

Coeficientes binomiais e o Triângulo de Pascal

George Darmiton da Cunha Cavalcanti
CIn - UFPE

- Coeficientes Binomiais
 - O Teorema Binomial
 - O Triângulo de Pascal
 - Identidades do Triângulo de Pascal
-

Coeficientes Binomiais

$\binom{n}{k}$ chamamos de *coeficientes binomiais*.
leia: “de n escolha k ”

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Coeficientes Binomiais

Teorema

- *Coeficientes binomiais satisfazem as seguintes igualdades:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

Se $n, k > 0$, então

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k};$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Coeficientes Binomiais

Calculando potências da expressão algébrica simples $(x+y)$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y)^2 =$$

$$(x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) =$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Coeficientes Binomiais

$$(x + y)^4 = (x + y) \cdot (x + y)^3$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$$

Pense em expandir de modo que nos livramos de todos os parênteses.

Se escolhermos x , digamos, 2 vezes e então escolhermos y 3 vezes, assim obtemos x^2y^3 .

Quantas vezes obtemos esse mesmo termo?

Coeficientes Binomiais

A expansão de $(x+y)^5$ fica:

$$(x + y)^5 =$$

$$\binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5$$

O Teorema Binomial

O coeficiente de $x^{n-k}y^k$ na expansão de $(x + y)^n$ é $\binom{n}{k}$.

$$(x + y)^n =$$

$$x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

O Teorema Binomial

O Teorema Binomial pode ser aplicado de muitas maneiras para obter identidades referentes a coeficientes binomiais.

Por exemplo, o que ocorre quando $x = y = 1$?

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

O Triângulo de Pascal

Arranjando todos os coeficientes binomiais em um esquema triangular:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & & & & & & & \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & & & & & & & & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & & & & & & & & & \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & & & & & & & & & \\
 \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

O Triângulo de Pascal

Podemos substituir cada coeficiente binomial por um valor numérico, para obter uma outra versão do Triângulo de Pascal

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Identidades do Triângulo de Pascal

Uma propriedade do Triângulo de Pascal é que todo número no Triângulo (exceto os 1's na fronteira) é a soma dos dois números imediatamente acima dele.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Identidades do Triângulo de Pascal

Prove a identidade abaixo usando a propriedade do *slide* anterior

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Identidades do Triângulo de Pascal

Assim, é possível substituir

$$\binom{n}{0} \text{ por } \binom{n-1}{0} \text{ (ambos são simplesmente 1)}$$

$$\binom{n}{1} \text{ por } \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}$$

$$\binom{n}{2} \text{ por } \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$$

Identidades do Triângulo de Pascal

Por conseguinte obtêm-se a soma

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{0} - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right] + \\ & \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] - \left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} \right] \\ & + \dots + (-1)^{n-1} \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right] + (-1)^n \binom{n-1}{n-1} \end{aligned}$$

que é 0, pois o segundo termo em cada parênteses se cancela com o primeiro termo do próximo parêntese.

Identidades do Triângulo de Pascal

O que será obtido se forem adicionados e subtraídos os coeficientes binomiais de forma alternada?

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \dots + (-1)^k \binom{n}{k}$$

Identidades do Triângulo de Pascal

Aplicando o mesmo truque anterior, obtêm-se

$$\binom{n-1}{0} - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] - \dots$$

$$+ (-1)^k \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right]$$

Aqui todos os termos se cancelam exceto o último.

$$(-1)^k \binom{n-1}{k}$$

Identidades do Triângulo de Pascal

Qual é a soma dos quadrados dos elementos em cada linha?

$$1^2 = 1,$$

$$1^2 + 1^2 = 2,$$

$$1^2 + 2^2 + 1^2 = 6,$$

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20,$$

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70.$$

Identidades do Triângulo de Pascal

						1					
				1		2		1			
			1	3		6		4		1	
		1	4	10		20		15		6	
	1	6	15	35		70		56		28	
1	8	28	56	70		56		28		8	1

Pode-se reconhecer esses números como os números na coluna do meio do triângulo de Pascal.

Identidades do Triângulo de Pascal

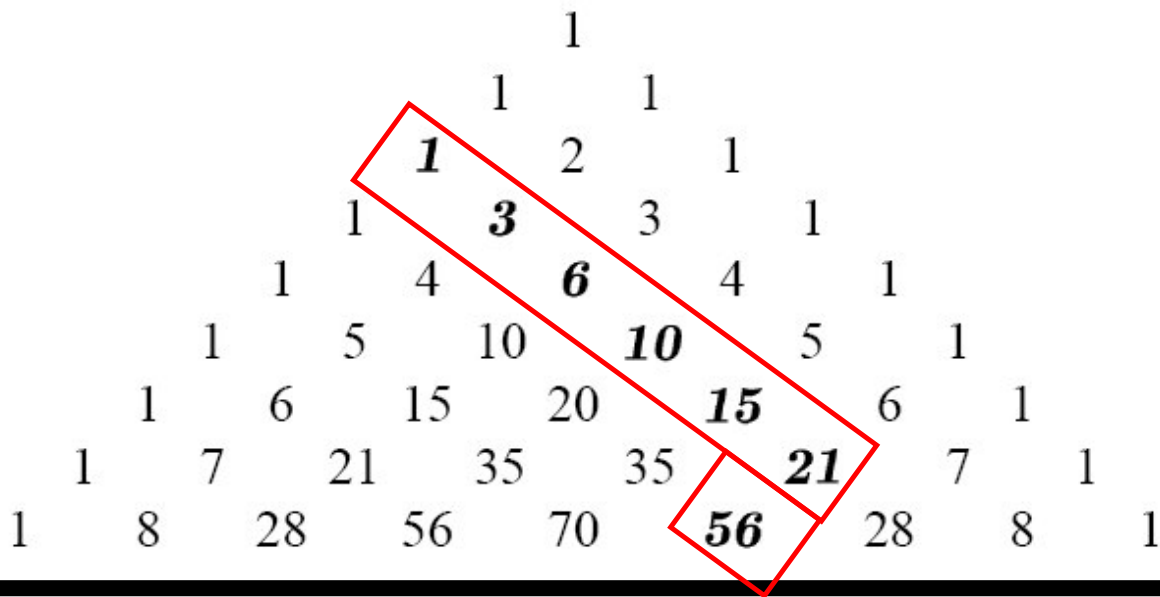
Daí os exemplos acima sugerem a seguinte identidade:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

É claro que os poucos experimentos acima não provam
que essa identidade sempre se verifica, portanto é
necessária uma prova.

Identidades do Triângulo de Pascal

Comece com o primeiro elemento na n -ésima linha, e some os elementos andando para baixo diagonalmente para a direita.



Identidades do Triângulo de Pascal

$$1 = 1,$$

$$1 + 3 = 4,$$

$$1 + 3 + 6 = 10,$$

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20,$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35.$$

Esses números são exatamente os números na próxima linha diagonal da tabela.

Identidades do Triângulo de Pascal

Se desejamos por isso numa fórmula, obtemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Para provar essa identidade, pode-se usar indução sobre k .
