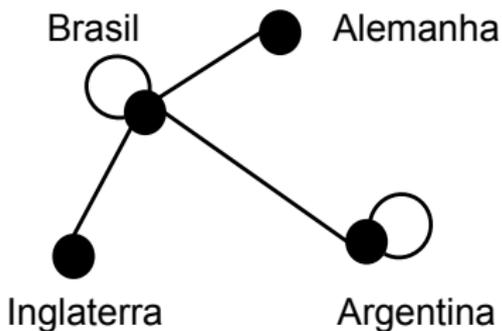
- Seja  $G$  um grafo não dirigido.
- O **grau** de um vértice é seu número de arestas incidentes.
- Laços têm grau 2.
- Notação:  $deg(a)$  (do inglês: *degree*)



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

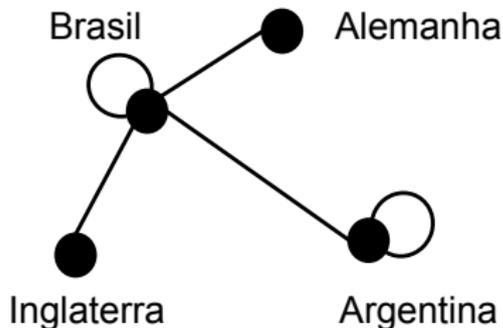
- Seja  $G$  um grafo não dirigido.
- O **grau** de um vértice é seu número de arestas incidentes.
- Laços têm grau 2.
- Notação:  $deg(a)$  (do inglês: *degree*)
- Qual o grau dos vértices abaixo?



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

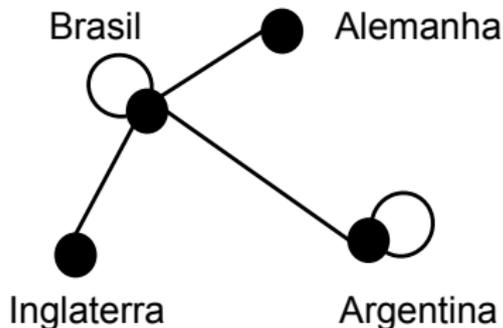
- Seja  $G$  um grafo não dirigido.
- Um vértice de grau 0 é chamado de **isolado**.
- Um vértice de grau 1 é chamado de **pendente**.



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

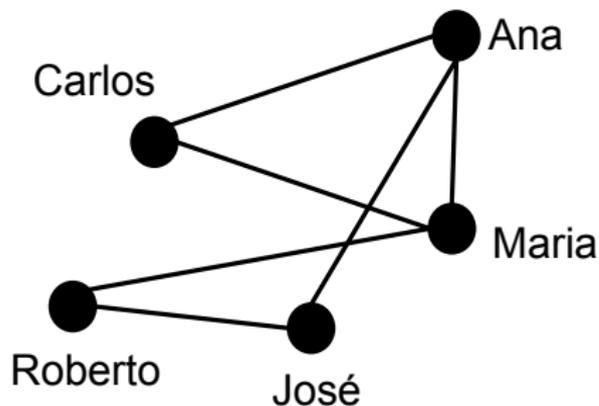
- Seja  $G$  um grafo não dirigido.
- Um vértice de grau 0 é chamado de **isolado**.
- Um vértice de grau 1 é chamado de **pendente**.
- Quais os vértices pendentes e isolados no grafo abaixo?



# Terminologia Básica

## Exercício.

- O que o grau de um vértice representa em um grafo como abaixo (de Rede Social)?
- O que vértices isolados representam? É possível existir vértices isolados no Facebook?
- O que vértices pendentos representam?



# Terminologia Básica

## Exercício.

- Suponha um grafo cujos nós são maratonistas e cuja aresta que liga  $a$  a  $b$  indica que  $a$  ganhou de  $b$  em exatamente uma maratona específica do passado. Por exemplo, se *Fulano* ganhou de *Sicrano* na maratona do Rio de 2009, então teremos uma aresta ligando *Fulano* a *Sicrano*.
  - Este grafo é dirigido ou não-dirigido?
  - O que arestas paralelas representam neste grafo?
  - Este grafo tem laços?

# Terminologia Básica

## Exercício.

- Suponha um grafo cujos nós são atores ou atrizes e cujas arestas ligam dois atores ou atrizes que atuaram juntos em um mesmo filme.
  - Este grafo é dirigido ou não-dirigido?
  - O que arestas paralelas representam neste grafo?
  - Este grafo tem laços?
  - Um nó deste grafo tem grau 1230. O que isto quer dizer?

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

### Teorema do Aperto de Mãos

- Seja  $G = (V, A)$  um grafo não dirigido. Então

$$2|A| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

### Teorema do Aperto de Mãos

- Seja  $G = (V, A)$  um grafo não dirigido. Então

$$2|A| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

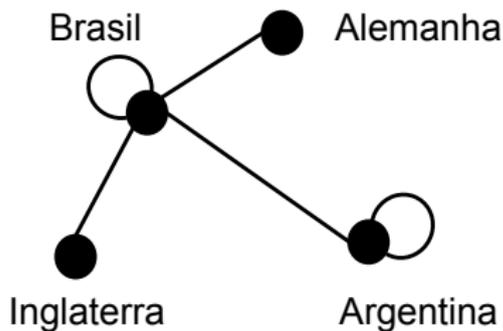
- Por que?
  - Cada aresta incide sobre 2 vértices.
  - Cada aresta contribui com  $1 + 1$  na soma dos graus.
  - Então, a soma dos graus é o dobro do número de arestas.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

### Exercício.

- Calcule a soma dos graus do grafo abaixo.
- Compare este número com a quantidade de arestas.



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

Teorema.

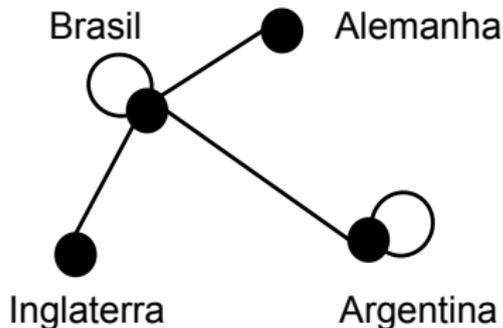
- Um grafo não dirigido possui um número par de vértices de grau ímpar.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

Teorema.

- Um grafo não dirigido possui um número par de vértices de grau ímpar.
- Verifique esta propriedade para o grafo abaixo.



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

- Seja  $G = (V, A)$  um **grafo dirigido**.
- Dada a aresta  $(u, v)$ , dizemos que
  - $u$  e  $v$  são **adjacentes**
  - $u$  é o **vértice inicial** de  $(u, v)$
  - $v$  é o **vértice terminal ou final** de  $(u, v)$
- Note que os vértices inicial ou final de um laço são os mesmos. Exemplo,  $(u, u)$  é um laço. O vértice inicial é  $u$  e o final,  $u$  também.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

- Seja  $G = (V, A)$  um **grafo dirigido**.
- Seja  $v$  um vértice.
- O **grau de entrada**  $\deg^{-}(v)$  é o número de arestas que apontam para  $v$ .
- O **grau de saída**  $\deg^{+}(v)$  é o número de arestas que partem de  $v$ .

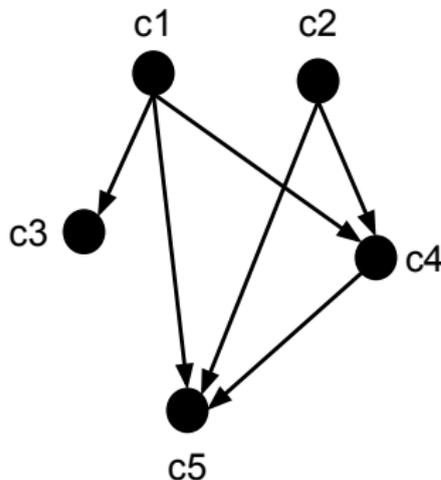
# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

### Exercício.

- Calcule  $deg^-(v)$  e  $deg^+(v)$  para cada vértice  $v$  do grafo abaixo.

$a = 0$ ; //  $c_1$   
 $b = 1$ ; //  $c_2$   
 $c = a + 1$ ; //  $c_3$   
 $d = b + a$ ; //  $c_4$   
 $e = d + 1$ ; //  $c_5$



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Terminologia Básica

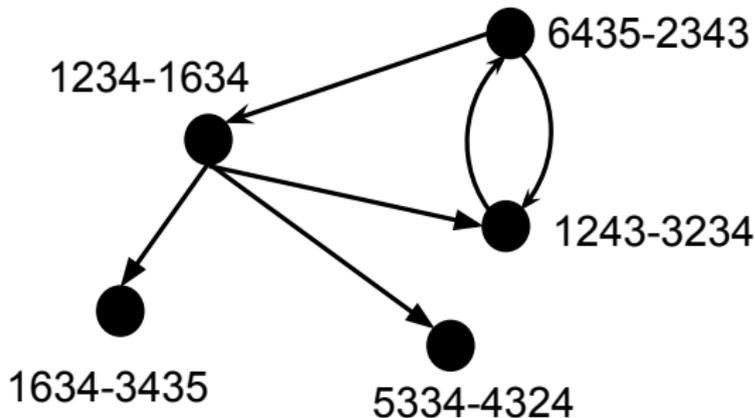
Teorema.

- Seja  $G = (V, A)$  um grafo **grafo dirigido**.
- $$\sum_{v \in V} \text{deg}^-(v) = \sum_{v \in V} \text{deg}^+(v) = |A|$$

# Terminologia Básica

## Exercício.

- O que o grau de saída de um vértice representa em um grafo como abaixo (de ligação telefônica)?
- O que o grau de entrada de um vértice representa?
- Que pacotes de promoção são mais adequados para vértices com alto grau de entrada e baixo grau de saída?
- E para vértices com baixo grau de entrada e alto grau de saída?



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Alguns Grafos Simples

$K_n$ : Grafos Completos de  $n$  Vértices

- Cada vértice está conectado a outro vértice (distinto) por exatamente 1 aresta

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Alguns Grafos Simples

$C_n$ : Ciclos de  $n$  Vértices

- Sejam  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$  os vértices do grafo.
- O ciclo de  $n$  vértices possui as arestas

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$$

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Alguns Grafos Simples

$W_n$ : Rodas (*Wheels*) de  $n + 1$  Vértices

- Uma roda  $W_n$  é um ciclo  $C_n$  com um vértice a mais.
- Tal vértice conecta-se a todos os demais vértices.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Alguns Grafos Simples

$Q_n$ : Hipercubo de  $n$  Dimensões

- Cada vértice é uma cadeia de  $n$  bits.
- 2 vértices são adjacentes se, e somente se, eles diferem em apenas 1 bit.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

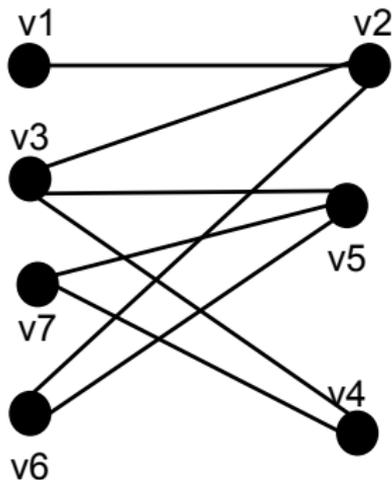
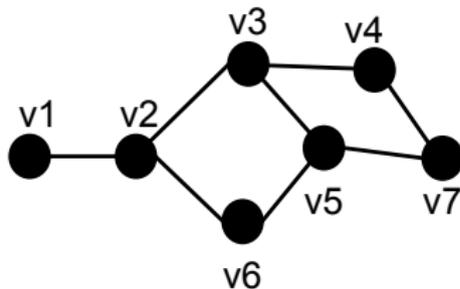
### Grafos Bipartidos

- Seja  $G = (V, A)$  um grafo simples.
- $V$  pode ser particionado em 2 conjuntos  $V_1$  e  $V_2$ , tal que
  - $V = V_1 \cup V_2$
  - $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- Vértices em  $V_1$  conectam-se apenas a vértices em  $V_2$  (e vice-versa)

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

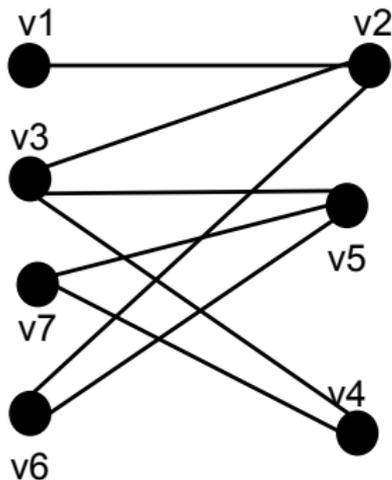
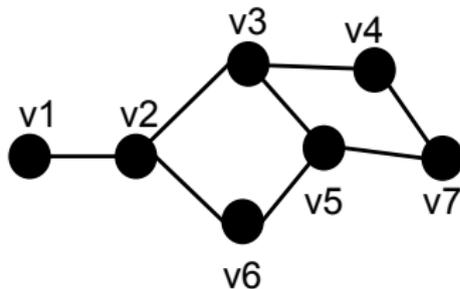
### Grafos Bipartidos: Exemplo



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

Grafos Bipartidos: Como saber se um grafo é bipartido?



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

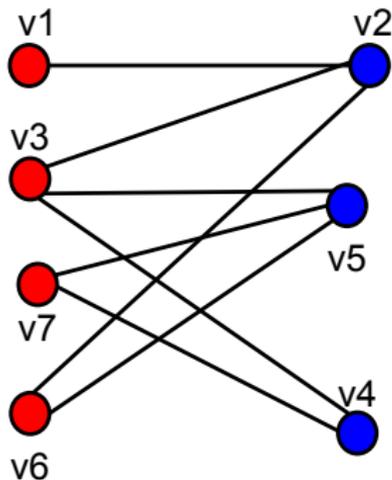
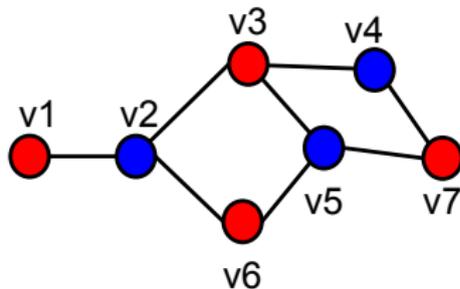
Teorema.

- Um grafo é bipartido se, e somente se, for possível pintar os vértices em 2 cores de tal forma que
  - Vértices adjacentes não possuam a mesma cor.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

### Grafos Bipartidos: Exemplo

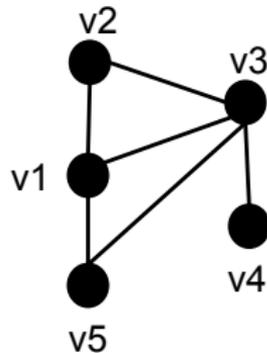
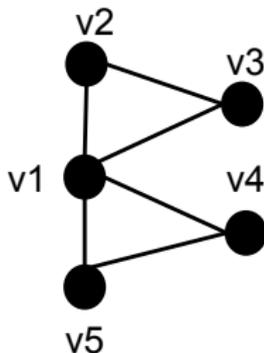
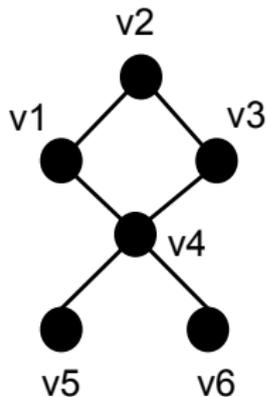


# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

### Exercício

Quais dos grafos abaixo são bipartido?



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

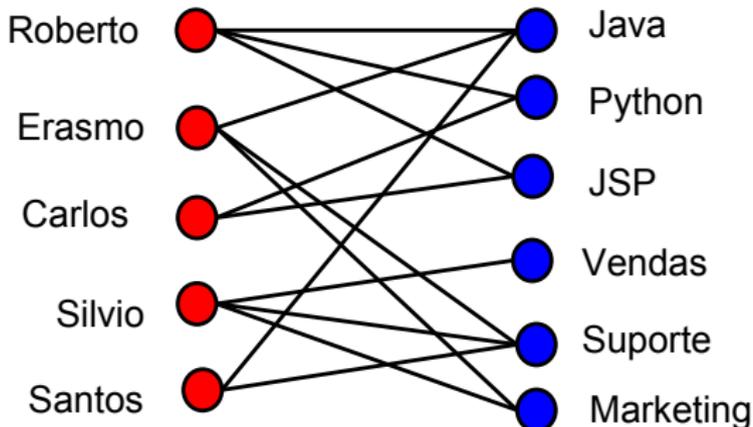
### Exercício.

- Uma empresa tem 5 funcionários: Roberto, Erasmo, Carlos, Silvio e Santos.
- Roberto entende de Java, Python e JSP.
- Erasmo entende de Java, marketing, suporte.
- Carlos entende de Python e JSP.
- Silvio entende de marketing, vendas e suporte.
- Santos entende de suporte e Java.
- Desenhe um grafo bipartido (funcionários em um time e obrigações em outro) que mostre as capacidades de cada funcionário.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Bipartidos

Resposta.

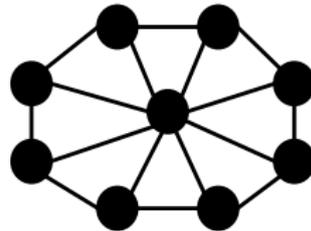
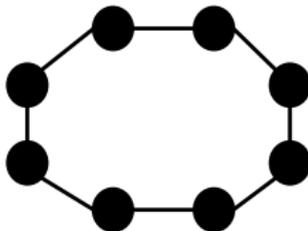
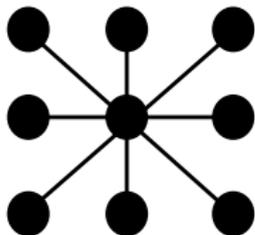


# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Topologia de Redes

- Computadores em uma empresa, universidade, escola, etc. se conectam em alguma estrutura, chamada **topologia**.
- Topologias são representadas por grafos
- Abaixo, temos: topologia estrela, anel ou híbrido.

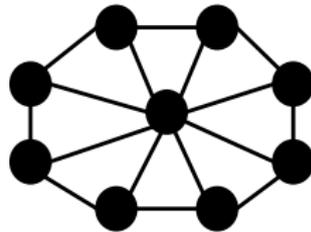
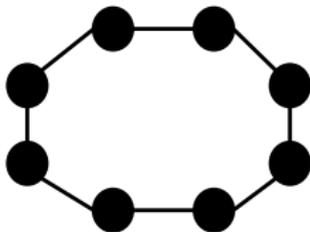
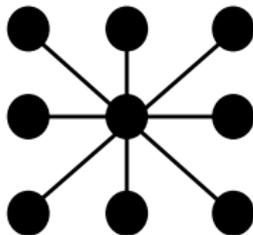


# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Topologia de Redes

- Exercício. Quais as vantagens e desvantagens de cada topologia?

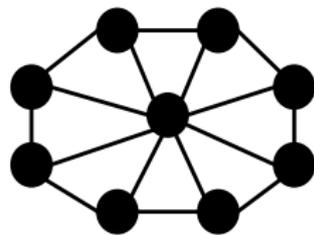
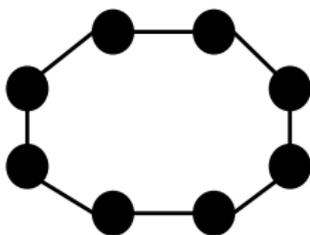
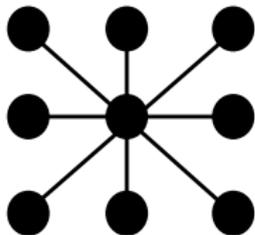


# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Topologia de Redes

- Exercício. Como cada grafo abaixo pode ser classificado ( $K_n$ ,  $C_n$ ,  $W_n$ ,  $Q_n$ , bipartido)?



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Computação Paralela

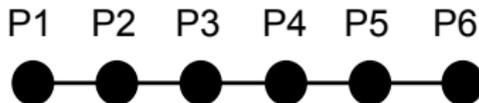
- Um computador pode ter vários processadores computando ao mesmo tempo (em **paralelo**)
- Cada processador comunica-se com os demais
- Comunicação de todo mundo com todo mundo (grafos  $K_n$ ) é inviável: por exemplo, 64 processadores ia exigir 63 conexões para cada processador.

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Computação Paralela

- Array linear
  - Vantagem: pouca conexão com vizinhos (no máximo 2 conexões)

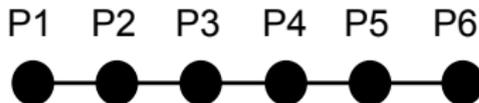


# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Computação Paralela

- Array linear
  - Vantagem: pouca conexão com vizinhos (no máximo 2 conexões)
  - Exercício. Quais são as desvantagens?

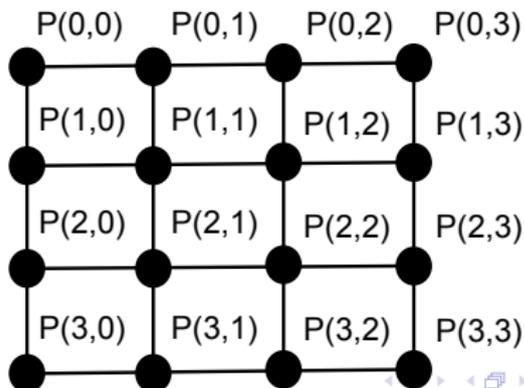


# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Computação Paralela

- Mesh
  - O número de processadores forma um quadrado perfeito
  - Vantagens: requer menos processadores intermediários que o array linear
  - Desvantagens: custo mais alto, configuração e manutenção mais difícil



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Computação Paralela

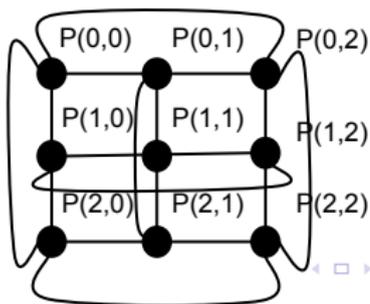
- Mesh
  - Exercício
  - Desenhe o grafo de uma variação do mesh definido abaixo.
  - O processador  $P(i, j)$  está conectado a 4 processadores:  
 $P(i+1 \bmod m, j)$   
 $P(i-1 \bmod m, j)$   
 $P(i, j+1 \bmod m)$   
 $P(i, j-1 \bmod m)$ ,  
onde  $m = 3$ ,  $0 \leq i \leq (m - 1)$  e  $0 \leq j \leq (m - 1)$ .

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Computação Paralela

- Mesh
  - Exercício.
  - Desenhe o grafo de uma variação do mesh definido abaixo.
  - O processador  $P(i, j)$  está conectado a 4 processadores:
    - $P(i+1 \bmod m, j)$
    - $P(i-1 \bmod m, j)$
    - $P(i, j+1 \bmod m)$
    - $P(i, j-1 \bmod m)$ ,
 onde  $m = 3$ ,  $0 \leq i \leq (m - 1)$  e  $0 \leq j \leq (m - 1)$ .



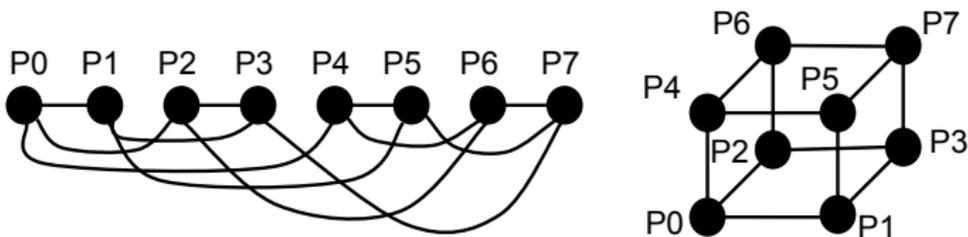
# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

### Computação Paralela

- Hiper cubo

- O número de processadores é uma potência de 2,  $n = 2^m$ .
- Vantagem: equilíbrio entre o número de conexões e de processadores intermediários
- Desvantagem: número de processadores tem que ser potências de 2.



# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

<http://g1.globo.com/fantastico/noticia/2013/09/veja-os-documentos-ultrassecretos-que-comprovam-espionagem-dilma.html>

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

### Subgrafo

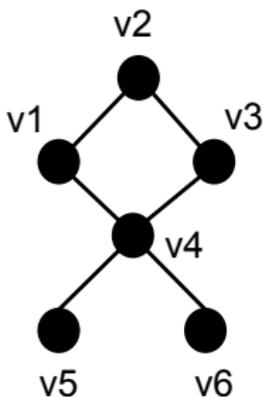
- Um **subgrafo** de  $G = (V, A)$  é um grafo  $H = (W, F)$  tal que  $W \subseteq V$  e  $F \subseteq A$ .

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

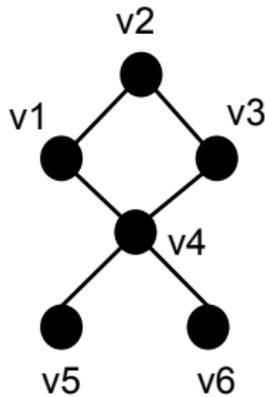
## Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

### Subgrafo

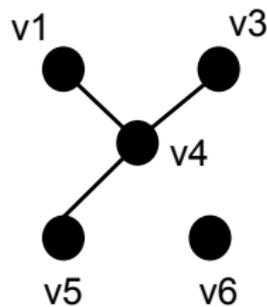
- Um **subgrafo** de  $G = (V, A)$  é um grafo  $H = (W, F)$  tal que  $W \subseteq V$  e  $F \subseteq A$ .



G



Subgrafo de G



Outro subgrafo de G

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

### Subgrafo

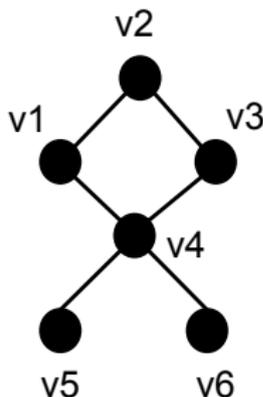
- Um **subgrafo próprio** de  $G = (V, A)$  é um grafo  $H = (W, F)$  tal que  $W \subset V$  e  $F \subset A$ .

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

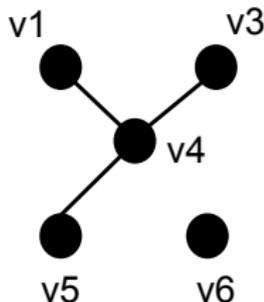
## Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

### Subgrafo

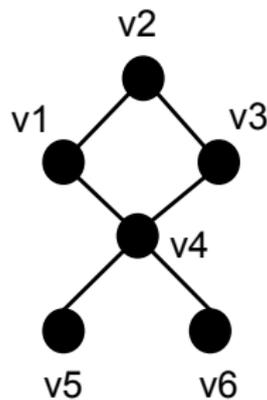
- Um **subgrafo próprio** de  $G = (V, A)$  é um grafo  $H = (W, F)$  tal que  $W \subset V$  e  $F \subset A$ .



G



Subgrafo próprio de G

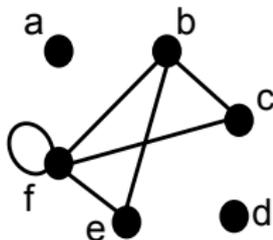
NÃO é subgrafo  
próprio de G

# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

### Subgrafo

- Um **subgrafo próprio** de  $G = (V, A)$  é um grafo  $H = (W, F)$  tal que  $W \subset V$  e  $F \subset A$ .
- Exercício. Desenhe um sub-grafo próprio do grafo abaixo que seja bipartido.

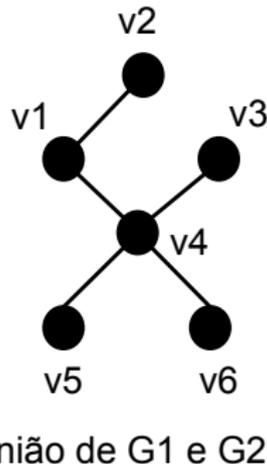
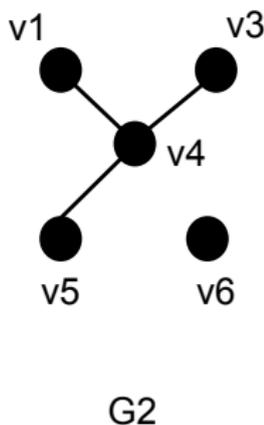
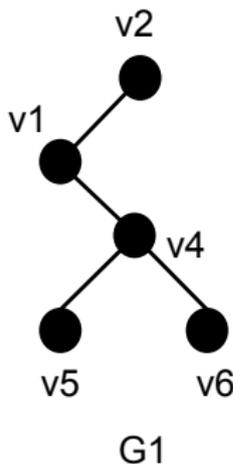


# Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

## Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

### União de Grafos

- Sejam  $G_1 = (V_1, A_1)$  e  $G_2 = (V_2, A_2)$  grafos simples.
- A **união** de  $G_1$  e  $G_2$  é o grafo  $(V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$ .



# Exercícios recomendados

## Seção 9.2

- No mínimo do 1 ao 28
- Discrete Mathematics and Its Applications  
Kenneth Rosen, 6a edição