

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# **Análise de Sistemas Contínuos por Transformada de Fourier**

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**  
**Depto. of Sistemas de Computação**  
**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 7

# Conteúdo

- **Introdução**
- **Representação de Sinal Aperiódico por Integral de Fourier Trigonométrica**
- **Transformadas de Algumas Funções Úteis**
- **Propriedade da Transformada de Fourier**
- **Transmissão de Sinais através de Sistemas LTIC**

# Introdução (i)

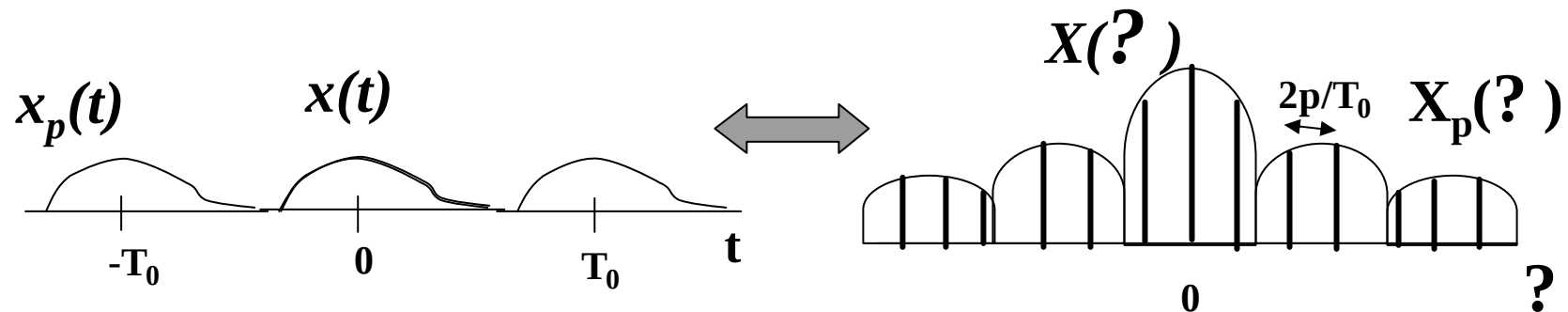
- A Transformada de Fourier pode ser intuída como um caso especial de Transformada de Laplace onde  $s=j$  ? .
  - Esta suposição nem sempre é verdadeira por causa da diferente natureza da convergência das integrais de Laplace e de Fourier.
- A integral de Fourier, que dá origem a transformada de Fourier, estende o papel da série de Fourier, representar um sinal periódico por um somatório de funções senoidais ou exponenciais. Isto é, tal integral permite a representação espectral de sinais aperiódicos.
- A Transformada de Fourier de um sinal:
  - Representa as componentes espectrais do sinal.
  - Provê mapeamento 1-1 com sua inversa entre domínio no tempo e na frequência.

# Representação de Sinal Aperiódico (i)

- **Preliminares**

- Para representar um sinal aperiódico  $x(t)$  por uma série de Fourier:

- Repita  $x(t)$  a cada  $T_0$  segundos, evitando superposições das repetições.
    - Os coeficientes da série de Fourier são calculados para componentes a cada intervalo  $\Delta\omega$  de frequência.
    - Se  $T_0 \rightarrow \infty$ , as amostras no domínio da frequência tornam-se um sinal contínuo em  $\omega$ .



# Representação de Sinal Aperiódico (ii)

- **Preliminares**

- Um sinal aperiódico pode ser expresso por um somatório contínuo (integral) de exponenciais incessantes onde aplica-se operador de limite. Assim, o sinal aperiódico dá origem a um outro, periódico, que repete o sinal original a cada período.

Se o período ( $T_0$ ) tende a infinito, então um sinal periódico ( $x_{T_0}$ ) repete - se após um intervalo de tempo infinito, portanto :  $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$

Assim, uma mesma série de Fourier representa os dois casos acima :

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jnw_0 t}, \quad \text{onde} \quad D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jnw_0 t} dt, \quad w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Como  $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t)$  e  $x(t)$  se equivalem, tem - se :  $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jnw_0 t} dt$

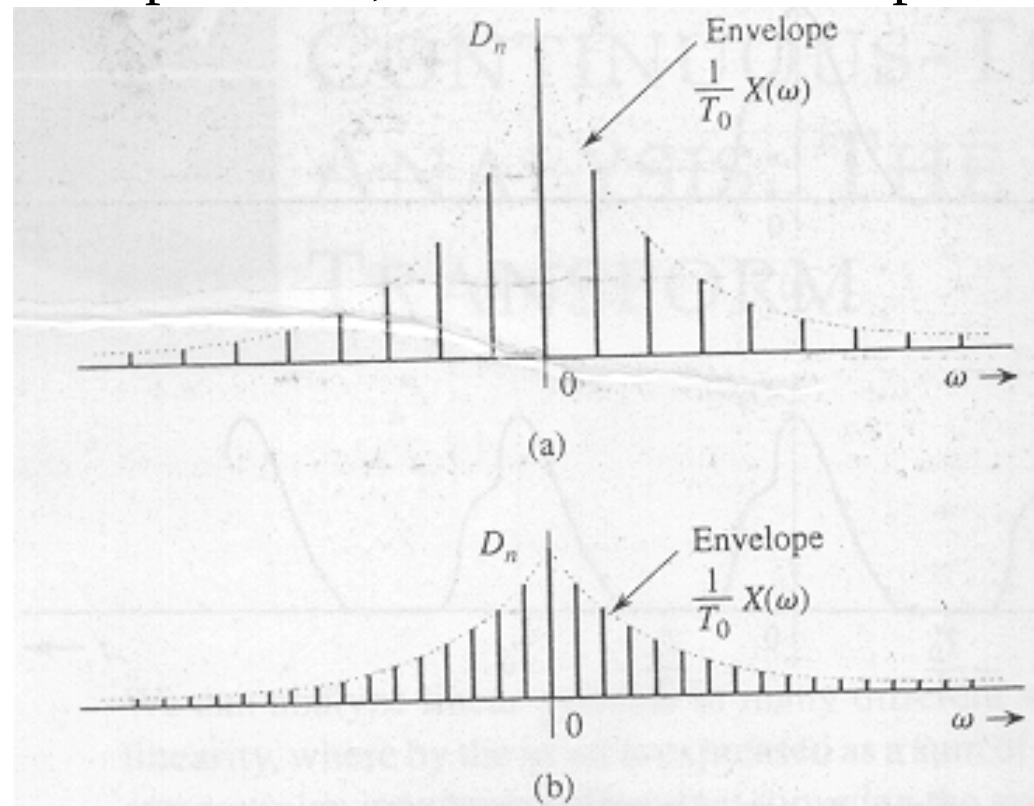
# Representação de Sinal Aperiódico (iii)

- **Definição: Integral de Fourier**

- Pode-se definir uma integral, função da frequência ? :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \text{logo} \quad D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$$

- O espectro de Fourier se modifica, em número de amostras e amplitude das componentes, com o aumento do período.



# Representação de Sinal Aperiódico (iv)

- **Definição: Integral de Fourier**

- Usando-se os coeficientes, escreve-se a série do sinal periódico:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(nw_0)}{T_0} e^{jnw_0 t}, \text{ se } T_0 \rightarrow \infty \text{ então } w_0 \rightarrow 0.$$

Logo troca - se  $w_0$  por  $\Delta w = 2p / T_0$ , e a série de Fourier torna - se :

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{X(n\Delta w)\Delta w}{2p} \right] e^{(jn\Delta w)t}$$

Para este somatório, a contribuição de um componente de frequência  $(n\Delta w)$  é  $[X(n\Delta w)\Delta w] / 2p$ .

Quando  $T_0 \rightarrow \infty$  então  $w_0 \rightarrow 0$  e  $x_{T_0}(t) = x(t)$ :

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{2p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta w) e^{(jn\Delta w)t} \Delta w$$

# Representação de Sinal Aperiódico (iv)

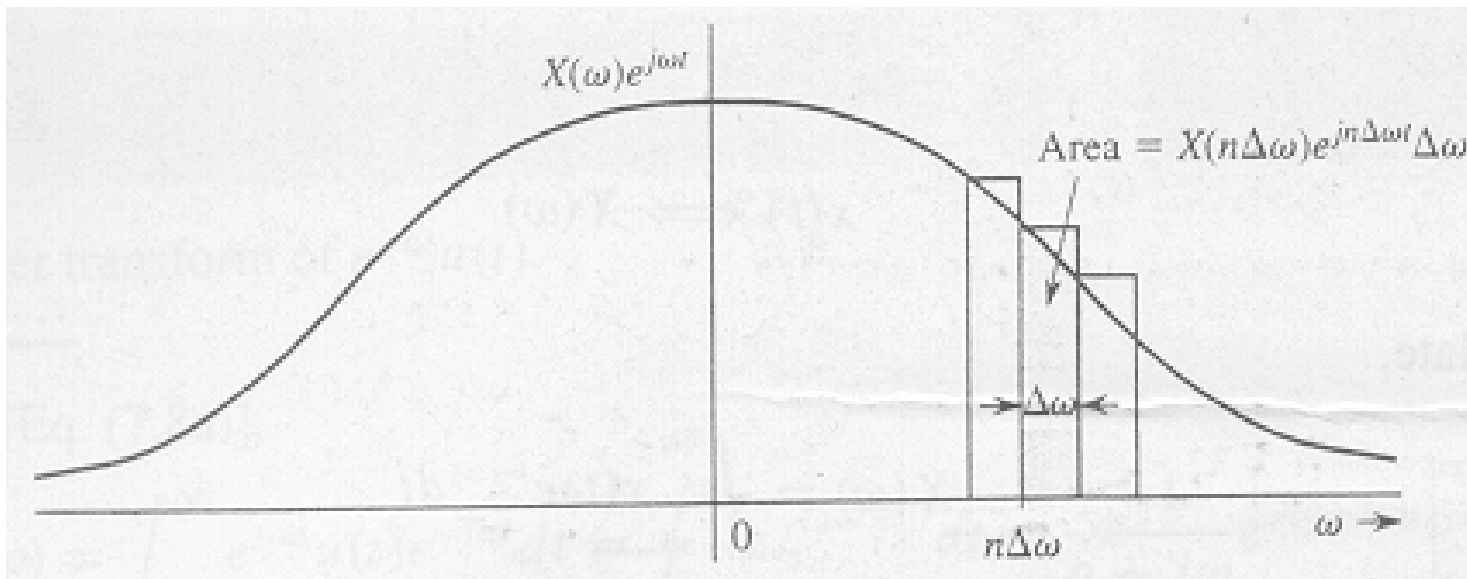
- **Definição: Integral de Fourier**

O somatório pode ser visto como uma área sob a função :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Esta é a integral de Fourier que representa o sinal aperiódico  $x(t)$ .

A integral equivale a série de Fourier com frequência fundamental  $\Delta\omega \rightarrow 0$ .



# Representação de Sinal Aperiódico (v)

- **Definições: Transformada de Fourier e sua Inversa**

- A Transformada de Fourier e sua inversa são definidas como:

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

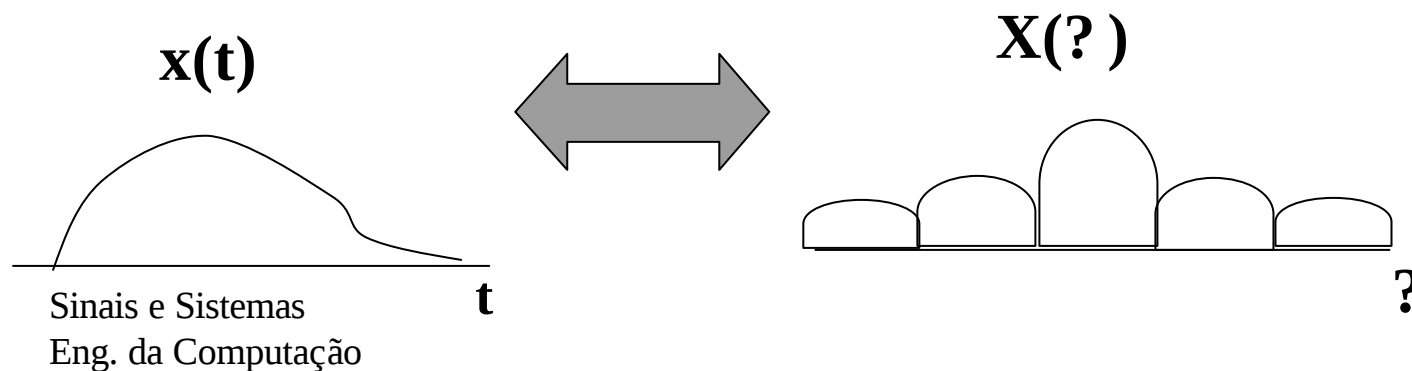
$$x(t) = F^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- O conjugado pode ser escrito como:

Por definição tem-se  $X(-\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt,$

logo  $x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega)$  - > propriedade da conjugação .

- Exemplo de transformada e sua inversa:



# Representação de Sinal Aperiódico (vi)

- **A Transformada de Fourier**

- A transformada de Fourier  $X(\omega)$  é a especificação de  $x(t)$  no domínio da frequência.

- Pode-se traçar o espectro de  $X(\omega)$  como função de  $\omega$ :

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$$

- Para um sinal  $x(t)$  real, o espectro de amplitude é uma função par e o espectro de fase é uma função ímpar de  $\omega$ .

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

$$\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$$

- A transformada de Fourier é linear

$$\text{Sejam } x_1(t) \Leftrightarrow X_1(\omega) \text{ e } x_2(t) \Leftrightarrow X_2(\omega)$$

$$\text{então } a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$$

# Representação de Sinal Aperiódico (vii)

- **Transformada de Fourier**

– Exemplo: Encontre a transformada de Fourier para o sinal:

$$x(t) = e^{-at}u(t), \text{ por definição } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Logo, } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

Tem-se que  $|e^{-j\omega t}| = 1$ , portanto

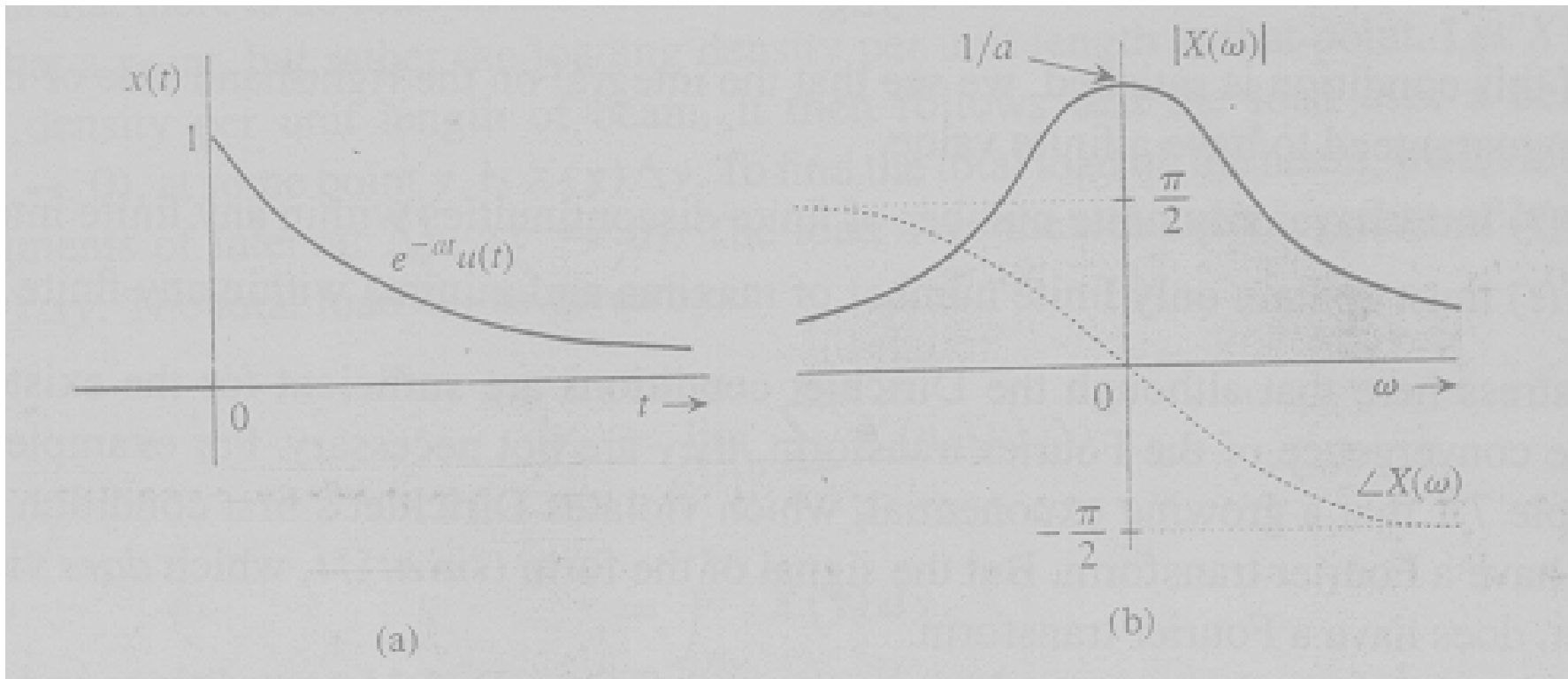
$$X(\omega) = \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \begin{cases} \infty & a < 0 \\ \frac{1}{a+j\omega} & a > 0 \end{cases}$$

$$\text{Portanto, } X(\omega) = |X(\omega)| \angle X(\omega) = \begin{cases} |X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{cases}$$

# Representação de Sinal Aperiódico (viii)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo (continuação): Traçado dos espectros de amplitude (função par) e fase (função ímpar):



# Representação de Sinal Aperiódico (ix)

- **Existência da Transformada de Fourier**

- A transformada de Fourier de uma função  $x(t)$  tem garantias de convergência se tal função satisfaz as condições de Dirichlet. Além disto, nos pontos de descontinuidade,  $x(t)$  converge para a média dos valores em cada lado da descontinuidade.
- As condições de Dirichlet (condições de suficiência) são:
  - (i) A função  $x(t)$  é absolutamente integrável :  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ .
  - (ii) A função  $x(t)$  tem que ter número finito de descontinuidades finitas em qualquer intervalo de tempo finito.
  - (iii) A função  $x(t)$  tem que ter número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito.

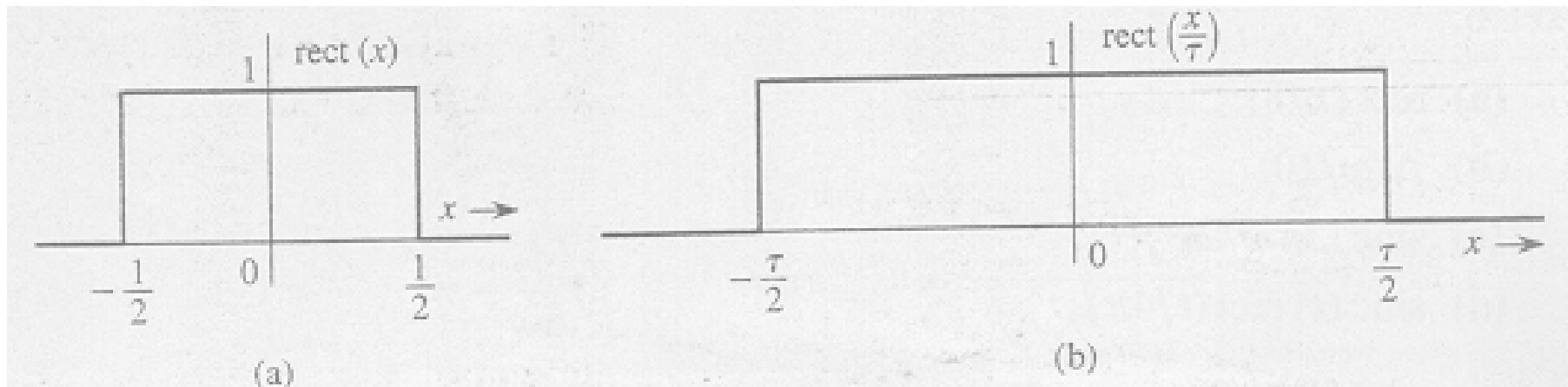
# Transformadas de Algumas Funções Úteis (i)

- **Função Portal Unitária** (*Unit Gate*)

- Esta função,  $\text{rect}(x)$ , é definida como um pulso de altura e largura unitárias, centrada na origem:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 1 & |x| < 1/2 \end{cases}$$

- Função portal: unitária e ela expandida no eixo horizontal:

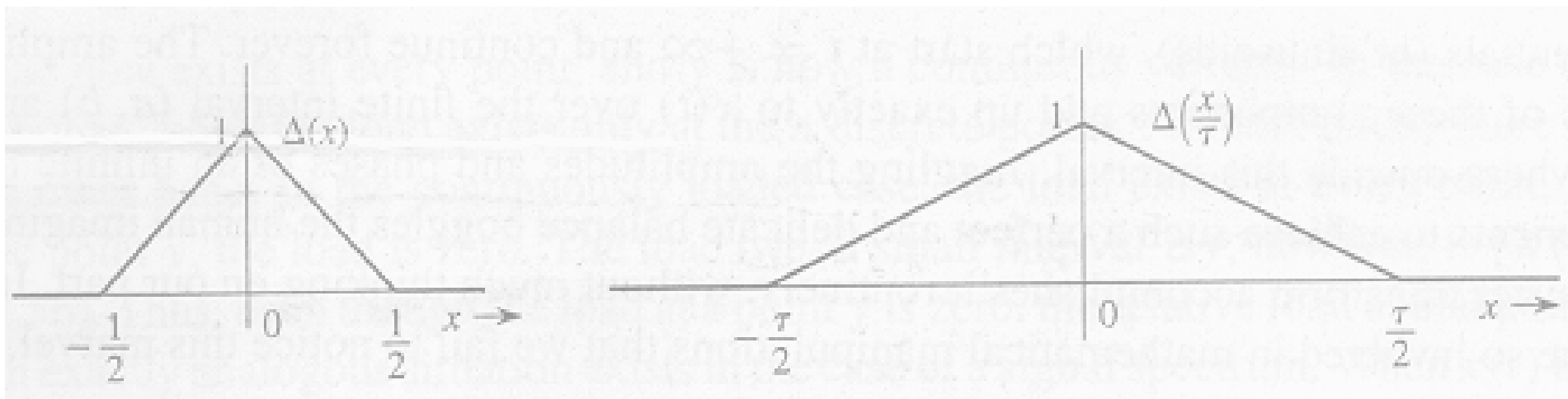


# Transformadas de Algumas Funções Úteis (ii)

- **Função Triângulo Unitária** (*Triangular Gate*)
  - Esta função é definida como um pulso triangular de altura e largura unitárias, centrada na origem:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1/2 \\ 1 - 2|x| & |x| < 1/2 \end{cases}$$

- Função triângulo: unitária e expandida no eixo horizontal:



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (iii)

- **Função Interpolação** (*Interpolation*)

- Esta função, denotada por  $\text{sinc}(x)$ , é definida a razão entre um seno e seu argumento. Ela também é conhecida como função filtrante ou interpolante.

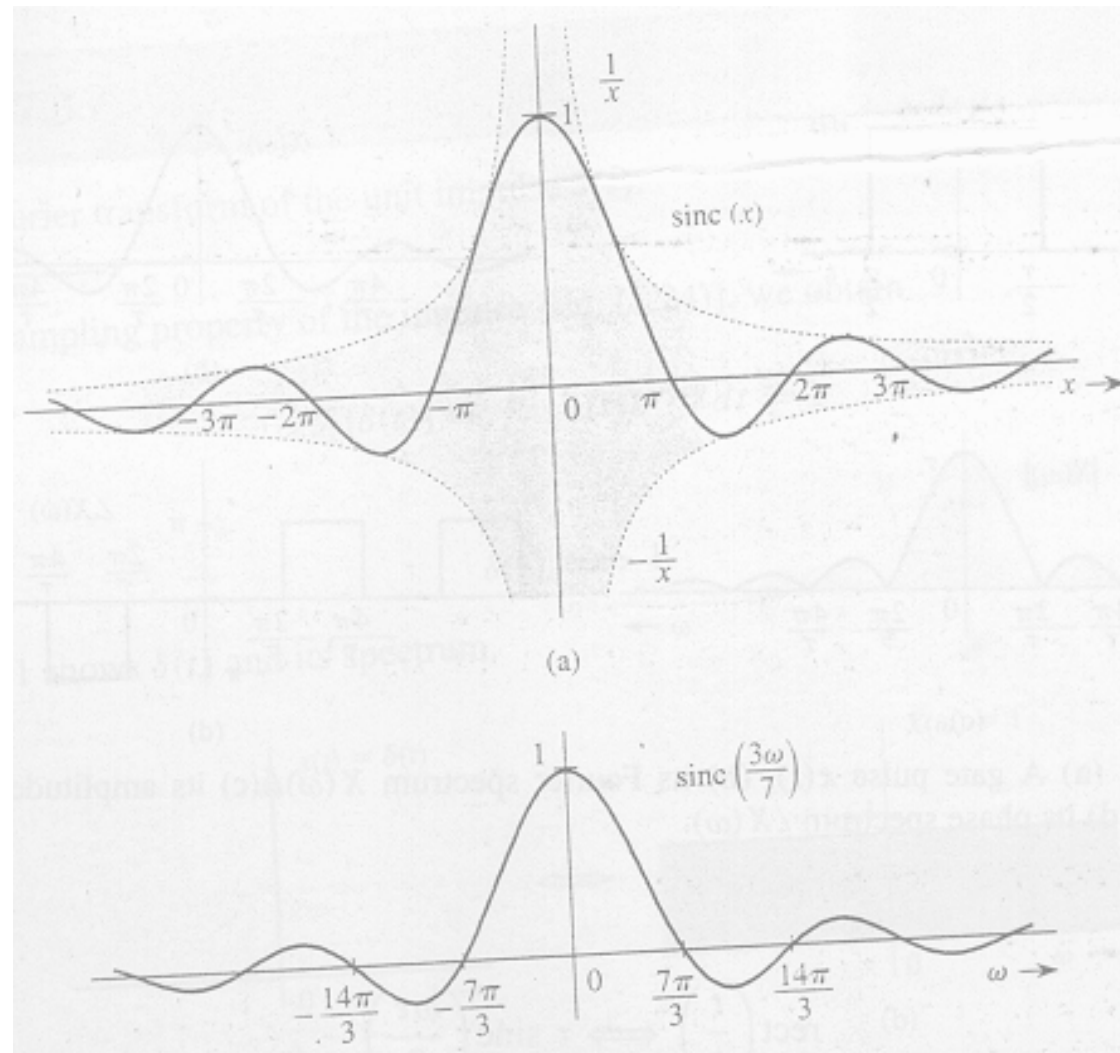
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

- Características da função:

- É função par de  $x$ .
- $\text{sinc}(x)=0$  quando  $\sin x=0$ , exceto em  $x=0$ .
- Pela regra do L'Hôpital determina-se  $\text{sinc}(0)=1$ .
- Exibe oscilações amortecidas de período  $2\pi$ , com amplitude continuamente decrescente como  $1/x$ .

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (iv)

- **Função Interpolação** (*Interpolation*)
  - Gráfico da função  $\text{sinc}(x)$ .



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (v)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo: Encontre a transformada de Fourier para o sinal:

$$x(t) = \text{rect}(t / t), \quad \text{por definição } X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Logo,  $X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t / t) e^{-j\omega t} dt$ , considerando os valores da função :

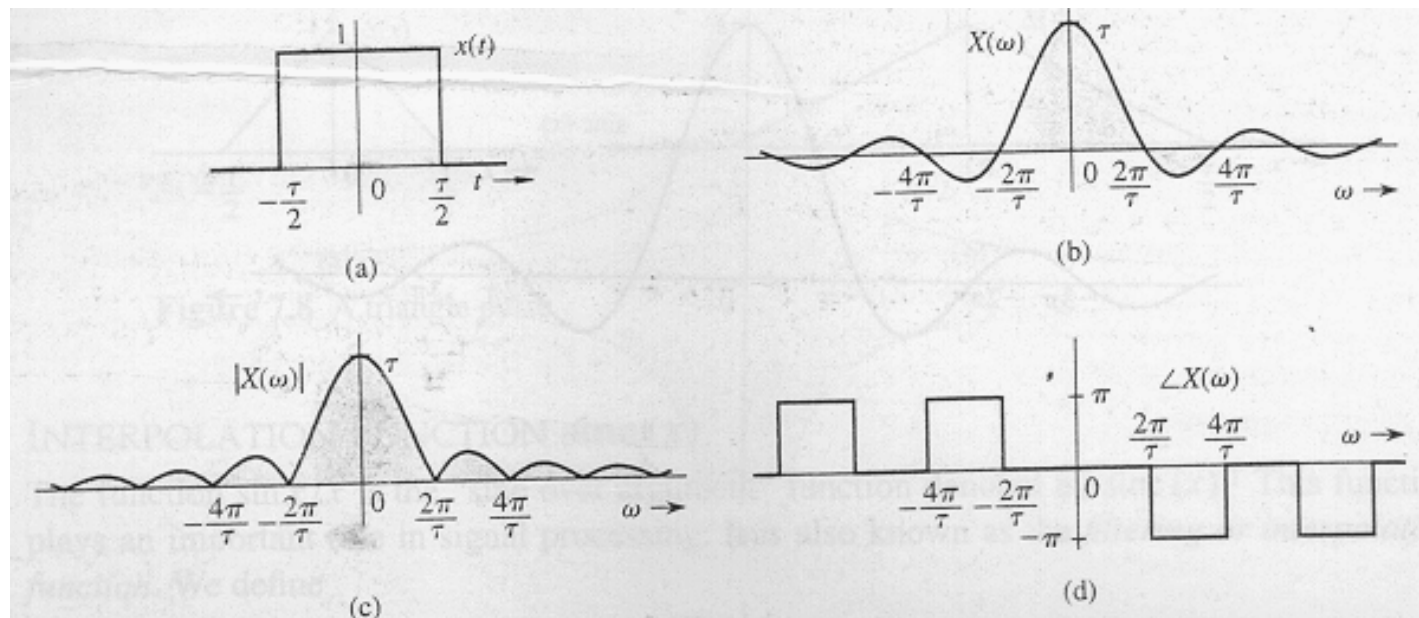
$$X(w) = \int_{-t/2}^{t/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{jt} (e^{-j\omega t/2} - e^{j\omega t/2}) = \frac{2\text{sen}\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{w} \therefore$$

$$X(w) = t \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\left(\frac{\omega t}{2}\right)} = t \text{ sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right), \quad \text{finalmente } \text{rect}\left(\frac{t}{t}\right) \Leftrightarrow t \text{ sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (vi)

- Transformada de Fourier

- Exemplo (continuação): Traçado (a) da função  $x(t) = \text{rect}(t/\tau)$ ; (b) da transformada de Fourier  $X(\omega)$ ; (c) do espectro de amplitude (função par) e (d) do espectro de fase (função ímpar).



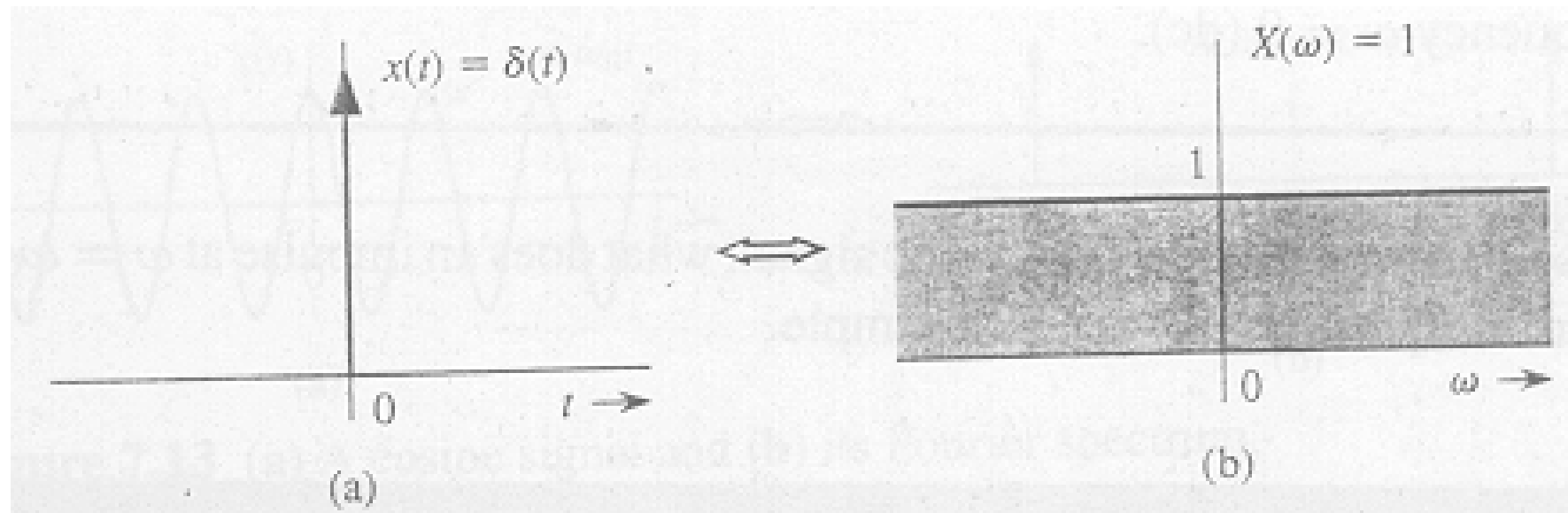
- A largura de banda de  $X(\omega)$  é infinita, contudo, este é um filtro passa baixa, no qual a maior parte do espectro concentra-se no intervalo  $[0, 2\pi/\tau]$ . Portanto, uma avaliação grosseira da largura de banda a determina como  $2\pi/\tau$  rad/s ou  $1/\tau$  Hz.

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (vii)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo: Determine a transformada de Fourier da entrada impulso  $d(t)$ .

$$F[d(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} d(t)e^{-j\omega t} dt = 1, \quad \text{ou seja } d(t) \Leftrightarrow 1$$

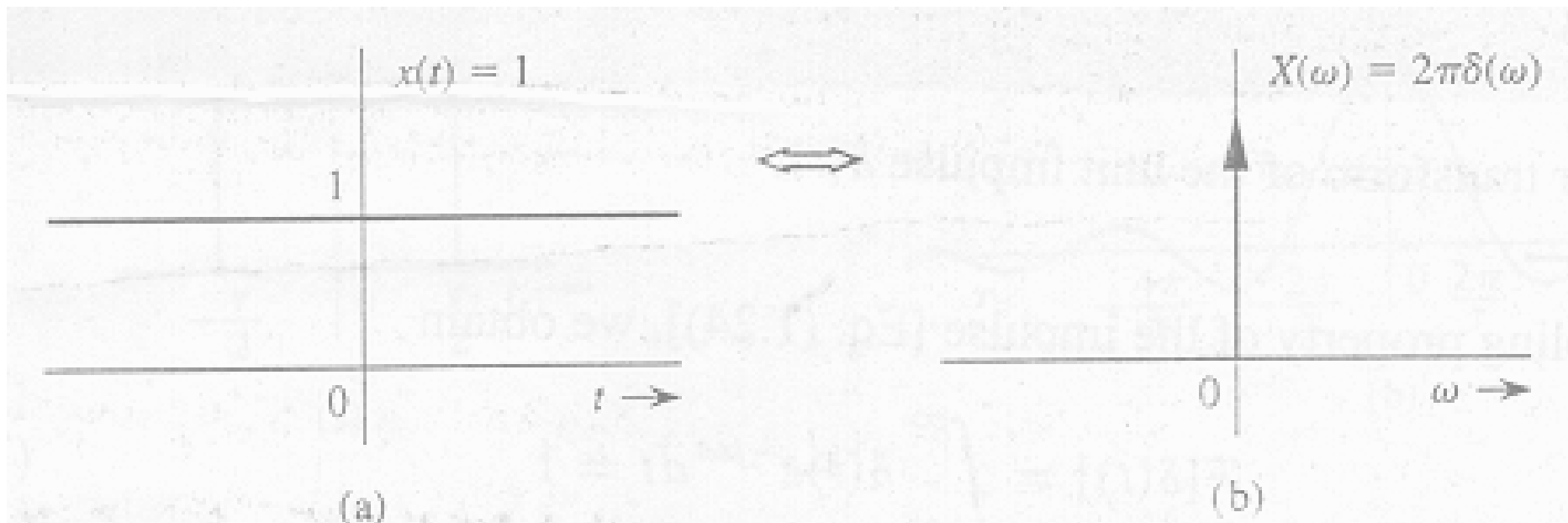


# Transformadas de Algumas Funções Úteis (viii)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo: Determine a transformada de Fourier inversa de  $d(?)$ .

$$F^{-1}[d(w)] = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} d(w) e^{j\omega t} dw = \frac{1}{2p}, \quad \text{ou seja } 1 \Leftrightarrow 2p d(w)$$



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (ix)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo: Determine a transformada de Fourier inversa de  $d(\omega - \omega_0)$ .

$$F^{-1}[d(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t},$$

ou seja  $e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi d(\omega - \omega_0)$

Este resultado mostra que o espectro de uma função exponencial inercial  $e^{j\omega_0 t}$  é um impulso simples em  $\omega = \omega_0$ .

A equação acima pode ser estendida :

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi d(\omega + \omega_0)$$

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (x)

- **Transformada de Fourier**

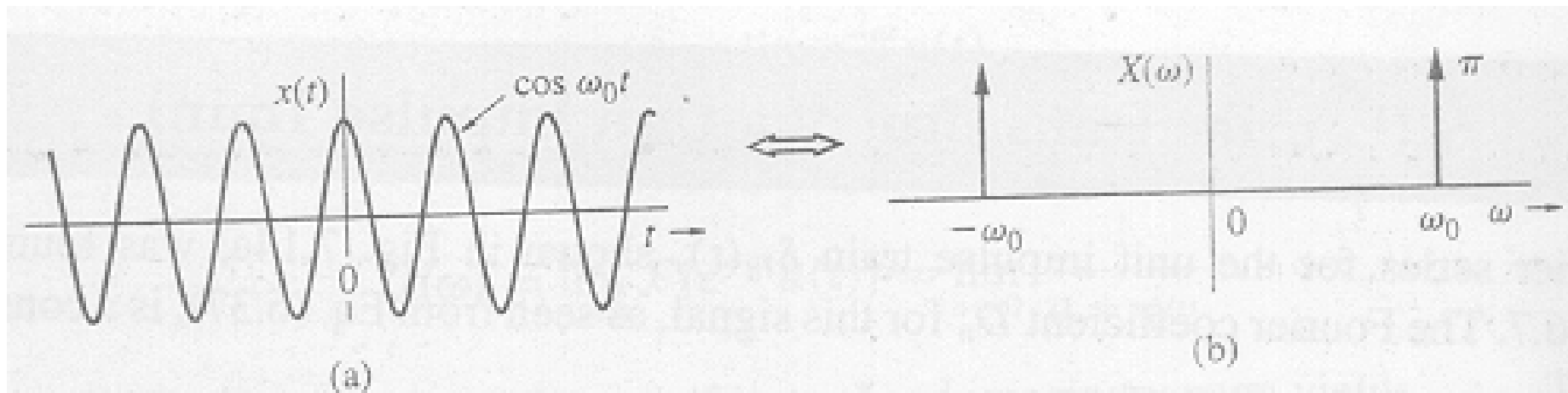
- Exemplo: Encontre a transformada de Fourier:

A fórmula de Euler determina :  $\cos w_0 t = \frac{1}{2} (e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t})$

Do exemplo anterior :  $e^{jw_0 t} \Leftrightarrow 2pd(w - w_0)$     $e^{-jw_0 t} \Leftrightarrow 2pd(w + w_0)$

Pela propriedade da linearidade :  $\cos w_0 t \Leftrightarrow p [d(w - w_0) + d(w + w_0)]$

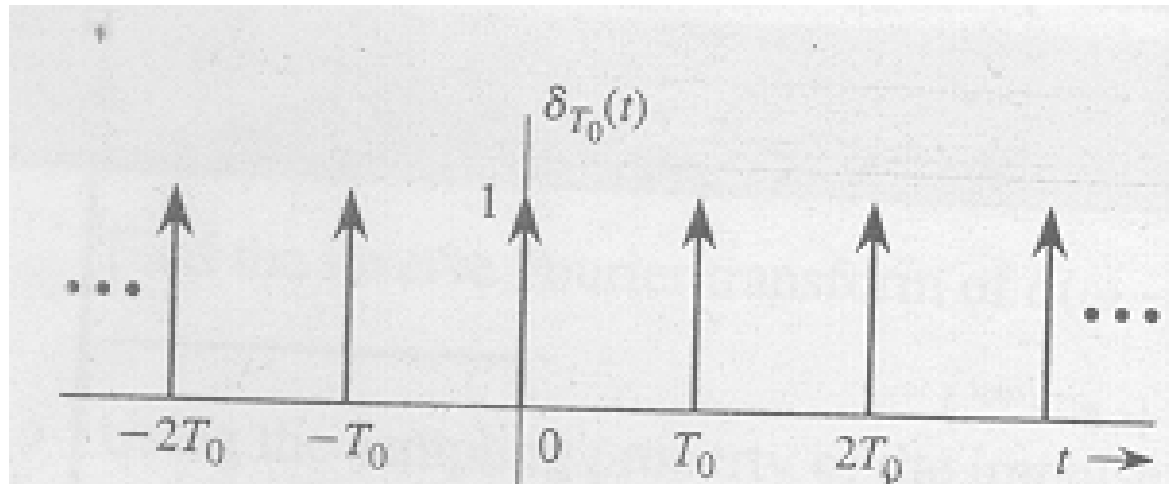
Sinal cosseno e seu espectro de Fourier



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xi)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo: Encontre a transformada de Fourier de um trem de impulsos como mostrado na figura abaixo:



No exemplo anterior mostrou - se que  $e^{jw_0 t} \Leftrightarrow 2p\delta(w - w_0)$ , assim,

um sinal expresso em série de Fourier :  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jnw_0 t}$ ,  $w_0 = \frac{2p}{T_0}$

tem sua transformada de Fourier:  $X(w) = 2p \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(w - nw_0)$ ,

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xii)

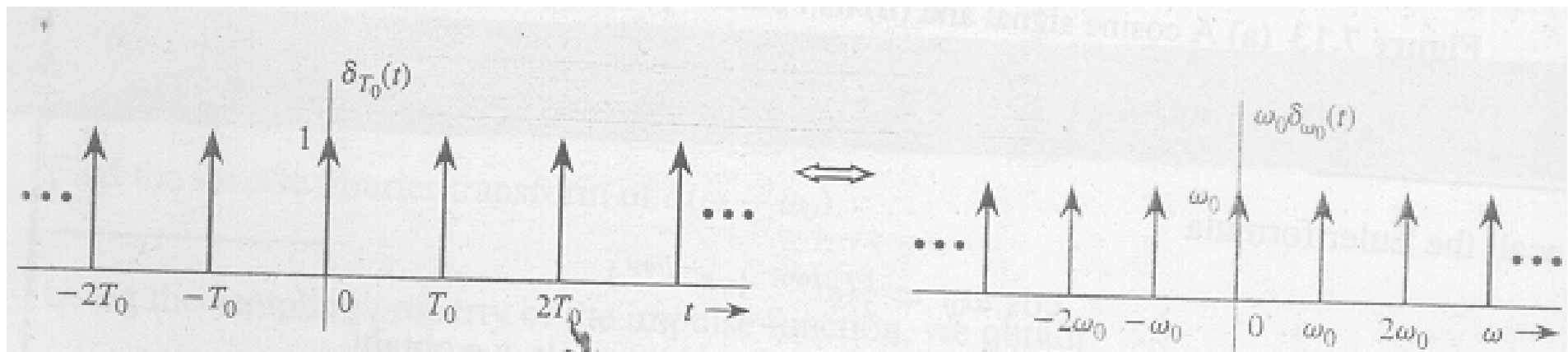
- **Transformada de Fourier**

- Exemplo (continuação):

Cálculo do coeficiente de Fourier :  $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$

Logo, a transformada de Fourier da série de Fourier é:

$$X(\omega) = \frac{2p}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n d(\omega - n\omega_0) = \omega_0 d_{\omega_0}(\omega)$$



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xiii)

- **Transformada de Fourier**

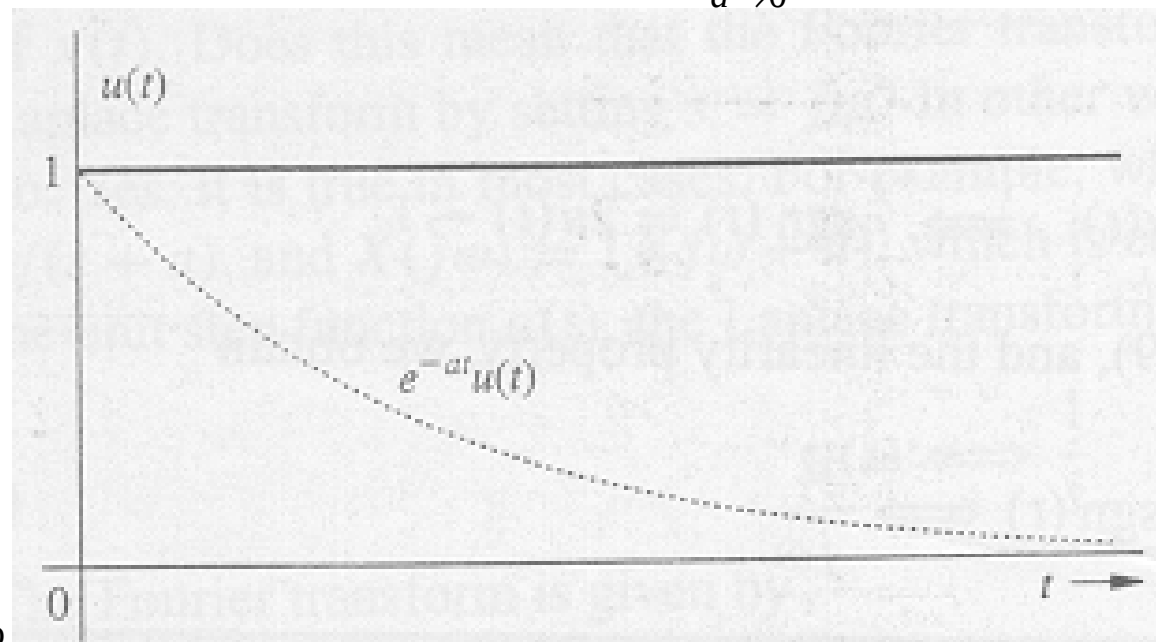
- Exemplo: Calcule a T. F. da função degrau unitária  $u(t)$ .

Por integração direta, esta integral é indeterminada :  $U(w) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt$

$$\therefore U(w) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = (-1/j\omega) e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty}$$

O limite superior de  $e^{-j\omega t}$  é indeterminado para  $t \rightarrow \infty$

Para resolver este problema, faz - se  $u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xiv)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo (continuação):

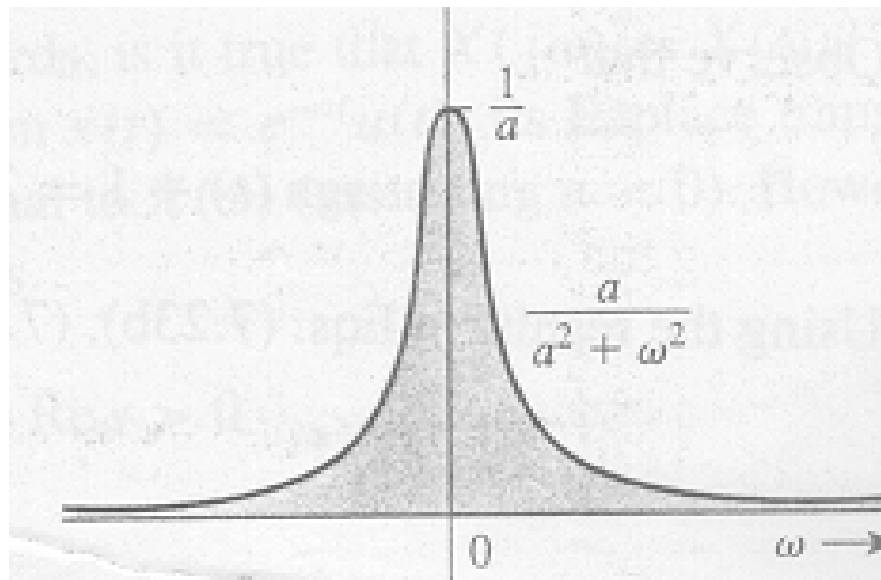
A transformada de Fourier pode ser expressa como :

$$U(w) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{a^2 + w^2} - j \frac{w}{a^2 + w^2} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{a^2 + w^2} \right] + \frac{1}{jw}, \quad \text{onde}$$

$$\text{Área sob } \frac{a}{a^2 + w^2} \text{ é } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + w^2} dw = \tan^{-1} \frac{w}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = p$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{a^2 + w^2} \right] = 0 \therefore$$

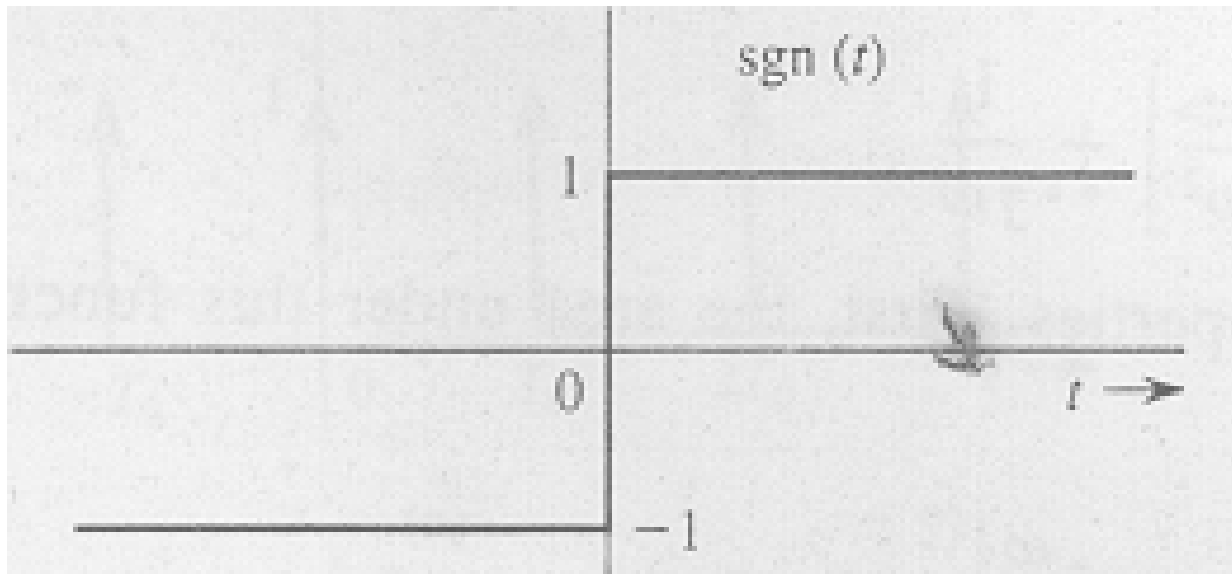
$$U(w) = p\delta(w) + \frac{1}{jw}$$



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xv)

- **Transformada de Fourier**

- Exemplo: Calcule a transformada de Fourier da função  $\text{sgn}(t)$ :



$$\text{sgn}(t) + 1 = 2u(t) \therefore \text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

Usando - se os resultados anteriores

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

# Propriedades da Transformada de Fourier (i)

- **Objetivo**

- Estudar propriedades e conhecer suas implicações e aplicações.

- **Propriedades Consideradas**

- Propriedade de Dualidade Tempo-freqüência nas Operações com Transformadas: Para qualquer resultado entre  $x(t)$  e  $X(?)$  existe uma relação dual obtida pela troca de papéis de  $x(t)$  e  $X(?)$ , pois as duas expressões são aproximadamente idênticas.
- Propriedade de Linearidade: Respeita o teorema da superposição. Permite representar um sinal como a combinação linear de outros sinais com transformadas de Fourier conhecidas.
- Conjugação e Simetria Conjugada:

Se  $x(t) \Leftrightarrow X(w)$  então  $x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-w)$

Segue - se a propriedade de simetria de conjugado  $X(-w) = X^*(w)$

# Propriedades da Transformada de Fourier (ii)

- Propriedade de Dualidade:

Se  $x(t) \Leftrightarrow X(w)$  então  $X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-w)$ , pois

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{jut} du, \text{ assim para tempo } -t, \text{ tem-se}$$

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{-jut} du, \text{ troca-se } t \text{ por } w.$$

- Operações no tempo levam a operações duais na frequência.
  - Pares de transformadas de Fourier são mutuamente duais.
- Propriedade DC: Integral de um sinal é determinada por sua T.F. em  $\omega = 0$ .
  - Relação de Parseval: A potência do sinal pode ser determinada a partir do domínio do tempo ou do domínio da frequência.

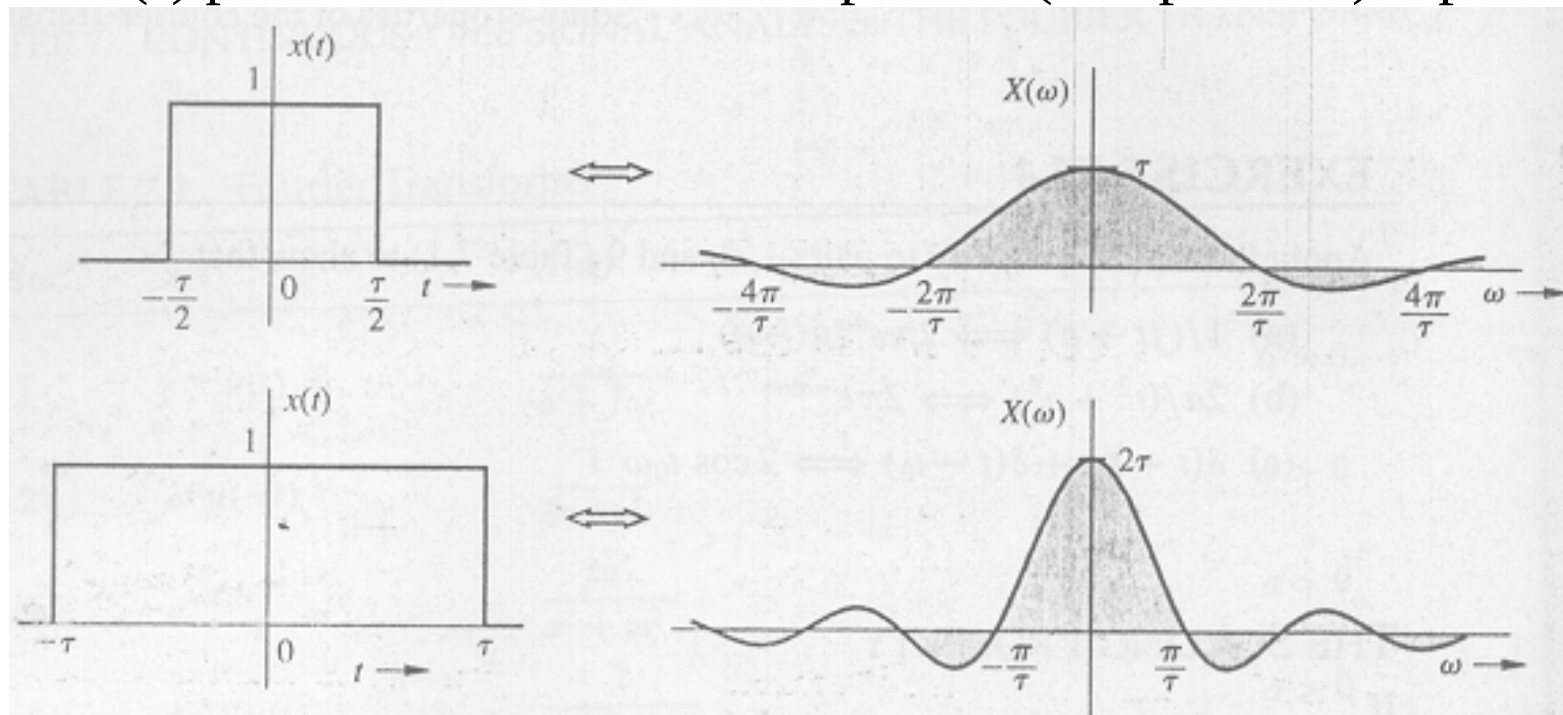
# Propriedades da Transformada de Fourier (iii)

– Propriedade de Escalonamento no Tempo:

Se  $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$  então  $x(at) \Leftrightarrow 1/|a|X(\omega/a)$ ,  $a$  é constante real.

Prova desta compressão : calcula -se  $F[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt$

Esta propriedade afirma que compressão (expansão) no tempo do sinal  $x(t)$  pelo fator  $a$  resulta em expansão (compressão) espectral.



# Propriedades da Transformada de Fourier (iv)

- Propriedade de Escalonamento no Tempo (continuação):
  - A largura de banda de um sinal é inversamente proporcional a duração ou largura deste sinal.

- Propriedade de inversão de Tempo e Freqüência:

Se  $x(t) \Leftrightarrow X(w)$  então  $x(-t) \Leftrightarrow X(-w)$ , onde  $a = -1$ .

- Propriedade de Deslocamento no Tempo:

Se  $x(t) \Leftrightarrow X(w)$  então  $x(t - t_0) \Leftrightarrow X(w)e^{-j\omega t_0}$

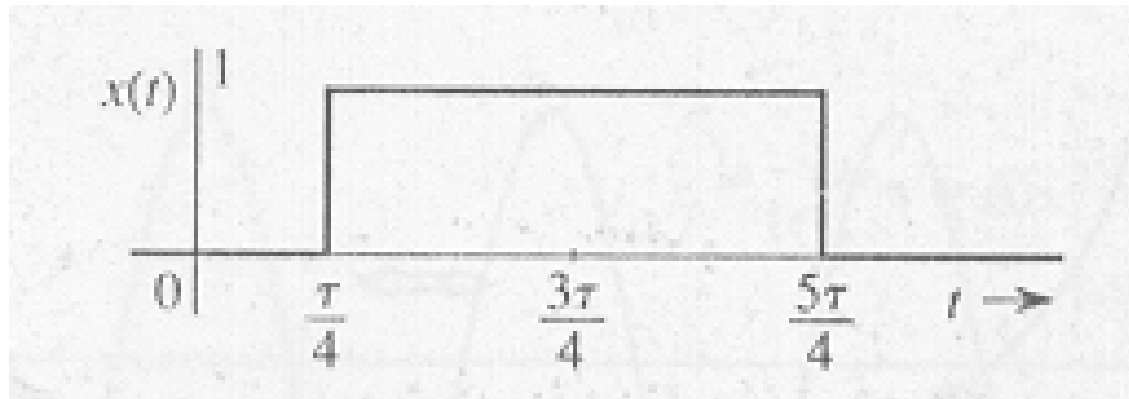
Prova : calcula - se  $F[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$

Esta propriedade afirma que atrasar um sinal  $x(t)$  em  $t_0$  segundos não modifica seu espectro de amplitude e muda seu espectro de fase em  $-\omega t_0$ .

Em outras palavras, o atraso (no tempo) em um sinal provoca um deslocamento de fase linear em seu espectro.

# Propriedades da Transformada de Fourier (v)

- Propriedade de Deslocamento no Tempo (continuação):
- Exemplo: Encontre a T.F. do pulso portal da figura abaixo:



O sinal  $x(t)$  é o pulso portal  $\text{rect}(t / \tau)$  atrasado de  $3\tau / 4$  segundos.

Aplica - se a propriedade do deslocamento no tempo :

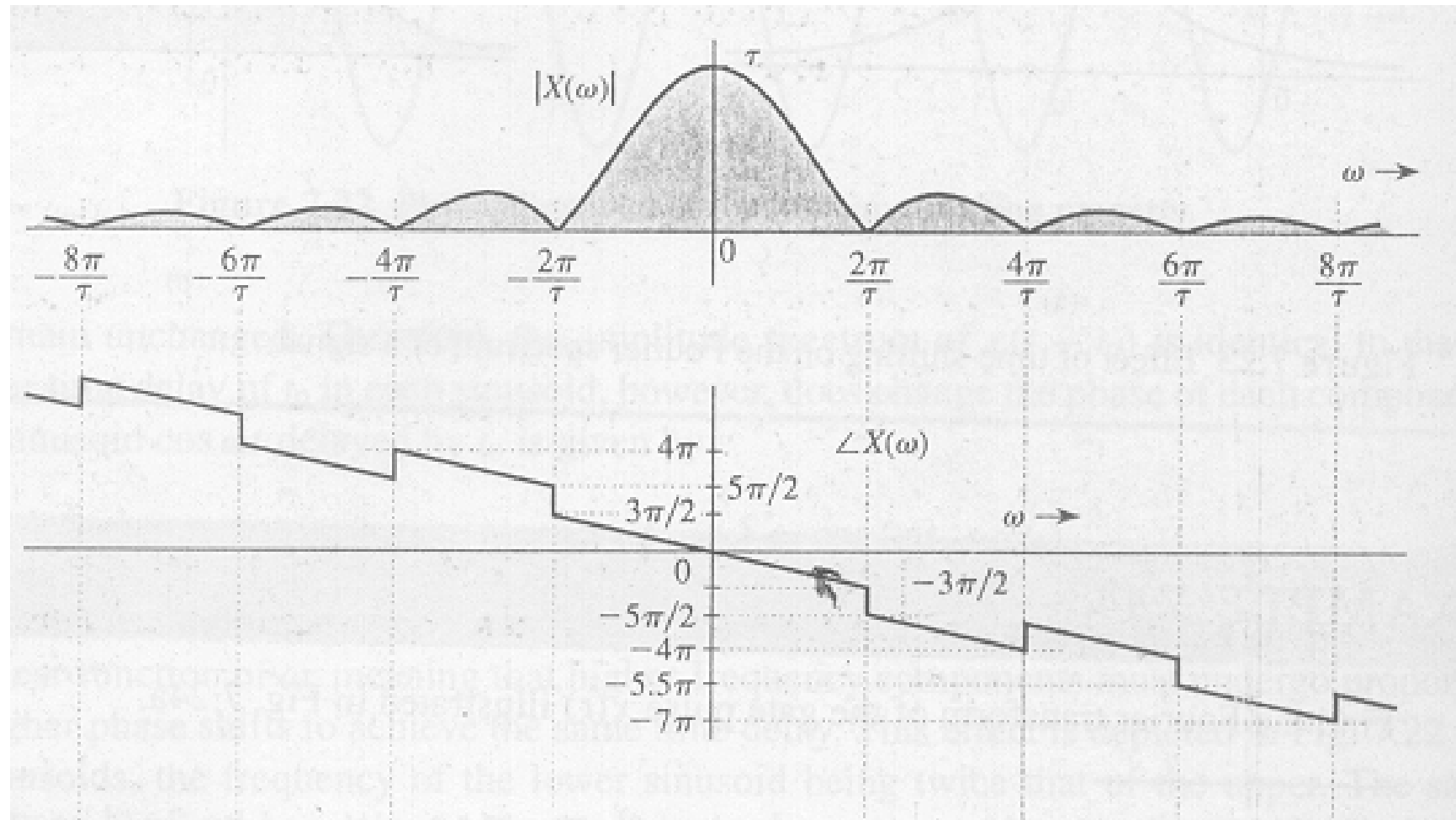
$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{ sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right), \text{ logo } \text{rect}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{3\tau}{4}\right) \Leftrightarrow \tau \text{ sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right) e^{-j\omega t_0}$$

O espectro de amplitude permanece o mesmo de  $\text{rect}(t / \tau)$ .

O espectro de fase é adicionado de um termo linear  $-\frac{3\omega\tau}{4}$ .

# Propriedades da Transformada de Fourier (vi)

- Propriedade de Deslocamento no Tempo (continuação):



# Propriedades da Transformada de Fourier (vii)

– Propriedade de Deslocamento na Freqüência:

$$x(t) \Leftrightarrow X(w), \text{ então } x(t)e^{jw_0t} \Leftrightarrow X(w - w_0)$$

$$\text{A prova é obtida calculando - se } F[x(t)e^{jw_0t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jw_0t} e^{-j\omega t} dt$$

A multiplicação de um sinal por  $e^{jw_0t}$  causa deslocamento no espectro do sinal de  $w = w_0$ .

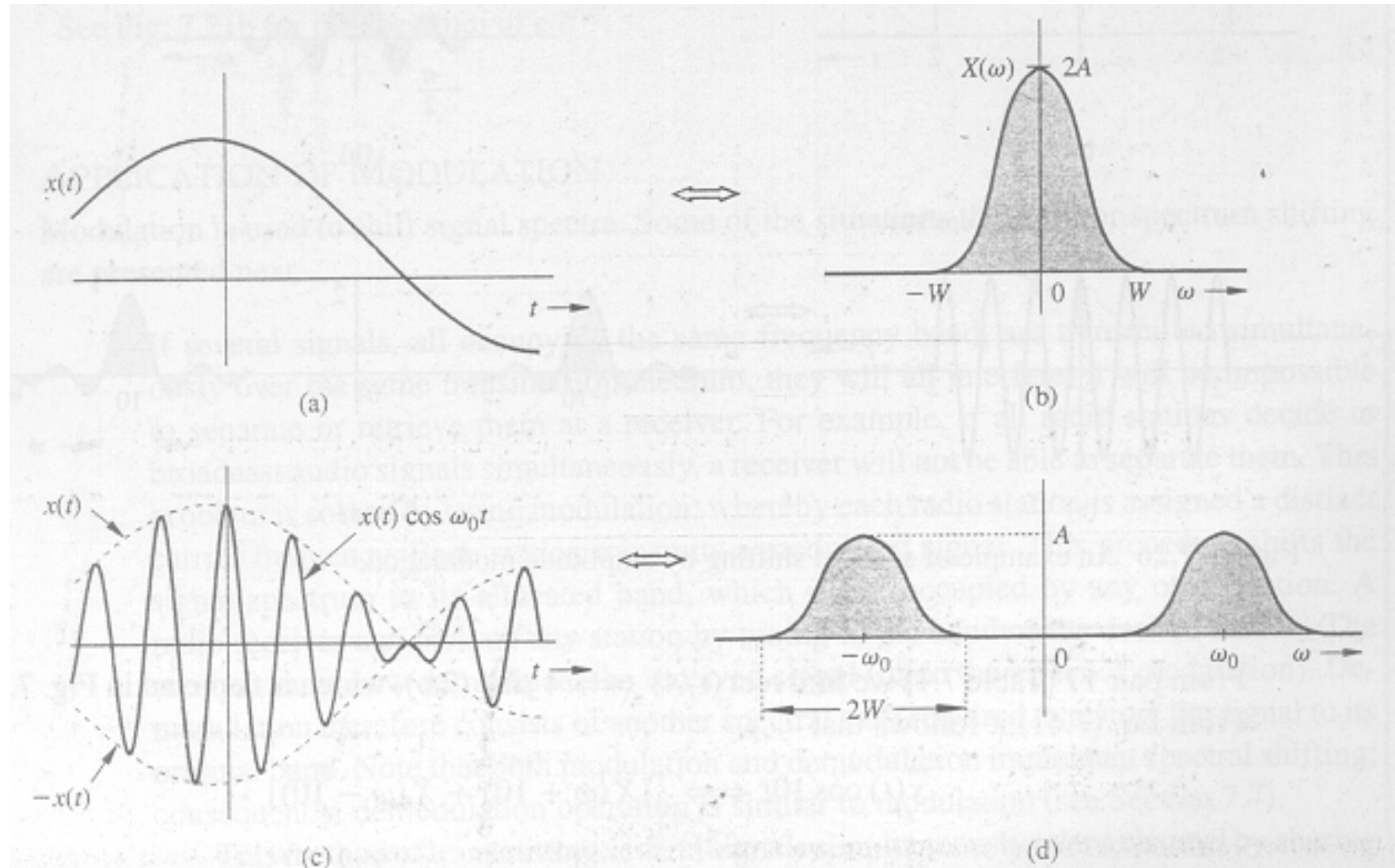
Esta propriedade é dual ao deslocamento no tempo.

Como  $e^{jw_0t}$  não é uma função real, o deslocamento na freqüência, para o mundo real, é alcançado multiplicando - se o sinal por uma senoidal :

$$x(t) \cos w_0t = \frac{1}{2} [x(t)e^{jw_0t} + x(t)e^{-jw_0t}] \Leftrightarrow \frac{1}{2} [X(w - w_0) + X(w + w_0)]$$

# Propriedades da Transformada de Fourier (viii)

– Propriedade de Deslocamento na Freqüência (continuação):



# Propriedades da Transformada de Fourier (ix)

- Propriedade de Deslocamento na Frequência (continuação):

- Multiplicação de um sinal senoidal  $\cos \omega_c t$  pelo sinal  $x(t)$  modula a amplitude da senoidal. Esta operação é chamada de modulação em amplitude. A senoidal é chamada de portadora (*carrier*) e o sinal é dito ser o sinal modulante ou modulador. O produto é chamado de sinal modulado.
- Aplicações de Modulação:
  - Multiplexação por divisão de frequência: transmissão simultânea de alguns sinais sobre um mesmo canal por compartilhamento da banda de frequência. Na prática, um dado sinal tem vários portadores (e.g., estação de rádios).
  - Redução do tamanho de antenas (que deve ter o tamanho da ordem de grandeza do sinal a ser irradiado).

# Propriedades da Transformada de Fourier (x)

- Propriedade de Convolução no Tempo e na Frequência

Se  $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(w)$  e  $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(w)$ .

Convolução no tempo  $x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(w)X_2(w)$

Convolução na frequência  $x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow (1/2p)[X_1(w) * X_2(w)]$

Prova - se por aplicação da definição.

- Propriedade de Diferenciação e Integração no Tempo:

$$x(t) \Leftrightarrow X(w),$$

$$\text{então } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow jw X(w), \text{ diferenciação no tempo} \\ \int_{-\infty}^t x(t) dt \Leftrightarrow \frac{X(w)}{jw} + p X(0)d(w), \text{ integração no tempo} \end{array} \right.$$

# Transmissão de Sinais por Sistemas LTIC (i)

- **Preliminares**

- Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  entrada e saída de sistema LTIC com resposta ao impulso  $h(t)$ , logo  $Y(?)=H(?)X(?)$  (prop. convolução no tempo).
  - Esta equação não se aplica a sistemas assintoticamente instáveis pois neste caso  $h(t)$  não é transformável por Fourier.
- Exemplo: Ache a resposta de estado zero para sist. LTIC (estável):

$$\text{Resposta ao impulso : } H(s) = \frac{1}{s+2} \therefore H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+2}$$

$$\text{Entrada : } x(t) = e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega+1}$$

$$\text{Portanto, } Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+1)}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{j\omega+2}, \quad \text{logo } y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

# Transmissão de Sinais por Sistemas LTIC (ii)

- **Entendimento Heurístico de Resposta de Sistema Linear**

- Resposta de um sistema LTIC emprega integral de convolução (domínio do tempo) e integral de Fourier (domínio da frequência):

Domínio no tempo :

$d(t) \Rightarrow h(t)$  .....resposta ao impulso

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) d(t-t) dt$  .....soma de impulsos

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t-t) dt$  .....soma de respostas ao impulso

Domínio da frequência :

$e^{j\omega t} \Rightarrow H(\omega)e^{j\omega t}$  .....resposta ao impulso

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$  .....soma de exponenciais incessantes

$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega$  .....soma de respostas às exp. incessantes

# Filtros Ideais e Práticos

- **Entendimento Heurístico de Resposta de Sistema Linear**

- Resposta de um sistema LITC emprega integral de convolução (domínio do tempo) e integral de Fourier (domínio da frequência):

Domínio no tempo :

$d(t) \Rightarrow h(t)$  .....resposta ao impulso

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) d(t-t) dt$  .....soma de impulsos

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t-t) dt$  .....soma de respostas ao impulso

Domínio da frequência :

$e^{j\omega t} \Rightarrow H(\omega)e^{j\omega t}$  .....resposta ao impulso

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$  .....soma de exponenciais incessantes

$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$  .....soma de respostas às exp. incessantes

# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 7.1-3 até 7.1-7.
  - 7.2-1, 7.2-4 até 7.2-5.
  - 7.3-1 até 7.3-4, 7.3-6, 7.3-7 e 7.3-10.
  - 7.4-1 até 7.4-3.