Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática
Recife, 20 de novembro de 2002
Disciplina: Computação Gráfica
Professor: Alejandro Frery
Aluno: Francisco do Nascimento Júnior

Resolução da 1^a Lista de Exercícios

1 Questão 01

Descreva a transformação Ψ, em operadores e coordenadas homogêneas, que faz uma rotação de θ graus em torno do ponto (a,b).
Resolução:
Translada-se o ponto (a,b) para a origem, utilizando o operador $T_{-a,-b}$.
Em seguida, podemos aplicar o operador de rotação R_θ, que opera em relação a origem. Agora, desfaz-se a translação para achar o valor da rotação. Para isso, aplica-se o operador $T_{a,b}$. Em em termos de operadores, tem-se a transformação

$$\Psi = T_{a,b} \cdot R_\theta \cdot T_{-a,-b}$$

Considere a matriz de transformação $\underline{M}$ a implementação do operador Ψ. Logo, tem-se:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -a\cos\theta + b\sin\theta & -a\sin\theta - b\cos\theta & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -a\cos\theta + b\sin\theta + a & -a\sin\theta - b\cos\theta + b & 1 \end{bmatrix}$$

2 Questão 02

Exemplos de pares de elementos em τ que comutam e que não são do mesmo tipo, isto é, mostre, usando elementos de τ, pelo menos uma situação para a seguinte situação $S_{a_1,b_1}R^{\bullet}_{\theta} = R^{\bullet}_{\theta}S_{a_1,b_1}$.

Resolução:

Podemos obter esses exemplos através da relação $T_{a,b}S_{c,d} = S_{c,d}T_{a,b}$. *Vemos abaixo essa relação utilizando coordenadas homogêneas:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ ac & bd & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Comutando as matrizes, obtemos:

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Então, para ser verdade a comutatividade, os parâmetros $\mathbf{a}, b, c, d$ *têm que satisfazer tais propriedades:*

1 - Se a = 0, então c pode adquirir qualquer valor.

2 - Se a $\neq$ 0, então c deve ser igual a 1.

E a mesma relação ocorre entre b e d.

Veja, agora, uns exemplos disso:

$T_{0,2}$ *e* $S_{3,1}$

Prova:

Seja M_1 *a matriz que implementa o operador* $\psi_1 = T_{0,2}S_{3,1}$ *e* M_2 *a matriz que implementa o operador* $\psi_2 = S_{3,1}T_{0,2}$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Verificou-se que as matrizes M_1 *e* M_2 *são iguais, logo os dois operadores são comutáveis.*

Agora, a segunda questão: em que situações os operadores $S_{a,b}$ e R_θ são comutáveis?
Utilizaremos o mesmo procedimento de igualar as matrizes que implementam as duas possibilidades de concatenação dos dois operadores.
Seja M_3 a matriz que implementa o operador $\psi_3 = S_{a,b}R_\theta$ e M_4 a matriz que implementa o operador $\psi_4 = R_\theta S_{a,b}$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta & 0 \\ -a\sin\theta & b\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\theta & a\sin\theta & 0 \\ -b\sin\theta & b\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Logo, para tais operadores serem comutáveis, devemos ter:
$a\sin\theta = b\sin\theta \Rightarrow a = b$
Dai, podemos exemplificar a situação com:
- $S_{2,2}$ *e* R_{45^o}

3 Questão 03

Considere a transformação geométrica ψ utilizando operadores e coordenadas homogêneas, que leva um triângulo com vértices (1,1), (1,2), (3,3) no triângulo equilátero com vértices)1,0), (-1,0) e (0, $\sqrt{3}$).
Resolução:
Sabendo que podemos implementar qualquer transformação utilizando uma matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Então, temos a seguinte relação, utilizando coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Esta relação resulta nos dois sistemas de equações abaixo:

$$\begin{aligned} a + c + e &= 1 \\ a + 2c + e &= -1 \\ 3a + 3c + e &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Solução: $a = \frac{3}{2}$, c = -2, $e = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} b + d + f &= 0 \\ b + 2d + f &= 0 \quad c \\ 3b + 3d + f &= \sqrt{3} \end{aligned} \tag{10}$$

Solução: $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d = 0, f = -$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Daí, conclui-se a matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

4 Questão 04

Determine a matriz de uma rotação em torno de um eixo arbitrário do espaço. Suponha que o eixo é definido por um vetor unitário $\mathbf{v} = (\mathbf{v_x}, \mathbf{v_y}, \mathbf{v_z})$ e passa pela origem.
Resolução:
O objetivo é mover o eixo arbitrário para um dos eixos do sistema de coordenadas.
Considerações:
- θ_x = *ângulo entre o vetor e o eixo* x
- θ_y = *ângulo entre o vetor e o eixo* y
- θ_z = *ângulo entre o vetor e o eixo* z

Segue-se os procedimentos para efetuar a rotação em torno do eixo definido pelo vetor unitário $v = (v_x, v_y, v_z)$*:*

- *Traça-se a projeção da extremidade do vertor nos três eixos e utilizando o módulo do vetor igual a 1 (um), verifica-se que :*

$\cos\theta_x = v_x$
$\cos\theta_y = v_y$
$\cos\theta_z = v_z$

- *Fazer rotação de α_x em torno do eixo x, tal que o vetor fique contido ao plano xz.* ($R^x_{\alpha_x}$)

- *Rotacionar de α_y em torno do eixo y, de modo que o vetor coincida com o eixo z.* ($R^y_{\alpha_y}$)

- *Posicionado o vetor no eixo z, pode-se aplicar a rotação de α_z em torno de z, que será, conseqüentemente em torno do vetor desejado.* ($R^z_{\alpha_z}$)

Aplicada a rotação desejada, agora deve-se desfazer as transformações feitas no sistema, a fim de voltar ao estado original.

- *Desfazer a rotação de α_y em torno do eixo y.* ($R^y_{-\alpha_y}$)

- *Desfazer, por fim, a rotação de α_x em torno do eixo x.* ($R^x_{-\alpha_x}$)

Por fim, encontramos o operador

$$\psi = R^x_{-\alpha_x} \cdot R^y_{-\alpha_y} \cdot R_\theta \cdot R^y_{\alpha_y} \cdot R^x_{\alpha_x} \qquad (12)$$

que efetua a rotação em torno do vetor v.

Calculemos agora os ângulos de rotação α_x e α_y.
Projeta-se o vetor v no plano yz, encontrando um vetor p de coordenadas $(\mathbf{0}, \mathbf{v_y}, \mathbf{v_z})$ *e módulo igual a* $\sqrt{v_y^2 + v_z^2}$
Sendo α_x o ângulo α_x entre o vetor p projetado e o eixo z, tem-se $\cos\alpha_x = \frac{v_z}{\bar{p}}$ *e* $\sin\alpha_x = \frac{v_y}{\bar{p}}$
Seja M_x a matriz de transformaçãao que implementa a rotação em torno do

eixo x de α_x*:*

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & -\sin\alpha_x & 0 \\ 0 & \sin\alpha_x & \cos\alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Substituindo os valores de $\cos\alpha_x$ *e* $\sin\alpha_x$ *obtidos acima, tem-se:*

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{p} & -\frac{v_y}{p} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{p} & \frac{v_z}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Aplicando a transformação acima ao vetor v, utilizando coordenadas homogêneas, encontra-se o vetor v', ou seja, $(v_x, v_y, v_z, 1) \cdot M_x = (v_x, 0, p, 1) = (v', 1)$.
Vamos, agora, calcular o α_y*!*
α_y *é o ângulo entre o eixo z e o vetor v'. Logo, temos* $\cos\alpha_y = p$ *e* $\sin\alpha_y = v_x$.
Seja M_y *a matriz de transformaçãao que implementa a rotação em torno do eixo y de* α_y *(note que esse ângulo está no sentido horário):*

$$M_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Substituindo os valores de $\cos\alpha_y$ *e* $\sin\alpha_y$ *obtidos acima, tem-se:*

$$M_y = \begin{bmatrix} p & 0 & -v_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

No mais, podemos implementar o operador ψ *a partir das operações que o compõem e representar por uma matriz de transformação M.*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{p} & -\frac{v_y}{p} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{p} & \frac{v_z}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p & 0 & -v_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet$$
$$\begin{bmatrix} p & 0 & v_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{p} & \frac{v_y}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{v_y}{p} & \frac{v_z}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira matriz pela segunda e a terceira pela quarta, temos;

$$M = \begin{bmatrix} p & 0 & -v_y & 0 \\ -\frac{v_y^e}{p} & \frac{v_z}{p} & -v_z & 0 \\ \frac{v_y v_z}{p} & \frac{v_y}{p} & v_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p\cos\theta & -\sin\theta & v_y\cos\theta & 0 \\ p\sin\theta & \cos\theta & v_y\sin\theta & 0 \\ -v_y & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{p} & \frac{v_y}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{v_y}{p} & \frac{v_z}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Agora, multiplicamos a primeira pela segunda, e resultou-se em:

$$M = \begin{bmatrix} p^2\cos\theta + v_y^2 & -p\sin\theta & pv_y \cdot (\cos\theta - 1) & 0 \\ v_y^2 \cdot (1-\cos\theta) + v_z\sin\theta & \frac{v_y^2\sin\theta + v_z\cos\theta}{p} & v_y p \cdot (\frac{v_z\sin\theta - v_y^2\cos\theta}{p^2} - 1) & 0 \\ v_y v_z \cdot (\cos\theta - 1) + v_y\sin\theta & \frac{v_y}{p} \cdot (\cos\theta - v_z\sin\theta) & \frac{v_y^2}{p} \cdot (v_z\cos\theta + \sin\theta) + v_z p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{p} & \frac{v_y}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{v_y}{p} & \frac{v_z}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, achamos a matriz de transformação M:

$$M = \begin{bmatrix} p^2\cos\theta + v_y^2 & v_y^2 \cdot (1-\cos\theta) - v_z\sin\theta & A & 0 \\ v_y^2 \cdot (1-\cos\theta) + v_z\sin\theta & \frac{v_z^2\cos\theta + v_y^4\cos\theta}{p^2} + v_y^2 & B & 0 \\ v_y v_z \cdot (\cos\theta - 1) + v_y\sin\theta & C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

onde
$A = -v_z \sin\theta + v_z v_y \cdot (\cos\theta - 1)$
$B = \frac{v_y^3 \sin\theta + v_y v_z \cos\theta + v_y v_z^2 \sin\theta - v_z v_y^3 \cos\theta}{p^2} - v_z v_y$
$C = \frac{v_y v_z}{p^2} \cdot (\cos\theta - v_z \sin\theta) - \frac{v_y^3}{p} \cdot (v_z \cos\theta + \sin\theta) - v_z v_y p$
$D = \frac{v_y^2}{p^2} \cdot (\cos\theta + v_z^2 \cos\theta) + v_z^2$

5 Questão 05

Considere os pontos $P_0 \neq P_1$ no plano. Escreva a matriz de transformação em coordenadas homogêneas que implementa a projeção ortogonal de qualquer ponto sobre a reta definida por P_0 e P_1.
Resolução:
Considerações:
$P_0 = (x_0, y_0)$
$P_1 = (x_1, y_1)$
d (distância entre os pontos) $= \sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}$
θ = *ângulo entre a reta e o eixo x, portanto:*
$\cos\theta = \frac{x_1 - x_0}{d}$
$\sin\theta = \frac{y_1 - y_0}{d}$
Procedimentos:

- *Levar o ponto P_0 para a origem do sistema, aplicando o operador T_{-P_0}.*

- *Rotacionar de θ ao redor da origem, de modo que a reta coincida com um dos eixos (escolhemos o eixo x). Como o ângulo está no sentido horário, teremos $R_{-\theta}$.*

- *Com isso, fica fácil pegar a projeção de um ponto, pois será a abscissa desse ponto após as transformações acima citadas. Para isso, utilizamos o operador de mudança de escala com 1 e 0 como parâmetros. ($S_{1,0}$).*

- *Agora, temos que desfazer a operações realizadas anteriormente: R_θ e em seguida, T_{P_0}.*

Em suma, representamos a projeção desejada como:

$$\psi = T_{P_0} \cdot R_\theta \cdot S_{1,0} \cdot R_{-\theta} \cdot T_{-P_0} \tag{19}$$

Agora, iremos implementar o operador ψ utilizando coordenadas homogêneas. Considere a matriz de transformação M, a implementação do operador ψ.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

Muliplicando, agora, a primeira matriz com a segunda e a terceira com a quarta, temos:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -x_0\cos\theta - y_0\sin\theta & x_0\sin\theta - y_0\cos\theta & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Agora, vamos multiplicar a primeira pela segunda:

$$\begin{bmatrix} (\cos\theta)^2 & \cos\theta\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & (\sin\theta)^2 & 0 \\ -x_0(\cos\theta)^2 - y_0\sin\theta\cos\theta & x_0(\sin\theta)^2 - y_0\cos\theta\sin\theta & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Finalmente, temos:

$$M = \begin{bmatrix} (\cos\theta)^2 & \cos\theta\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & (\sin\theta)^2 & 0 \\ -x_0(\cos\theta)^2 - y_0\sin\theta\cos\theta + x_0 & x_0(\sin\theta)^2 - y_0\cos\theta\sin\theta + y_0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Onde:
$\cos\theta = \frac{x_1 - x_0}{d}$
$\sin\theta = \frac{y_1 - y_0}{d}$
$d = \sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}$