Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática
Recife, 18 de dezembro de 2002
Disciplina: Computação Gráfica
Professor: Alejandro Frery
Aluno: Francisco do Nascimento Júnior

Resolução da Lista 2

1. Descreva as matrizes de projeções:

a. Com centro de projeção na origem e cujo plano de projeção é o plano $z = d$.

Resolução

Considere o ponto $P = (x, y, z)$ que se deseja projetar no plano $z = d$, obtendo assim o ponto $Q = (x_p, y_p, d)$.

Inicialmente, considere a projeçao do ponto P no plano YZ, encontrando o ponto $P_1 = (0, y, z)$.

Logo, temos por semelhança de triângulos:

$$\frac{y_p}{y} = \frac{d}{z} \Rightarrow y_p = \frac{y}{z/d}$$

Considere agora a projeção do ponto P no plano XZ, obtendo o ponto $P_2 = (x, 0, z)$.

$$\frac{x_p}{x} = \frac{d}{z} \Rightarrow x_p = \frac{x}{z/d}$$

Agora, utilizando coordenadas homogêneas obtemos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \bullet M_{Pers} = \begin{bmatrix} x_p & y_p & d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{z/d} & \frac{y}{z/d} & d & 1 \end{bmatrix} \bullet \frac{z}{d} = \begin{bmatrix} x & y & z & \frac{z}{d} \end{bmatrix}$$

Com esta relação podemos deduzir que a matriz M_{Pers} é:

$$M_{Pers} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Cujo centro de projeção é o ponto $(0, 0, -d)$ e cujo plano de projeção é o plano $z = 0$.
Resolução:
Utilizando o mesmo raciocínio da questão anterior, obtemos através da projeção no plano XZ:

$$\frac{x_p}{x} = \frac{d}{z+d} \Rightarrow x_p = \frac{x}{(z+d)/d} = \frac{x}{z/d+1}$$

E através da projeção no plano YZ:

$$\frac{y_p}{y} = \frac{d}{z+d} \Rightarrow y_p = \frac{y}{(z+d)/d} = \frac{y}{z/d+1}$$

Logo, obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{cccc} x & y & z & 1 \end{array}\right] \bullet M_{Pers} &= \left[\begin{array}{cccc} x_p & y_p & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{x}{z/d+1} & \frac{y}{z/d+1} & 0 & 1 \end{array}\right] \bullet \frac{z}{d} = \\ &= \left[\begin{array}{cccc} x & y & 0 & \frac{z}{d}+1 \end{array}\right]\end{aligned}$$

Com esta relação podemos deduzir que a matriz M_{Pers} é:

$$M_{Pers} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Considere o cubo definido pelos pontos:
$(3, 0, 3), (3, 0, 6), (0, 0, 6), (0, 0, 3), (0, 3, 6), (3, 3, 6), (3, 3, 3), (0, 3, 3)$.
a. Aplique a matriz encontrada no item a da questão anterior para projetar este cubo. Defina, em seguida, valores para d, tais, que, nenhum ponto do cubo será projetado no plano de projeção e outro com todos os pontos projetado.
Resolucao:

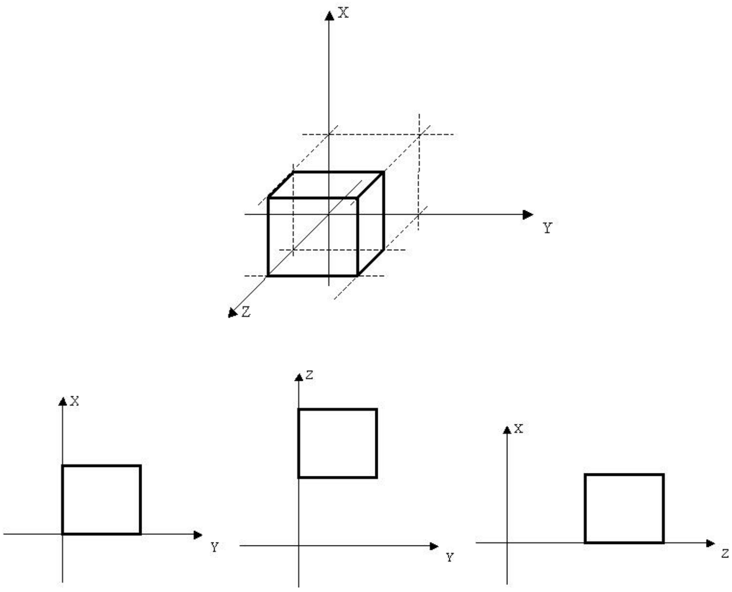

Figure 1: Vistas: frontal, superior e lateral

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3/d \\ 3 & 0 & 6 & 6/d \\ 0 & 0 & 6 & 6/d \\ 0 & 0 & 3 & 3/d \\ 0 & 3 & 6 & 6/d \\ 3 & 3 & 6 & 6/d \\ 3 & 3 & 3 & 3/d \\ 0 & 3 & 3 & 3/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & d & 1 \\ d/2 & 0 & d & 1 \\ 0 & 0 & d & 1 \\ 0 & 0 & d & 1 \\ 0 & d/2 & d & 1 \\ d/2 & d/2 & d & 1 \\ d & d & d & 1 \\ 0 & d & d & 1 \end{bmatrix}$$

Para $d < 0$ e $d > 6$, nenhum ponto do cubo é projetado.
Para $0 < d < 3$, todos os pontos do cubo são projetados.
b. Construa as vistas ortográficas frontal, superior e lateral do cubo.

c. Determine a projeção dimétrica deste cubo, com um fator de projeção do eixo z de 5/8.

Para realizar a projeção dimétrica podemos fazer uma rotação de θ em torno de x, em seguida rotacionamos α em torno de y e, por fim, aplicar uma projeção no eixo z.
Vamos aos cálculos:
Considere o operador $\psi = P_z \cdot R^y_\alpha \cdot R^x_\theta$, e a matriz que o implementa [T].

$$[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ \sin\theta\sin\alpha & \cos\theta & -\sin\theta\cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\theta & \sin\theta & \cos\alpha\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta\sin\alpha & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora, para determinarmos os fatores de proporção da projeção, vamos aplicar essa transformação a vetores unitários:
$[U*] = [U][T]$

$$[U*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta\sin\alpha & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta\sin\alpha & \cos\theta & 0 & 1 \\ -\sin\alpha\cos\theta & \sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí, calculamos os módulos dos vetores:

$$\begin{aligned} f_x &= \cos\alpha \\ f_y &= \sqrt{\sin\theta^2\sin\alpha^2 + \sin\theta^2} \\ f_z &= \sqrt{\cos\theta^2\sin\alpha^2 + \sin\theta^2} \end{aligned}$$

Sabendo que foi dado o valor de f_z, poremos os ângulos de θ e α em função de f_z.
Como desejamos uma projeção dimétrica, igualemos os fatores f_x e f_y:

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha^2 &= \sin\theta^2 \sin\alpha^2 + \cos\theta^2 \\
\cos\alpha^2 &= \sin\theta^2 \sin\alpha^2 + 1 - \sin\theta^2 \\
\cos\alpha^2 &= \sin\theta^2 (\sin\alpha^2 - 1) + 1 \\
\sin\theta^2 &= \frac{\cos\alpha^2 - 1}{\sin\alpha^2 - 1} = \frac{-\sin\alpha^2}{\sin\alpha^2 - 1} \\
\sin\theta^2 &= \frac{\sin\alpha^2}{1 - \sin\alpha^2} [Eq.01] \\
f_z^2 &= \sin\alpha^2 \cos\theta^2 + \sin\theta^2 \\
f_z^2 &= \sin\alpha^2 (1 - \sin\theta^2) + \sin\theta^2 \\
f_z^2 &= \sin\alpha^2 (\frac{1 - 2\sin\alpha^2}{1 - \sin\alpha^2}) + \frac{\sin\alpha^2}{1 - \sin\alpha^2} \\
(1 - \sin\alpha^2) f_z^2 &= \sin\alpha^2 (1 - 2\sin\alpha^2) + \sin\alpha^2 \\
(1 - \sin\alpha^2) f_z^2 &= \sin\alpha^2 - 2\sin\alpha^4 + \sin\alpha^2 \\
2\sin\alpha^2 - 2\sin\alpha^4 - (1 - \sin\alpha^2) f_z^2 &= 0 \\
2\sin\alpha^2 - 2\sin\alpha^4 - f_z^2 + f_z^2 \sin\alpha^2 &= 0 \\
2\sin\alpha^4 - (2 + f_z^2)\sin\alpha^2 + f_z^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Resolução dessa equação bi-quadrada:

$$
\begin{aligned}
2\sin\alpha^4 - (2 + f_z^2)\sin\alpha^2 + f_z^2 = 0 \\
\Delta = (2 + f_z^2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot f_z^2 \\
\Delta = 4 + 4f_z^2 + f_z^4 - 8f_z^2 = 4 - 4f_z^2 + f_z^4 = (2 - f_z^2)^2 \\
\sin\alpha^2 = \frac{2 + f_z^2 \pm (2 - f_z^2)}{4}
\end{aligned}
$$

Uma solução da equação é:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha^2 = \frac{2 + f_z^2 - (2 - f_z^2)}{4} = \frac{f_z^2}{2} \\
\sin\alpha = \frac{f_z}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Substituindo o valor de $\sin\alpha$ *na Equação 01, temos:*

$$\sin\theta^2 = \frac{\sin\alpha^2}{1-\sin\alpha^2}$$
$$\sin\theta^2 = \frac{f_z^2/2}{1-f_z^2/2}$$
$$\sin\theta^2 = \frac{f_z^2}{2-f_z^2}$$
$$\sin\theta = \frac{f_z}{\sqrt{2-f_z^2}}$$

Utilizando as transformações trigonométricas, encontramos todos os parâmetros necessários para a construção da matriz de transformação:

$$\sin\alpha = \frac{f_z}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{f_z^2}{2}}$$
$$\sin\theta = \frac{f_z}{\sqrt{2-f_z^2}} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\frac{f_z^2}{2-f_z^2}}$$

Com isso, resulta-se na matriz abaixo:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\frac{f_z^2}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{f_z}{\sqrt{2-f_z^2}}\frac{f_z}{\sqrt{2}} & \sqrt{1-\frac{f_z^2}{2-f_z^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{f_z}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{f_z^2}{2-f_z^2}} & \frac{f_z}{\sqrt{2-f_z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$