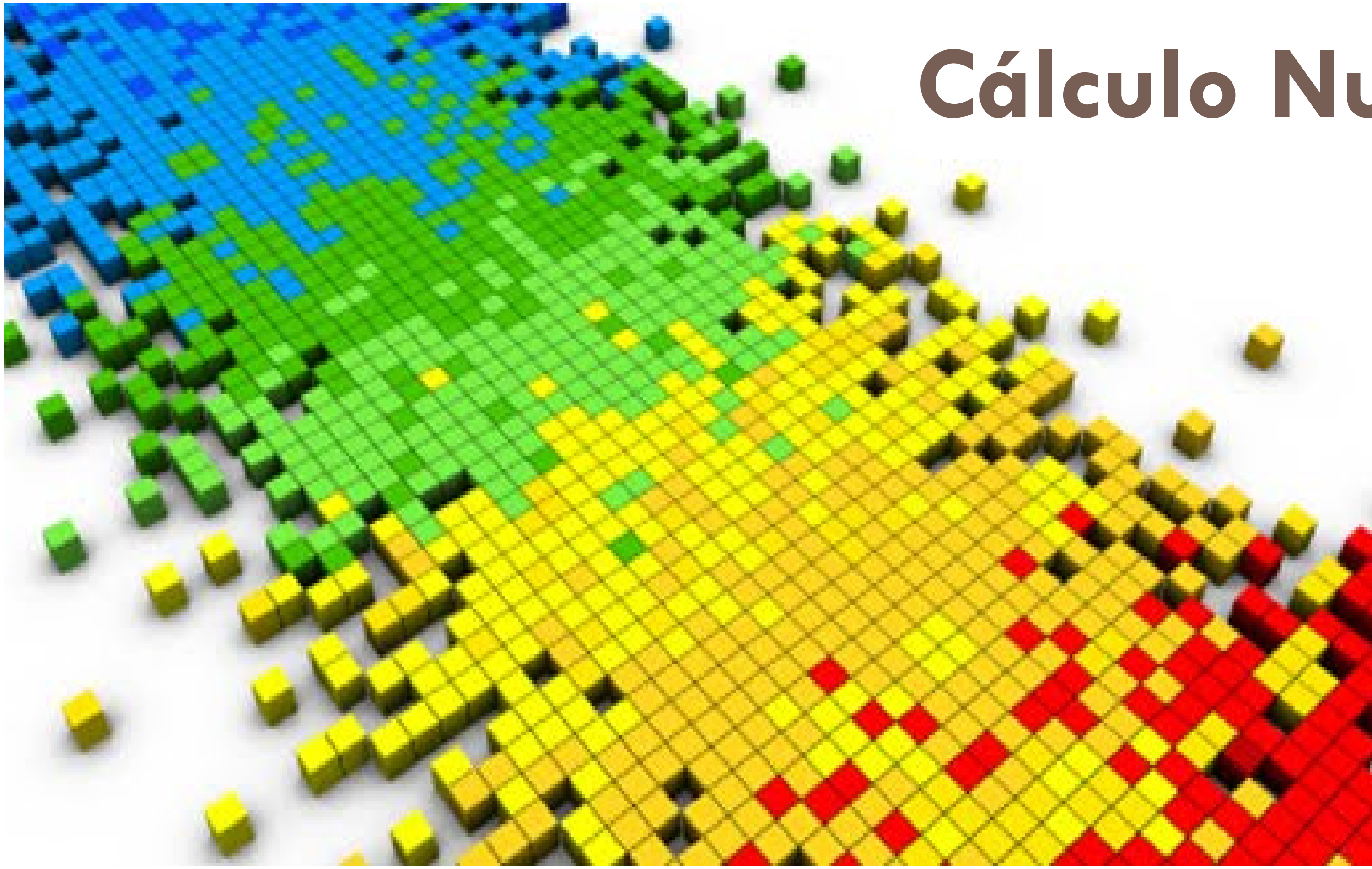


Cálculo Numérico

Aula 13 – Ajustamento

Prof. Rafael Mesquita

rgm@cin.ufpe.br

Adaptado por Prof. Guilherme Amorim

gbca@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática UFPE

2014.1 - 27/05/2014

Introdução

- Quando estudamos um fenômeno de forma experimental, é comum termos um conjunto de valores tabelados
- Utilizando tais informações podemos levantar várias questões
  - Qual a relação existente entre x e $f(x)$?
  - Qual o valor de $f(x)$ para um determinado x fora do tabelamento ?

Introdução

- Nessas circunstâncias, temos um tabelamento da forma

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

- Como podemos usar o tabelamento para calcular o valor da função f desconhecida em pontos não tabelados?
- $f(x)$ mapeia algum fenômeno com dados colhidos de forma experimental
  - Não temos certeza sobre corretude dos dados colhidos

Introdução

- Aplicações
- Planejamento
  - Previsão para o estoque de um determinado produto em função do histórico da sua demanda
- Previsão de inflação, consumo energético, dados populacionais, ...

Ajustamento de curvas

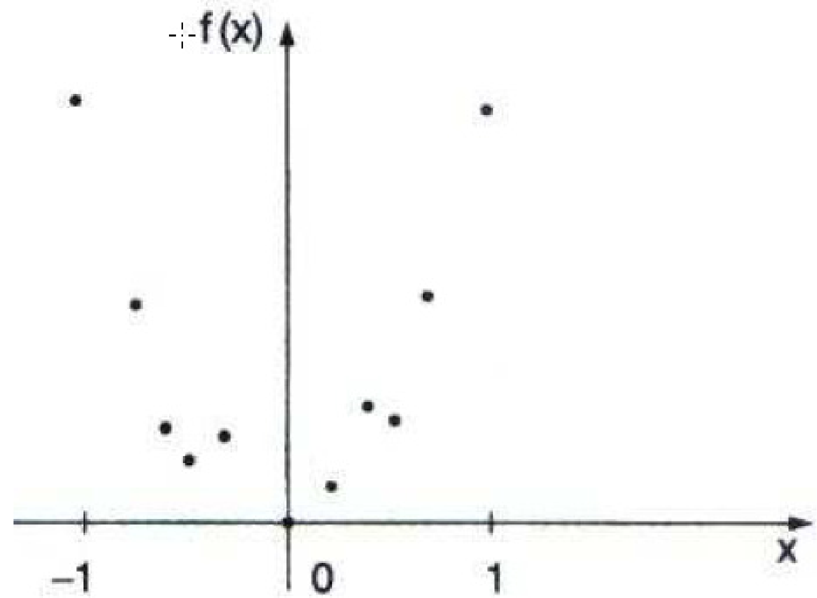
- Definição:
- O problema do ajuste de curvas no caso em que temos um tabelamento de pontos $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})), (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})), \dots, (\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n}))$, com $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ consiste em:
- Escolhidas $\boldsymbol{m+1}$ funções $\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})$, contínuas em $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, obter $\boldsymbol{m+1}$ constantes $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}}$, tais que a função $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0 g_0}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a_1 g_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \boldsymbol{a_m g_m}(\boldsymbol{x})$ se aproxime ao máximo de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Ajustamento de curvas

- Temos uma combinação linear de funções elementares:
- $P(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \times G_j\,(x)$
  - a_j: coeficientes a serem ajustados
  - G_j : funções conhecidas (1,x,sen x, ln x,...)
- Desejamos escolher a função $P(x)$ que melhor represente o tabelamento utilizado

Ajustamento de curvas

- Dúvida: Como escolher as funções contínuas $\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x})$?
- Uma maneira simples consiste em analisar os pontos conhecidos em um gráfico cartesiano
- Ex:
  - $g_1(x) = x^2$
  - Procuramos o valor de a em
  - $\varphi(x) = ax^2$
  - Ou seja,Qual parábola com equação ax^2 melhor se ajusta aos dados?



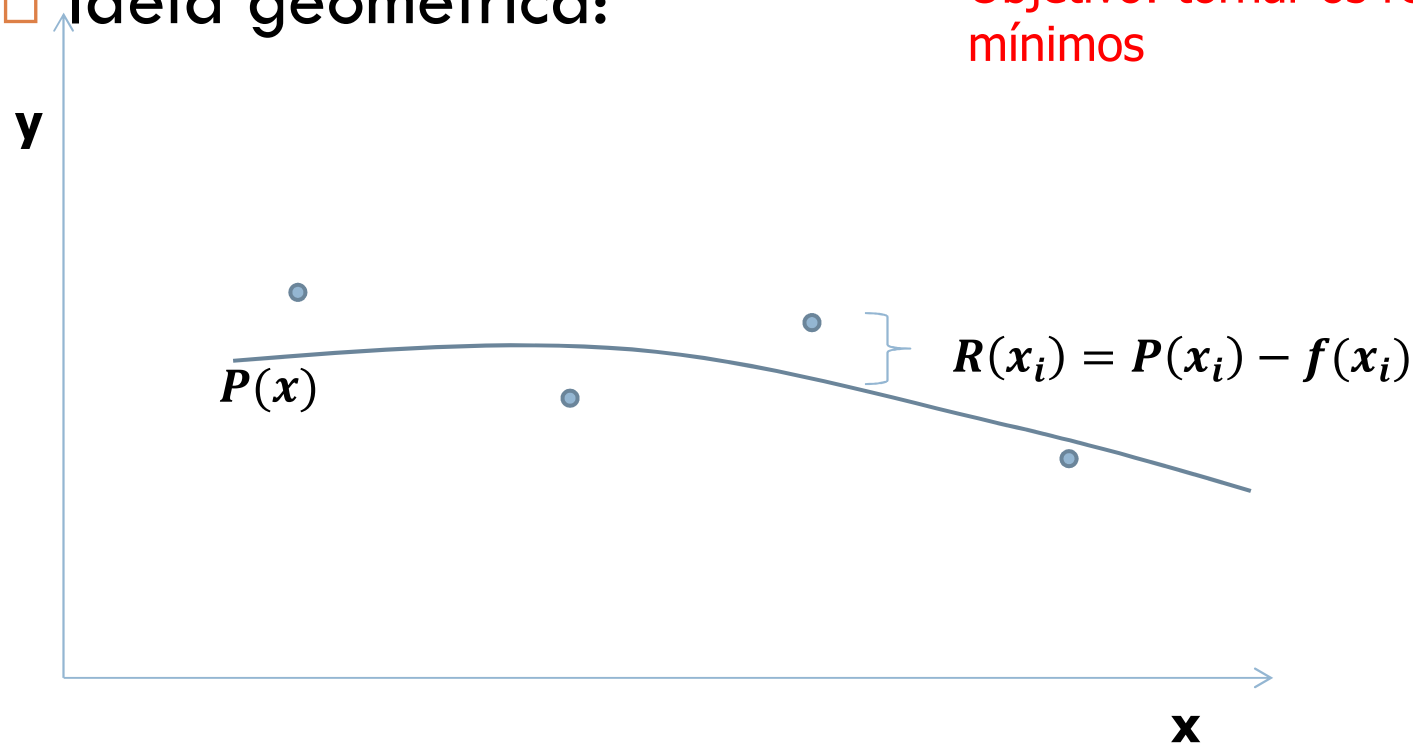
Ajustamento de curvas

- Dúvida: Como escolher as funções contínuas $\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x})$?
- Uma maneira simples consiste em analisar os pontos conhecidos em um gráfico cartesiano
  - No entanto, essa escolha nem sempre é simples, e não será objeto de estudo nesse curso...

Ajustamento de curvas

- O que significa obter uma curva que melhor se ajuste, ou que mais se aproxime de uma função $\boldsymbol{f(x)}$ desconhecida ?
- Idéia geométrica:

Objetivo: tornar os resíduos $\boldsymbol{R(x_i)}$ mínimos



Ajustamento de curvas

- O que significa tornar os resíduos $\boldsymbol{R(x_i)}$ mínimos ?
- $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{R(x_i) = 0}$?
  - Não! A curva pode ter resíduos positivos e negativos grandes em valores absolutos, mas que somados se aproximem bastante de zero. Escolha inadequada...
- $\sum_{i=0}^{n} |\boldsymbol{R(x_i)}| = \boldsymbol{0}$?
  - Não! Função valor absoluto não é derivável em seu mínimo...
- $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{R^2(x_i) = 0}$?
  - Sim! Problemas anteriores são resolvidos
  - Buscaremos a função do tipo escolhido que produza a menor soma dos quadrados dos resíduos
  - Método dos mínimos quadrados (MMQ)

Método dos Mínimos Quadrados

- Função $\boldsymbol{\varphi}$ associa a função escolhida para representar a tabela dada à soma dos quadrados dos resíduos produzidos por ela
- Procuramos o mínimo de

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_m}) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{R}^2(\boldsymbol{x_i})$$

Método dos Mínimos Quadrados

- Para o caso específico de uma reta, teremos:
- $\boldsymbol{P(x) = a_0 G_0(x) + a_1 G_1(x)}$,
  - Onde $\boldsymbol{G_0 = 1}$ e $\boldsymbol{G_1 = x}$
- Teremos para cada possível par $\boldsymbol{(a_0, a_1)}$ uma reta $\boldsymbol{P_0(x) = a_0 + a_1 x}$ distinta

Método dos Mínimos Quadrados

- Queremos, portanto, encontrar o par $(\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1})$ que minimize a soma do quadrado dos resíduos
- $\boldsymbol{min\ \ \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} R^2(x_i)}$
- Então, temos que
  - $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial a_j} = 0, j = 0,1,2, \ldots m$ (1)
  - $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{R^2(x_i)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{R^2(x_i)}}{\partial a_j}$
  - $= 2 \sum_{i=0}^{n} R(x_i) \frac{\partial R(\boldsymbol{x_i})}{\partial a_j}$ (2)

Método dos Mínimos Quadrados

Como $R(x_i) = P(x_i) - f(x_i) = a_0 g_0(x_i) + \cdots + a_j g_j(x_i) + \cdots + a_m g_m(x_i) - f(x_i)$ (3)

Temos que

$\frac{\partial R(x_i)}{\partial a_j} = g_j(x_i)$, logo, de (2) temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^{n} R(x_i) g_j(x_i), j = 0, 1 \dots, m$$

Portanto, considerando que $\frac{\partial \varphi}{\partial a_j} = 0$ (ver (1)), temos o sistema normal, dado por

$$\sum_{i=0}^{n} R(x_i) g_j(x_i) = 0, j = 0, 1 \dots, m$$

Método dos Mínimos Quadrados

Substituindo $R(x_i)$ conforme a igualdade (3), o sistema normal pode ser reescrito como

$$\sum_{i=0}^{n} R(x_i)g_j(x_i) = 0, j = 0,1 \ldots, m$$

$\sum_{i=0}^{n}(a_0 g_0(x_i) + \cdots + a_m g_m(x_i) - f(x_i))g_j(x_i) = 0$,
$j = 0,1 \ldots, m$

$a_0 \sum_{i=0}^{n} g_0(x_i)g_j(x_i) + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} g_m(x_i)g_j(x_i) =$
$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g_j(x_i), j = 0,1 \ldots, m$

Sintetizando a equação acima, temos que:

$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} g_k(x_i)g_j(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g_j(x_i)\ , j = 0,1 \ldots, m$

Método dos Mínimos Quadrados

- Sistema Normal
  - $\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} G_k(x_i) G_j(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) G_j(x_i)$,
  - $j = 0, 1, \dots, m$
- Sistema normal possui solução única e essa é o ponto de mínimo de $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_m)$

Método dos Mínimos Quadrados

- Exemplo: Considere as taxas de inflação no período de janeiro a setembro de um certo ano dada pela tabela abaixo. Faça uma previsão para os meses de outubro a dezembro desse mesmo ano considerando que uma reta é o tipo de curva que melhor representa esse fenômeno

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set
Inflação	1,3	1,8	2,2	0,4	1,1	3,0	1,1	0,8	0,1

Método dos Mínimos Quadrados

- Queremos encontrar a reta que melhor se ajuste à tabela dada.
- Como a equação da reta é da forma
- $\boldsymbol{P_0(x) = a_0 + a_1 x}$, utilizando a definição de sistema normal ($\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} G_k(x_i) G_j(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) G_j(x_i)\,, j = 0, \dots, m$), e utilizando m= 1, devido à quantidade de termos de P, chegaremos ao sistema:

- $a_0 \sum_{i=0}^{n} G_0(x_i) G_0(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} G_1(x_i) G_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) G_0(x_i)$
- $a_0 \sum_{i=0}^{n} G_0(x_i) G_1(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} G_1(x_i) G_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) G_1(x_i)$,
- Onde $G_0(x) = 1$ e $G_1(x) = x$

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1								
1	2								
2	3								
3	4								
4	5								
5	6								
6	7								
7	8								
8	9								

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1	1,3							
1	2	1,8							
2	3	2,2							
3	4	0,4							
4	5	1,1							
5	6	3,0							
6	7	1,1							
7	8	0,8							
8	9	0,1							

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1	1,3	1						
1	2	1,8	1						
2	3	2,2	1						
3	4	0,4	1						
4	5	1,1	1						
5	6	3,0	1						
6	7	1,1	1						
7	8	0,8	1						
8	9	0,1	1						

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1	1,3	1	1					
1	2	1,8	1	2					
2	3	2,2	1	3					
3	4	0,4	1	4					
4	5	1,1	1	5					
5	6	3,0	1	6					
6	7	1,1	1	7					
7	8	0,8	1	8					
8	9	0,1	1	9					

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).$ $G_1(x_i)$	$f(x_i).$ $G_0(x_i)$	$f(x_i).$ $G_1(x_i)$
0	1	1,3	1	1	1				
1	2	1,8	1	2	1				
2	3	2,2	1	3	1				
3	4	0,4	1	4	1				
4	5	1,1	1	5	1				
5	6	3,0	1	6	1				
6	7	1,1	1	7	1				
7	8	0,8	1	8	1				
8	9	0,1	1	9	1				

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1	1,3	1	1	1	1			
1	2	1,8	1	2	1	4			
2	3	2,2	1	3	1	9			
3	4	0,4	1	4	1	16			
4	5	1,1	1	5	1	25			
5	6	3,0	1	6	1	36			
6	7	1,1	1	7	1	49			
7	8	0,8	1	8	1	64			
8	9	0,1	1	9	1	81			

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1	1,3	1	1	1	1	1		
1	2	1,8	1	2	1	4	2		
2	3	2,2	1	3	1	9	3		
3	4	0,4	1	4	1	16	4		
4	5	1,1	1	5	1	25	5		
5	6	3,0	1	6	1	36	6		
6	7	1,1	1	7	1	49	7		
7	8	0,8	1	8	1	64	8		
8	9	0,1	1	9	1	81	9		

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1	1,3	1	1	1	1	1	1,3	
1	2	1,8	1	2	1	4	2	1,8	
2	3	2,2	1	3	1	9	3	2,2	
3	4	0,4	1	4	1	16	4	0,4	
4	5	1,1	1	5	1	25	5	1,1	
5	6	3,0	1	6	1	36	6	3,0	
6	7	1,1	1	7	1	49	7	1,1	
7	8	0,8	1	8	1	64	8	0,8	
8	9	0,1	1	9	1	81	9	0,1	

Método dos Mínimos Quadrados

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$f(x_i).G_0(x_i)$	$f(x_i).G_1(x_i)$
0	1	1,3	1	1	1	1	1	1,3	1,3
1	2	1,8	1	2	1	4	2	1,8	3,6
2	3	2,2	1	3	1	9	3	2,2	6,6
3	4	0,4	1	4	1	16	4	0,4	1,6
4	5	1,1	1	5	1	25	5	1,1	5,5
5	6	3,0	1	6	1	36	6	3,0	18,0
6	7	1,1	1	7	1	49	7	1,1	7,7
7	8	0,8	1	8	1	64	8	0,8	6,4
8	9	0,1	1	9	1	81	9	0,1	0,9

Método dos Mínimos Quadrados

i	x_i	$f(x_i)$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).$ $G_1(x_i)$	$f(x_i).$ $G_0(x_i)$	$f(x_i).$ $G_1(x_i)$
0	1	1,3	1	1	1	1	1	1,3	1,3
1	2	1,8	1	2	1	4	2	1,8	3,6
2	3	2,2	1	3	1	9	3	2,2	6,6
3	4	0,4	1	4	1	16	4	0,4	1,6
4	5	1,1	1	5	1	25	5	1,1	5,5
5	6	3,0	1	6	1	36	6	3,0	18,0
6	7	1,1	1	7	1	49	7	1,1	7,7
7	8	0,8	1	8	1	64	8	0,8	6,4
8	9	0,1	1	9	1	81	9	0,1	0,9
				$\sum$	9	285	45	11,8	51,6

Método dos Mínimos Quadrados

- Logo, chegaremos no seguinte sistema:
- $\begin{cases} \mathbf{9}\boldsymbol{a}_{\mathbf{0}} + \mathbf{45}\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} = \mathbf{11,8} \\ \mathbf{45}\boldsymbol{a}_{\mathbf{0}} + \mathbf{285}\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} = \mathbf{51,6} \end{cases}$
- Solução: $\boldsymbol{a}_{\mathbf{0}} = \mathbf{1,928}; \mathbf{a}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{0,123},$
- $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1,928} - \mathbf{0,123}\boldsymbol{x}$

- Assim, temos a inflação em
- outubro -> $\boldsymbol{P}(\mathbf{10}) = \mathbf{0,698}$
- novembro -> $\boldsymbol{P}(\mathbf{11}) = \mathbf{0,575}$
- dezembro -> $\boldsymbol{P}(\mathbf{12}) = \mathbf{0,452}$

Método dos Mínimos Quadrados

- Exercício: Determine $P(x) = ax^2 + b$ que melhor se ajuste à tabela abaixo:

x_i	1	2	3	5
$f(x_i)$	$1,2$	$0,9$	$3,1$	$6,1$

- R: $\mathbf{P}(x) = 0,219x^2 + 0,691$

Caso não linear

- Para aplicarmos o MMQ é necessário que P seja linear nos parâmetros
- Quando isso não ocorre devemos fazer uma mudança de variável para tentar tornar o problema em um problema de ajuste linear

Caso não linear

- Ex:Encontre a curva do tipo $\boldsymbol{P(x) = a_0 e^{a_1 x}}$ que melhor se ajuste à tabela abaixo usando o MMQ

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set
Inflação	1,3	1,8	2,2	0,4	1,1	3,0	1,1	0,8	0,1

- Trabalharemos com
  - $\boldsymbol{ln\big(P(x)\big) = ln(a_0 e^{a_1 x}) = ln(a_0) + a_1 x = a_0' + a_1 x}$
  - $a_0' = \ln(a_0)\,; G_0(x) = 1; G_1(x) = x$
- Reconstruindo a tabela...

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set
Ln(inf)	Ln(1,3)	Ln(1,8)	Ln(2,2)	Ln(0,4)	Ln(1,1)	Ln(3,0)	Ln(1,1)	Ln(0,8)	Ln(0,1)

Caso não linear

- Aplicando o sistema normal, já que m=1, teremos:

- $a_0' \sum_{i=0}^{n} G_0(x_i)G_0(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} G_1(x_i)G_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \ln(f(x_i))G_0(x_i)$
- $a_0' \sum_{i=0}^{n} G_0(x_i)G_1(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} G_1(x_i)G_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \ln(f(x_i))G_1(x_i)$

  ,

- Onde $G_0(x) = 1$, $G_1(x) = x$ e $a_0' = ln(a_0)$

Caso não linear

- Precisamos encontrar cada um dos coeficientes utilizados no sistema anterior. Para isso, construiremos a tabela abaixo:

i	x_i	$ln(f(x_i))$	$G_0(x_i)$	$G_1(x_i)$	$G_0^2(x_i)$	$G_1^2(x_i)$	$G_0(x_i).G_1(x_i)$	$ln(f(x_i)).G_0(x_i)$	$ln(f(x_i)).G_1(x_i)$
0	1	0,262	1	1	1	1	1	0,262	0,0262
1	2	0,588	1	2	1	4	2	0,588	1,176
2	3	0,788	1	3	1	9	3	0,788	2,364
3	4	-0,916	1	4	1	16	4	-0,916	-3,664
4	5	0,095	1	5	1	25	5	0,095	0,475
5	6	1,099	1	6	1	36	6	1,099	6,594
6	7	0,095	1	7	1	49	7	0,095	0,665
7	8	-0,223	1	8	1	64	8	-0,223	-1,784
8	9	-2,303	1	9	1	81	9	-2,303	-20,727
				$\sum$	9	285	45	-0,515	-14,639

Caso não linear

- Logo, chegaremos no seguinte sistema:
- $$\begin{cases} \mathbf{9}\boldsymbol{a}_{\mathbf{0}}' + \mathbf{45}\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{0,515} \\ \mathbf{45}\boldsymbol{a}_{\mathbf{0}}' + \mathbf{285}\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{14,639} \end{cases}$$
- Solução: $\mathbf{a}_{\mathbf{0}}' = \mathbf{0,948}; \mathbf{a}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{0,201},$
  - $a'_0 = \ln(a_0) \Rightarrow a_0 = e^{a_0'} = e^{0,948} = 2{,}581$
- $\boldsymbol{P(x) = a_0 e^{a_1 x}} \Rightarrow \boldsymbol{P(x) = 2,581 e^{-0,201x}}$

Exercícios

- Usando o MMQ encontre a curva de cada uma das formas abaixo para a seguinte tabela:

x_i	1	2	3	5
$f(x_i)$	$1,2$	$0,9$	$3,1$	$6,1$

a) $P(x) = ax + b$

b) $\mathrm{P}(x) = ax^b$

c) $P(x) = \frac{1}{(ax+b)}$

Bibliografia

- [1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.