Indução Matemática

George Darmiton da Cunha Cavalcanti
CIn - UFPE

Introdução

- Qual é a fórmula para a soma dos primeiros n inteiros ímpares positivos?

- Observando os resultados para um n pequeno, encontra-se um resultado n^2

- É necessário provar que essa suposição é verdadeira.

- Indução matemática é uma ferramenta importante para provar assertivas como essa.

Introdução

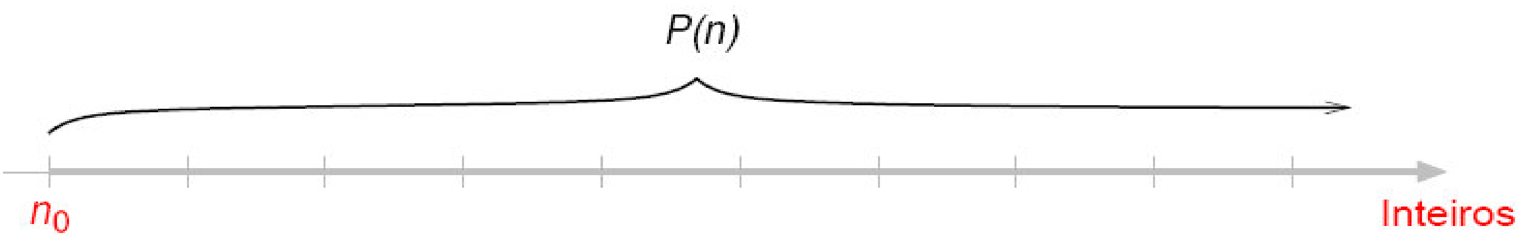
- Indução matemática é usada para provar resultados em uma grande variedade de objetos discretos
  - Complexidade de algoritmos
  - Corretude de alguns tipos de programas de computador
  - Teoremas sobre grafos e árvores
  - E uma grande quantidade de inequações

Princípio da Indução Matemática

- Seja $P(n)$ um predicado definido para os inteiros n, e seja n_0 um inteiro fixo.
- Suponha que as duas afirmações seguintes sejam verdadeiras:

1. $P(n_0)$ é Verdadeira (V).
2. Para todos inteiros $k \geq n_0$, se $P(k)$ é V então $P(k+1)$ é V.

➢ Logo, a afirmação para todos inteiros $n \geq n_0$, P(n) é V.



Princípio da Indução Matemática

- A prova por indução matemática de que $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro n consiste de dois passos

<u>Passo base</u>

A proposição $P(1)$ é verdadeira

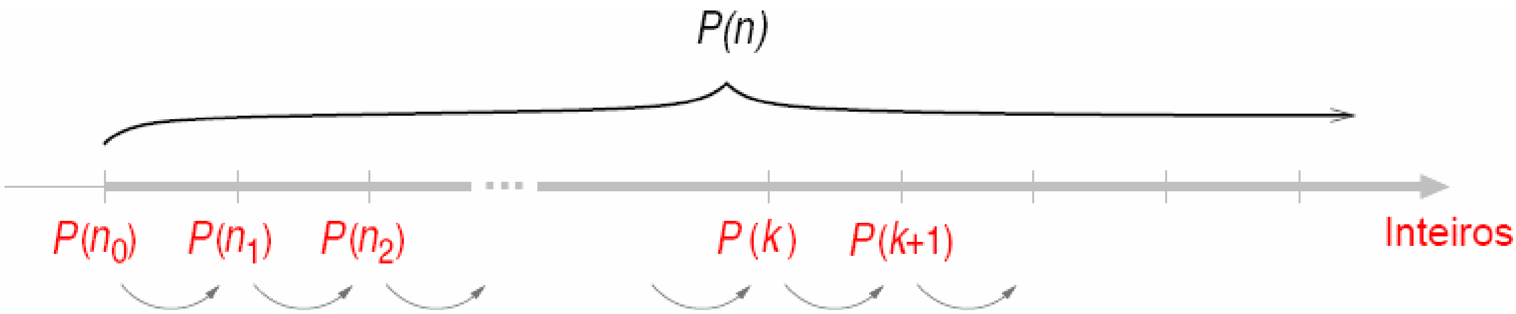
<u>Passo indutivo</u>

A implicação $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos k.

Princípio da Indução Matemática

Este princípio pode ser expresso pela seguinte regra de inferência:

$$[P(n_0) \wedge \forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n P(n).$$



Numa prova por indução matemática **não é** assumido que *P(k)* é verdadeiro para todos os inteiros. É mostrado que se **for assumido** que *P(k)* é verdadeiro, então *P(k +1)* também é verdadeiro.

Exemplo 1

Prove que para todos inteiros $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Prova por indução matemática

Passo Base

$P(1)$, para $n_0=1$, tem-se $1 = 1(1+1)/2 = 1$

A fórmula é verdadeira para $n_0=1$

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 1

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n=k$

$$P(k): 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$ para algum inteiro $k \geq 1$.

Deve-se mostrar que

$$P(k+1): 1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Prove que para todos inteiros $n \geq 0$,

$$0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+2)}{2}$$ ERRADO

Passo Base

$P(0)$, para $n_0=0$, tem-se $0 = 0(0+2)/2 = 0$

A fórmula é verdadeira para $n_0=0$

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 2

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n=k$

$$P(k) : 0 + 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+2)}{2} = \frac{k^2 + 2k}{2}$$

Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : 0 + 1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+3)}{2} = \frac{k^2 + 4k + 3}{2}$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k^2+2k}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k^2+2k+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+4k+2}{2}
\end{aligned}
$$

Assim, não foi possível derivar a conclusão a partir da hipótese. Isto significa que o predicado original é falso.

Exemplo 3

Prove que $$P(n): \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

para todos inteiros $n \geq 0$ e para todos números reais r, $r \neq 1$.

Passo Base

$P(0)$, para $n_0=0$, tem-se $r^0=1=(r^{0+1}-1)/(r-1)=(r-1)/(r-1)=1$

A fórmula é verdadeira para $n_0=0$

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 3

Supondo que a fórmula é verdadeira para *n*=*k*

$$P(k) : \sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1} \quad \text{para } k \geq 0$$

Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$$

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + \frac{r^{k+1}(r - 1)}{r - 1} \\
&= \frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1}}{r - 1} \\
&= \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Prove que $P(n) : 2^{2n} - 1$ é divisível por 3, para $n \geq 1$.

Passo Base

$P(1)$, para $n_0=1$, tem-se $2^{2\times 1}-1= 2^2-1= 4-1=3$ que é divisível por 3

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 4

Supondo que a fórmula é verdadeira para *n*=*k*

$$P(k) : 2^{2k} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : 2^{2(k+1)} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

Exemplo 4

$$
\begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\
&= 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 \\
&= 2^{2k} \cdot 4 - 1 \\
&= 2^{2k} \cdot (3 + 1) - 1 \\
&= \boxed{2^{2k} \cdot 3} + \boxed{(2^{2k} - 1)}
\end{aligned}
$$

que é divisível por 3.

Exemplo 5

Prove que

$$P(n): 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

para $n \geq 0$.

Passo Base

$P(0)$, para $n_0=0$, tem-se $2^0 = 1 = 2^{0+1}-1 = 2^1-1 = 2-1 = 1$

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 5

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n=k$

$$P(k): 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Deve-se mostrar que

$$P(k+1): 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Exemplo 5

$$
\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= \\
&= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 6

Prove que $$P(n) : H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$ para n≥0.

H_j representa o número harmônico e é definido por:

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{j}.$$

Passo Base

$P(0)$, para $n_0=0$, tem-se $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1+0/2 = 1$

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 6

Supondo que a fórmula é verdadeira para *n*=*k*

$$P(k) : H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$$

Exemplo 6

$$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

[Definição de número harmônico.]

$$= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

[Definição de número harmônico.]

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

[Hipótese indutiva e existem 2^k termos, cada um pelo menos $1/2^{k+1}$.]

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} \qquad \geq 1 + \frac{k+1}{2}.$$

Exemplo 7

Dada a seqüência a_1, a_2, a_3, ... definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_k &= 5a_{k-1}, k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove que	$\boldsymbol{a_n = 2 \times 5^{n-1}}$	para n≥1

Passo Base

$P(1)$, para $n_0=1$, tem-se $a_1 = 2 = 2 \times 5^{1-1} = 2 \times 1 = 2$

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 7

Supondo que a fórmula é verdadeira para n=k

$$P(k) : a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$$

Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : a_{k+1} = 2 \cdot 5^{(k+1)-1} = 2 \cdot 5^k$$

Exemplo 7

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 5 \cdot a_{(k+1)-1} \\
&= 5 \cdot a_k \\
&= 5 \cdot (2 \cdot 5^{k-1}) \\
&= 2 \cdot (5 \cdot 5^{k-1}) \\
&= 2 \cdot 5^k
\end{aligned}
$$

Exemplo 8

Prove que $P(n)$: $n^3 - n$ é divisível por 3 para n≥1.

Passo Base

$P(1)$, para $n_0=1$, tem-se $1^3-1 = 1-1=0$ que é divisível por 3.

Passo Indutivo

se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 8

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n=k$

$$P(k)\colon\ k^3 - k \text{ é divisível por 3}$$

Deve-se mostrar que

$$P(k+1)\colon\ (k+1)^3 - (k+1) \text{ é divisível por 3}$$

Exemplo 8

$$(k+1)^3 - (k+1) =$$

$$(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) =$$

$$\boxed{(k^3 - k)} + \boxed{3(k^2 + k)}$$

que é divisível por 3.

Indução Matemática Forte

Os passos para mostrar que o proposição *P(n)* é verdadeiro para todos os inteiros positivos *n* são:

Passo Base

A proposição $P(1)$ é verdadeira

Passo Indutivo

$[P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para todo inteiro positivo k

Indução matemática forte é conhecida também como o segundo princípio da indução matemática

As duas formas de indução matemática são equivalentes

Exemplo

Considerando a seqüência definida por

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = 2 \\ a_n & = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \end{cases}$$

Deseja-se mostrar, usando o segundo princípio da indução, que $\boldsymbol{a_n = 2^n}$, para qualquer $\boldsymbol{n \in N_0}$.

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : \; a_n = 2^n\}.$$

Exemplo

Passo Base

$P(0)$, para $n_0 = 0$, tem-se $a_0 = 1 = 2^0$.

Passo Indutivo

Seja $k \in S$ e admite-se que para todo t tal que $0 \leq t \leq k$, se tem $a_t = 2^t$ (pode-se supor que $k \geq 1$, porque para $k = 1$ tem-se $a_1 = 2 = 2^1$, ou seja, $1 \in S$).

Deseja-se provar que $k+1 \in S$.

Como $k \geq 1$, então $a_k = 2^k$ e $a_{k-1} = 2^{k-1}$.

Assim sendo,

Exemplo

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 4a_k - 4a_{k-1} \\
&= 4.2^k - 4.2^{k-1} \\
&= 2^{k+2} - 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1}(2-1) \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\boldsymbol{k+1 \in S}$.

Usando o segundo princípio da indução, tem-se que $\boldsymbol{S = N_0}$.

Propriedade da boa ordenação

- Princípio:
  - Seja S um conjunto de um ou mais números inteiros que são maiores que um dado inteiro fixo. Então S tem um elemento que é menor de todos.

  - Todo conjunto não-negativo de inteiros possui um elemento que é o menos de todos.

Princípio da Indução

Sejam $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_m = \{l \in \mathbb{N}_0 : \ l \geq m\}$

e S *um subconjunto de* $\mathbb{N}_m$ *tal que:*

(i) $m \in S$;

(ii) $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$, *para qualquer* $k \in \mathbb{N}_m$.

Então, $S = \mathbb{N}_m$.

Princípio da Indução

- Demonstração
  - Com vista a um absurdo, admitamos que $S \neq N_m$.
  - Sabendo que $S \subseteq N_m$, então $A = N_m - S$ é um subconjunto não vazio de N_m.
  - Atendendo ao princípio da boa ordenação A possui um primeiro elemento t. Como $t \in N_m$, então $t \geq m$.
  - Mas por (i), $m \in S$ e como $t \notin S$, então $t > m$.
  - Assim, $t-1 \geq m$, isto é, $t-1 \in N_m$.
  - Porque t é o primeiro elemento de A, $t-1 \notin A$, então $t-1 \in S$.
  - Assim, por (ii), se $[(t-1) \in S]$ então $[t = (t-1)+1 \in S]$, o que é uma contradição.
  - Portanto, $S = N_m$.