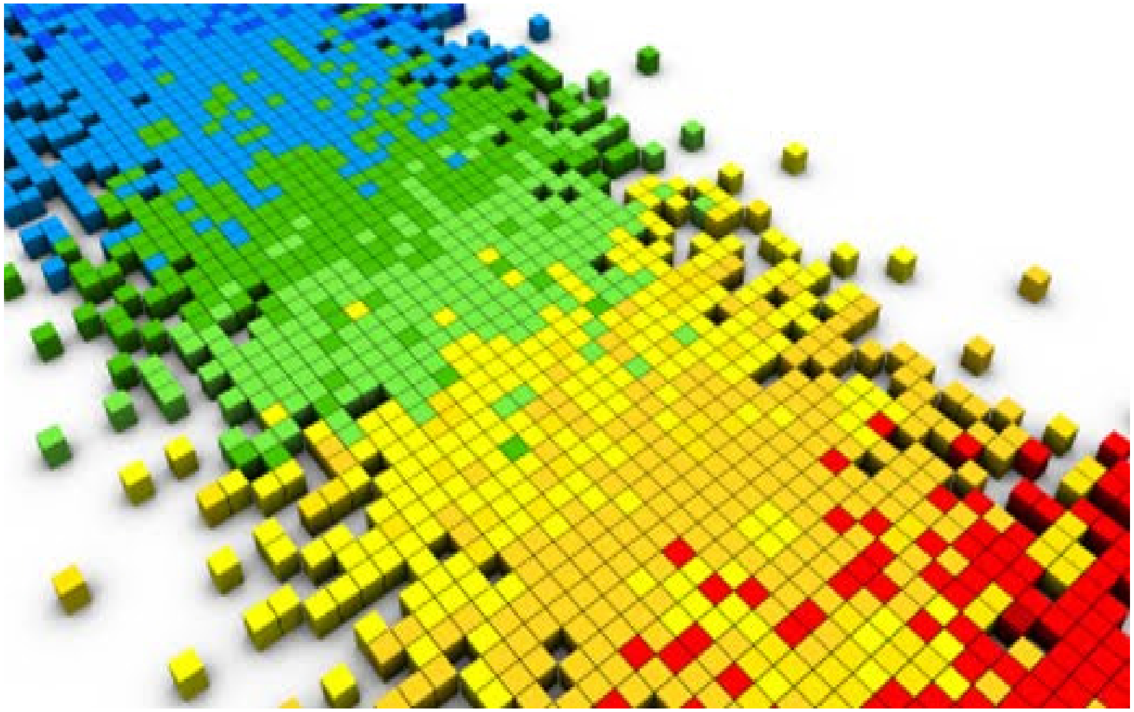


Cálculo Numérico

Prof. Guilherme Amorim

17/07/2014

Aula 22 – Interpolação e Integração Numérica - Exercícios

UFPE
Centro de Informática U·F·P·E

Exercício Prova 2012.1

Questão 3 (1,0 ponto) Determine o **menor número de subintervalos** para que, usando o **método de Simpson**, tenha-se certeza de um erro menor que 10^{-4}, para $\int_0^1 \left[e^x + \frac{x^5}{5}\right] dx$.

$$|T_S| \leq \frac{n h^5}{180} M_4$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{n}{n^5 \cdot 180} \cdot 26{,}71828 < 10^{-4}$$

$$n^4 > 1484{,}348$$

$$n > 6{,}2 \Rightarrow \underline{n > 7}$$

$$f(x) = e^x + \frac{x^5}{5}$$

$$f'(x) = e^x + \frac{5x^4}{5} = e^x + x^4$$

$$f''(x) = e^x + 4x^3$$

$$f'''(x) = e^x + 12x^2$$

$$f^{(iv)}(x) = e^x + 24x$$

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(iv)}(x)| = e^1 + 24 \cdot 1 \approx 26{,}71828$$

Exercício 9 Cap. 5

9. De uma função f obteve-se a tabela

x_i	-1	1	3
$f(x_i)$	-4	a	b

Ache o polinômio interpolador de f, que é do primeiro grau, relativamente aos pontos tabelados, sabendo-se que $a + b = 1$.

9)

x_i	-1	1	3
$f(x_i)$	-4	a	b

$$f(x_0, x_1) = \frac{a+4}{2} \qquad f(x_1, x_2) = \frac{b-a}{2}$$

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2)$$

$$= -4 + (x+1) \cdot \left(\frac{a+4}{1+1} \right) + (x+1)(x-1) \cdot \left[\frac{\frac{b-a}{2} - \frac{a+4}{2}}{4} \right]$$

Exercício 9 Cap. 5

$$= -4 + (x+1)\left(\frac{a+4}{2}\right) + (x+1)(x-1)\cdot\left(\frac{b-2a-4}{8}\right)$$

$$\frac{b-2a-4}{8} = 0 \Rightarrow b-2a=4$$

e

$$a+b=1$$

$$\Downarrow$$

$$b = 1-a$$

logo $1-a-2a=4$

$$-3a=3$$

$$\boxed{a=-1}$$

$$= -4 + x+1\left(\frac{-1+4}{2}\right)$$

$$= -4 + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}$$

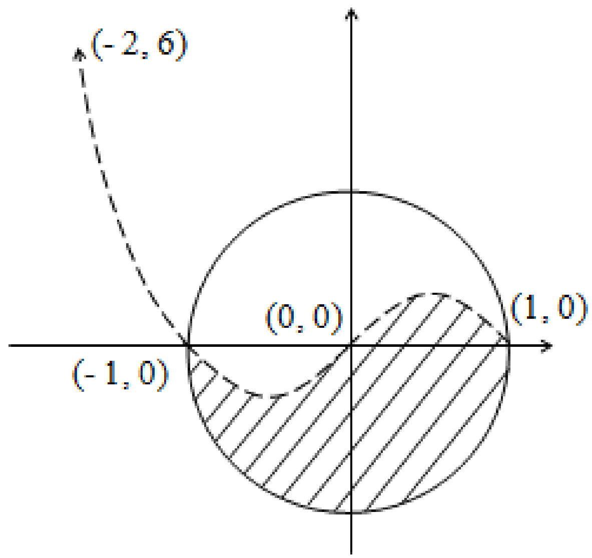
$$\boxed{P_2(x) = \frac{3x}{2} - \frac{5}{2}}$$

✓

Exercício de Prova 2010.2

1º) Determine o valor aproximado da área hachurada (ver figura) compreendida entre a circunferência $\boldsymbol{C}$ e a função $\boldsymbol{f}$. Use para tal um método numérico adequado. Considere 6 pontos do intervalo de integração e 4 casas decimais.

(4 pontos)



Exercício de Prova 2010.2 – Resp.

1º) Do gráfico obtemos (correspondente a função tracejada):

x_i	-2	-1	0	1
$g(x_i)$	6	0	0	0

Usando interpolação polinomial temos que $g(x) \approx P(x) = -x^3 + x$. Da circunferência vem, $y = \pm(1 - x^2)^{½}$. Logo, a área solicitada será dada por:

$$\int_{-1}^{1} -x^3 + x + \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

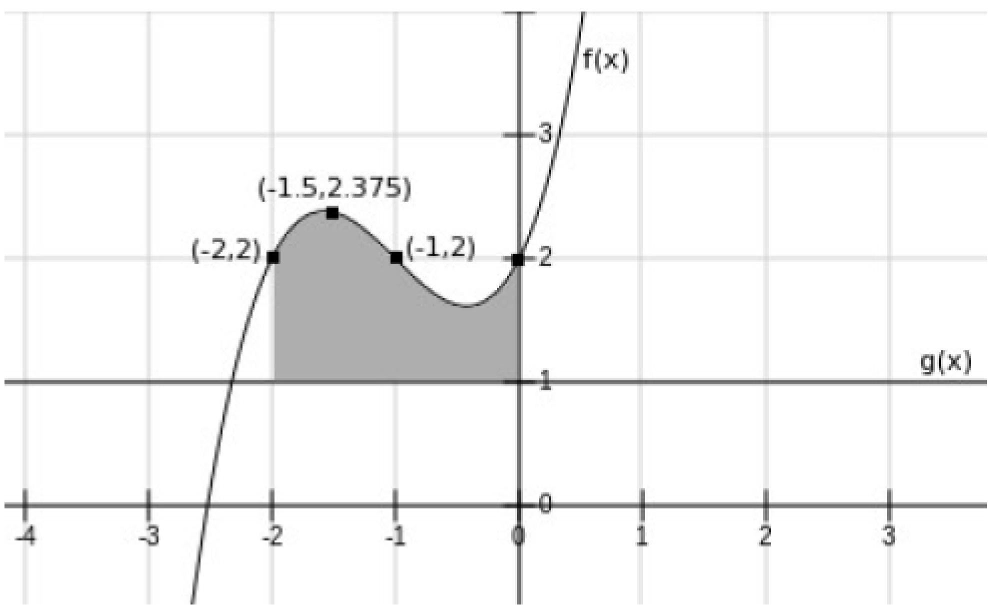
x	$f(x)$
-1,000	0,000
-0,600	0,416
-0,200	0,788
0,200	1,172
0,600	1,184
1,000	0,000

h = 0,4
E = 0,000
P = 1,972
I = 1,588

Trapézios
Área ≈ 1,424 u.a.

Exercício de Prova 2013.1

2º) Determine o valor aproximado da área cinza (ver figura ao lado) entre a função f(x) e a função $g(x) = 1$. Use para tal um método numérico adequado. Considere 6 pontos do intervalo de integração e 4 casas decimais. Na resolução, aproxime f(x) pelo seu polinômio interpolador, obtido a partir dos 4 pontos destacados no gráfico. (3,5 pontos)



Exercício de Prova 2013.1 – Resp.

2º) Vamos inicialmente aproximar $f(x)$ por seu polinômio interpolador $P(x)$, calculado a partir dos 4 pontos destacados no gráfico. Note que os pontos não são equidistantes, logo não é possível utilizar o método de Gregory-Newton. Usaremos então o método de Newton:

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	-2	2	$\frac{2.375-2}{-1.5+2}=0.75$	$\frac{-0.75-0.75}{-1+2}=-1.5$	$\frac{0.5+1.5}{0+2}=1$
1	-1.5	2.375	$\frac{2-2.375}{-1+1.5}=-0.75$	$\frac{0+0.75}{0+1.5}=0.5$	-
2	-1	2	$\frac{2-2}{0+1}=0$	-	-
3	0	2	-	-	-

Assim, temos que:

$$P(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

Exercício de Prova 2013.1 – Resp.

$\rightarrow P(x)=2+(x+2)0.75+(x+2)(x+1.5)(-1.5)+(x+2)(x+1.5)(x+1)1$

$\rightarrow P(x)=2+0.75x+1.5-1.5x^2-2.25x-3x-4.5+x^3+3.5x^2+3x+x^2+3.5x+3$

$\rightarrow P(x)=x^3+3x^2+2x+2$

Agora partindo para calcular numericamente a integral, temos que o intervalo de integração (fornecido) é [-2, 0]. Com 6 pontos, não podemos usar o método de Simpson, pois para tal precisamos ter um número de pontos ímpar (e superior a três). Como desejamos usar um número de pontos par (seis), aplicaremos o método dos trapézios. Como qualquer método de Newton-Cotes, o método dos trapézios necessita de que os pontos usados sejam equidistantes, e temos que fazer x_0 = -2 e x_5 = 0. O espaçamento entre os pontos (h) é então (0 + 2)/5 = 0.4 .

Note que a região solicitada pode ser obtida fazendo $\int_{-2}^{0} x^3+3x^2+2x+1\,dx$ (de $\int_{-2}^{0} P(x)-g(x)\,dx$).

Exercício de Prova 2013.1 – Resp.

Obtendo os valores dos 6 pontos, temos:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-2	1
1	-1.6	1.384
2	-1.2	1.192
3	-0.8	0.808
4	-0.4	0.616
5	0	1

Usando a fórmula que deduzimos para o método dos trapézios, $\int_a^b f(x)\,dx \cong h\left[\frac{E}{2}+I+P\right]$, temos que: $\int_{-2}^{0} x^3+3x^2+2x+1\,dx \simeq 0.4\left[\frac{2}{2}+1.384+0.808+1.192+0.616\right]=2$ .Logo, a área cinza tem aproximadamente 2 u.a.