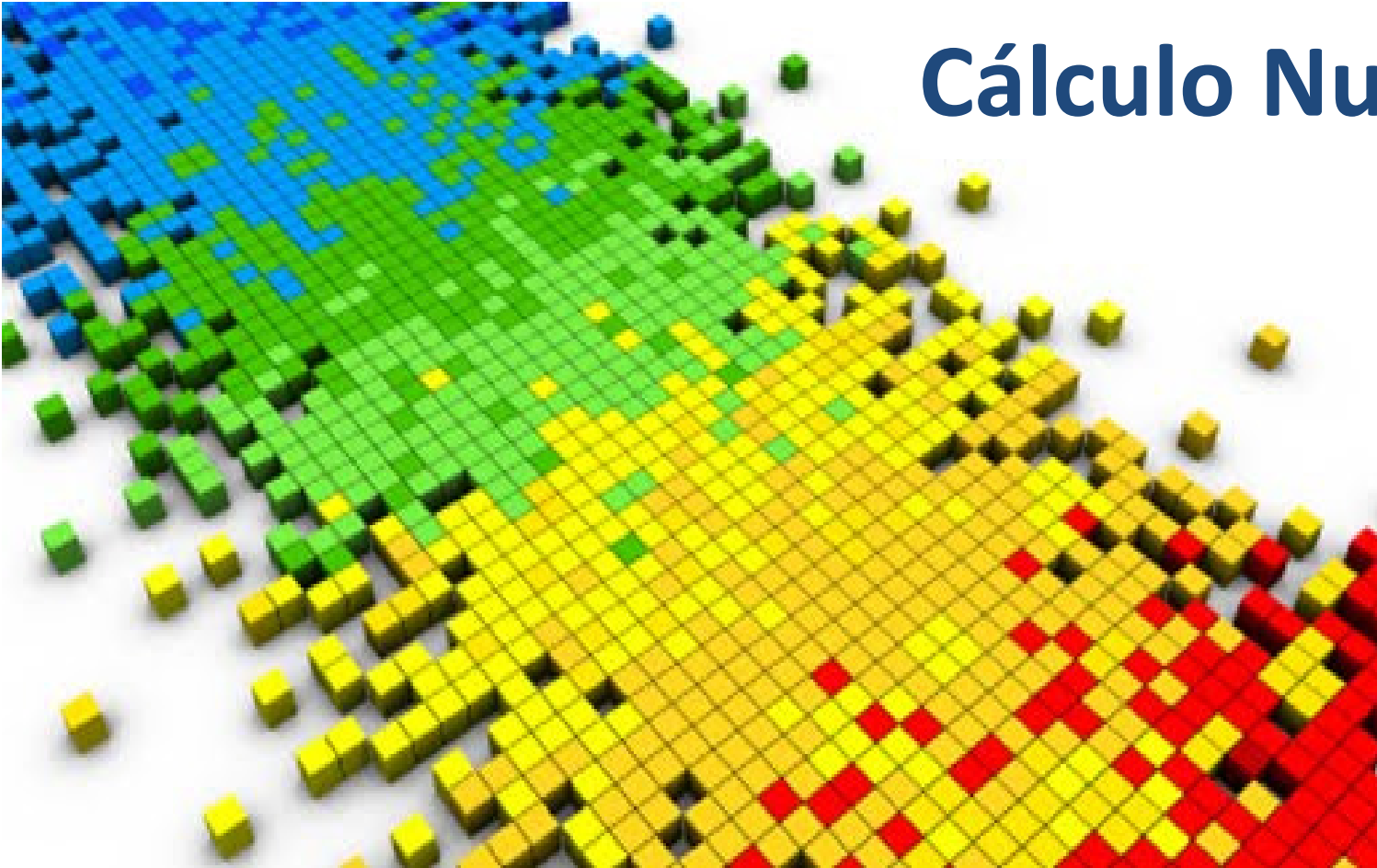


Cálculo Numérico



Aula 20 – Interpolação – Parte 3

Polinômio Interpolador de Newton e de Gregory-Newton



UFPE

2014.1 - 10/07/2014

Prof. Guilherme Amorim

gbca@cin.ufpe.br

O que vimos na última aula?



- Diferença dividida
- Diferença simples

Diferença Dividida (Definição 5.2)

Definição 5.2: (Diferenças Divididas). Dada uma função f como em (5.1), definimos as diferenças divididas,

$$f_0(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$f_r(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}) = \frac{f_{r-1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}) - f_{r-1}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1})}{x_{i+r} - x_i}$$

$$\begin{aligned} r &= 1, 2, 3, \dots, n. \\ i &= 0, 1, 2, \dots, (n-r). \end{aligned}$$

Obs.: $f_r(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r})$ lê-se diferença dividida de ordem r , relativa aos pontos $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}$.

Diferença Simples (Definição 5.4)

Definição 5.4: (Diferenças Simples). Dada uma função f como em (5.1), por uma tabela de pontos eqüidistantes, definimos

$$\begin{aligned}\Delta^0 f(x_i) &= f(x_i), & i &= 0, 1, 2, \dots, n. \\ \Delta^r f(x_i) &= \Delta^{r-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{r-1} f(x_i), & r &= 1, 2, \dots, n. \\ & & i &= 0, 1, 2, \dots, (n-r).\end{aligned}$$

E hoje?

- Polinômio Interpolador de Newton
- Polinômio Interpolador de Gregory-Newton

Teorema 5.2

Teorema 5.2 (usa diferenças divididas)

Sejam uma função f como em (5.1) e $x \neq x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (x pertence ao menor intervalo que contém os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$). Nestas condições, pode-se escrever $f(x) = \mathcal{P}_n(x) + \mathcal{R}(x)$, onde

$$\mathcal{P}_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n) \text{ e}$$

$$\mathcal{R}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x).$$

Teorema 5.2 (Prova por indução)

□ $n=1$

□ Definição de diferenças divididas + Propriedade 3

$$f(x_0, x_1, x) = f(x_1, x_0, x) = \frac{f(x_0, x) - f(x_1, x_0)}{x - x_1}$$

□ Logo $f(x_0, x) = f(x_0, x_1) + (x - x_1)f(x_0, x_1, x)$.

□ Por outro lado:

$$f(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

□ Ou seja:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0, x_1) + (x - x_1)f(x_0, x_1, x)$$

Teorema 5.2 (Prova por indução)

□ $n=1$ (continuação)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0, x_1) + (x - x_1) f(x_0, x_1, x)$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x),$$

□ Onde:

$$\mathcal{P}_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1)$$

$$\mathcal{R}(x) = (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x).$$

Teorema 5.2 (Prova por indução)

- Se a proposição é verdadeira para $(n-1)$, então é verdadeira para n .

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{P}_{n-1}(x) + \mathcal{R}(x) = \\ &= f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x). \end{aligned}$$

Teorema 5.2 (Prova por indução)

□ Por outro lado:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) &= f(x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \\ &= \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) - f(x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x - x_n} \end{aligned}$$

□ Logo:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_n) f(x_0, x_1, \dots, x_n, x).$$

□ Conclui-se facilmente que:

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + \mathcal{R}(x).$$

Teorema 5.2 (Prova por indução)

□ Detalhes:

□ Tomando o $R(x)$, temos:

$$+ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x).$$

□ Substituindo:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x).$$

□ Multiplicando:

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \left[f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \right]$$

Teorema 5.2 (Prova por indução)

□ Detalhes (Continuação):

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \left[f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x-x_n) f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \right]$$

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \cdot f(x_0, x_1, \dots, x_n) + \\ + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \cdot (x-x_n) \cdot f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$$

□ Estes eram os termos que faltavam pra completar:

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + \mathcal{R}(x).$$

Teorema 5.2 (Conclusão)

Como $\mathcal{P}_n$ é um polinômio de grau não superior a n e $\mathcal{R}(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (basta analisar suas expressões), conclui-se, sem maiores problemas, que

$$\mathcal{P}_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ou seja, $\mathcal{P}_n$ é o polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Exemplo 5.4

Exemplo 5.4 - Determine a expressão do polinômio interpolador de f , conhecendo os valores tabelados a seguir, usando o “método” de *Newton*, e, em seguida, o valor aproximado de $f(0,7)$.

x_i	- 1	0	2
$f(x_i)$	6	1	3

SOLUÇÃO

Neste caso, tem-se $n = 2$, logo

$$\mathcal{P}_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2)$$

Exemplo 5.4

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2(x) &= 6 + (x - (-1)) f(x_0, x_1) + (x - (-1))(x - 0) f(x_0, x_1, x_2) = \\ &= 6 + (x + 1) f(x_0, x_1) + (x^2 + x) f(x_0, x_1, x_2).\end{aligned}$$

Calculando as diferenças divididas, tem-se

i	x_i	$f_0(x_i) = f(x_i)$	$f_1(x_i, x_{i+1})$	$f_2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	-1	6	-5	2
1	0	1	1	
2	2	3		

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2(x) &= 6 + (x + 1)(-5) + (x^2 + x)2 = 6 - 5x - 5 + 2x^2 + 2x \\ \mathcal{P}_2(x) &= 2x^2 - 3x + 1.\end{aligned}$$

Exemplo 5.4

Então,

$$f(0,7) \approx \mathcal{P}_2(0,7) = 2 \times 0,7^2 - 3 \times 0,7 + 1 = -0,12.$$

Polinômio Interpolador de Gregory-Newton

Seja uma função f como em (5.1), dada por uma tabela de pontos eqüidistantes. Neste caso, usando a expressão de $\mathcal{P}_n$ de Newton e a relação

$$f_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1! h^1} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2} + \dots + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}. \end{aligned}$$

Polinômio Interpolador de Gregory-Newton

Vale observar que fazendo $\frac{x - x_0}{h} = z$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(x) = & f(x_0) + z \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!} + z(z-1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \\ & + z(z-1) \dots (z-n+1) \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - x_0 &= 2h \\ x_2 &= 2h + x_0 \end{aligned}$$

□ Notar que:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{h} &= z & x - x_1 &= ? \\ x - x_0 &= hz & x_1 - x_0 &= h \\ & & x_1 &= h + x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x_1 &= x - h - x_0 \\ &= x - x_0 - h \\ &= hz - h \\ &= h(z-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x_2 &= ? \\ x - x_2 &= x - 2h - x_0 \\ &= x - x_0 - 2h \\ &= hz - 2h \\ &= h(z-2) \end{aligned}$$

Exemplo 5.5

Exemplo 5.5 - Determine, usando o “método” de *Gregory-Newton*, o valor aproximado de $f(0,7)$, conhecendo os valores tabelados a seguir.

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	6	1	0

SOLUÇÃO:

Como a tabela é de pontos eqüidistantes com $h = 1$ e $n = 2$, tem-se

$$\mathcal{P}_2(x) = f(x_0) + z \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!} + z(z-1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!},$$

Onde,

$$z = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,7 + 1}{1} = 1,7.$$

Exemplo 5.5 (Cont.)

$$\mathcal{P}_2(0,7) = 6 + 1,7 \Delta^1 f(x_0) + 1,7(1,7 - 1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}.$$

Calculando as diferenças simples, tem-se

i	x_i	$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
0	-1	6	-5	4
1	0	1	-1	
2	1	0		

$$\mathcal{P}_2(0,7) = 6 - 8,5 + 1,19 \times 2$$

$$f(0,7) \approx \mathcal{P}_2(0,7) = -\mathbf{0,12}$$

Exemplo 5.5 (Cont.)

□ E se quiséssemos calcular $P_2(x)$?

$$P_2(x) = f(x_0) + (x-x_0) \frac{\Delta' f(x_0)}{1! h'} + (x-x_0)(x-x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2}$$

$$= 6 + (x+1) \cdot (-5) + (x+1)(x) \cdot \frac{4}{2}$$

$$= 6 - 5x - 5 + 2x^2 + 2x$$

$$= 2x^2 - 3x + 1$$

Exemplo 5.6

Exemplo 5.6 - A equação $e^x + x = 0$ possui uma raiz real no intervalo $[-1; 0]$. Determine-a usando três pontos deste intervalo e fazendo uso da *interpolação inversa*.

SOLUÇÃO

Tem-se neste problema uma situação onde a imagem é conhecida (na raiz, toda função vale zero). Portanto, o que se quer determinar é o x (variável independente) tal que

$$f(x) = e^x + x = 0.$$

Trata-se então de um problema “inverso”.

Como no intervalo $[-1; 0]$ esta função é sempre crescente (verifique), daí inversível, trabalha-se com sua inversa, buscando-se $f^{-1}(0)$.

Exemplo 5.6 (continuação)

Logo, a tabela

x_i	- 1	- 0,5	0
$f(x_i)$	- 0,632	0,107	1

$x_i^I = f(x_i)$	- 0,632	0,107	1
$f^I(x_i) = x_i$	- 1	- 0,5	0

será transformada em

Conseqüentemente, usando o método de Newton, calculamos $\mathcal{P}_2(0) \approx f^{-1}(0)$.

Calculando as diferenças divididas, temos

i	x_i^I	$f^I_0(x_i) = f(x_i)$	$f^I_1(x_i, x_{i+1})$	$f^I_2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	- 0,632	- 1	0,677	- 0,072
1	0,107	- 0,5	0,560	
2	1	0		

Exemplo 5.6 (continuação)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(0) &= -1 + (0 + 0,632)(0,677) + \\ &+ (0 + 0,632)(0 - 0,107)(-0,072) = \\ &= -1 + 0,428 + 0,005 = -0,567. \end{aligned}$$

Logo, o valor aproximado da raiz procurada, vem a ser - 0,567. Vale observar que $f(-0,567) = 0,0002$.

Bibliografia



- [1] **Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.**

