

ES 413 Sinais e Sistemas

Análise de Sistemas Contínuos por Série de Fourier

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo
Depto. of Sistemas de Computação
Centro de Informática - UFPE

Capítulo 6

Conteúdo

- **Introdução**
- **Representação de Sinal Periódico por Série de Fourier Trigonométrica**
- **Existência e Convergência de Série de Fourier**
- **Série de Fourier Exponencial**
- **Resposta de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas**

Introdução (i)

- Nas engenharias elétrica e de computação, os sinais costumam ser tratados em termos de seus espectros de frequência e os sistemas em termos de suas respostas de frequência.
- Este capítulo, como os próximos, discutem a representação espectral de sinais que, por sua vez, são expressos como somatórios de funções senoidais ou exponenciais.
 - Mostra-se que um sinal periódico pode ser representado por somatório de funções senoidais ou exponenciais de várias frequências.
 - Estes resultados são extensíveis a sinais aperiódicos (Cap. 7) e sinais discretos no tempo (Cap. 9) que podem ser gerados a partir de amostragem de sinais contínuos (Cap. 8).

Representação de Sinal Periódico (i)

- **Preliminares**

Seja um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 : $x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t$

O menor valor de T_0 que satisfaz a condição de periodicidade é chamado de período fundamental de $x(t)$. Este sinal caracteriza - se por :

(i) Existir no intervalo $[-\infty, \infty]$;

(ii) Ter mesma área sob o sinal pelo período T_0 :

$$\int_a^{a+T_0} x(t)dt = \int_b^{b+T_0} x(t)dt = \int_b^{b+T_0} x(t)dt, \quad \text{para } a \text{ e } b \text{ números reais};$$

(iii) Possuir, para uma senoidal ($\cos 2\pi f_0 t$ ou $\sin 2\pi f_0 t$) : frequência f_0 ,

período $T_0 = \frac{1}{f_0}$, frequência em radianos $\omega_0 = 2\pi f_0$;

(iv) Senoidal de freq. nf_0 é o n –ésimo harmônico da senoidal de freq. f_0 .

Representação de Sinal Periódico (ii)

- **Definição**

- Representação de um sinal periódico por uma série trigonométrica de Fourier:

A série trigonométrica de Fourier (para frequência fundamental ω_0) é

definida como :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Propriedade Importante : $x(t)$ é um sinal periódico com o mesmo período da fundamental ($T_0 = (1 / f_0) = (2\pi / \omega_0)$)

$$x(t + T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 (t + T_0) + b_n \sin n\omega_0 (t + T_0) \therefore$$

$$x(t + T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + n\omega_0 T_0) + b_n \sin(n\omega_0 t + n\omega_0 T_0)$$

lembrando que $\omega_0 T_0 = 2\pi$, tem-se que

Representação de Sinal Periódico (iii)

- **Definição**

- Representação de um sinal periódico por uma série trigonométrica de Fourier:

$$x(t + T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + 2pn) + b_n \sin(n\omega_0 t + 2pn) \therefore$$

$$x(t + T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = x(t)$$

- Em conclusão, um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 pode ser expresso como um somatório de uma senóide de frequência f_0 e suas harmônicas. Esta série infinita é conhecida como série de Fourier trigonométrica.

Representação de Sinal Periódico (iv)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier**

- Para determinar os coeficientes, necessita-se do cálculo de I :

$$I = \int_{T_0} \cos nw_0 t \cos mw_0 t dt = \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \cos(n+m)w_0 t dt + \int_{T_0} \cos(n-m)w_0 t dt \right] \therefore$$

$$I = \int_{T_0} \cos nw_0 t \cos mw_0 t dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T_0}{2} & n = m \end{cases}, \quad \text{analogamente tem-se}$$

$$\int_{T_0} \sin nw_0 t \sin mw_0 t dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T_0}{2} & n = m \end{cases}$$

$$\int_{T_0} \sin nw_0 t \cos mw_0 t dt = 0 \quad \forall n, m$$

Calcula-se a_0 , integrando-se os dois lados da equação da série de Fourier :

Representação de Sinal Periódico (v)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier** (continuação)

$$\int_{T_0} x(t) dt = a_0 \int_{T_0} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{T_0} \cos nw_0 t dt + b_n \int_{T_0} \sin nw_0 t dt \right] \therefore a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt,$$

pois para fun. periódicas $\int_{T_0} \cos nw_0 t dt = \int_{T_0} \sin nw_0 t dt = 0$ e $a_0 \int_{T_0} dt = a_0 T_0$.

Calcula - se a_n , multiplicando - se por os dois lados da equação da série de Fourier por $\cos mw_0 t$ e integrando - se a expressão :

$$\int_{T_0} x(t) \cos mw_0 t dt = a_0 \int_{T_0} \cos mw_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{T_0} \cos nw_0 t \cos mw_0 t dt \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{T_0} [\sin nw_0 t \cos mw_0 t dt]$$

$$\int_{T_0} \cos nw_0 t dt = 0, \quad \int_{T_0} [\sin nw_0 t \cos mw_0 t dt] = 0 \quad \text{e} \quad \int_{T_0} \cos nw_0 t \cos mw_0 t dt = ?$$

Representação de Sinal Periódico (vi)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier** (continuação)

Neste último termo todos componentes do somatório (as várias integrais para $n \neq m$) são iguais a zero, exceto aquele em que

$$n = m : \int_{T_0} \cos nw_0 t \cos mw_0 t dt = \frac{T_0}{2}$$

Logo,
$$\int_{T_0} x(t) \cos mw_0 t dt = \frac{a_n T_0}{2} \therefore a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos mw_0 t dt$$

e modo análogo (utilizando - se o multiplicador $\sin mw_0 t$) tem - se :

$$\int_{T_0} x(t) \sin mw_0 t dt = \frac{b_n T_0}{2} \therefore b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin mw_0 t dt$$

Representação de Sinal Periódico (vii)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier**

- Em resumo, seja uma série de Fourier (para um sinal real ou complexo – $x(t)$):

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nw_0 t + b_n \text{ sen } nw_0 t$$

Cujos coeficientes são dados por :

$$w_0 = 2\pi f_0 = (2\pi / T_0)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos nw_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \text{ sen } nw_0 t dt$$

Representação de Sinal Periódico (viii)

- **Forma Compacta da Série de Fourier**

- Para um sinal real, os coeficientes a_n e b_n são reais para todo n . Assim a série de Fourier pode ser expressa na sua forma compacta:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + q_n), \quad \text{cujos coeficientes são dados por :}$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

$$q_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

- Observação: Como os coeficientes e o ângulo são reais então nas próximas discussões $x(t)$ é assumida como real, a não ser quando for dito o contrário.

Representação de Sinal Periódico (ix)

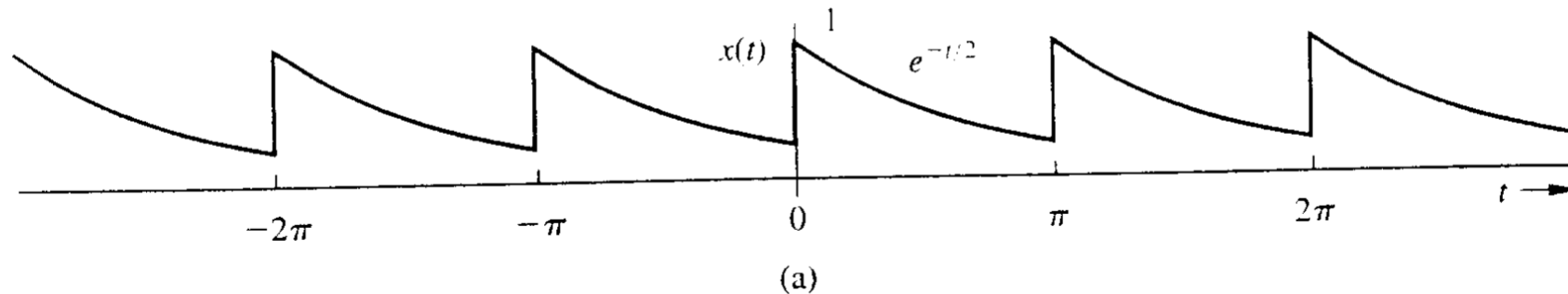
- **O Espectro de Fourier**

- Para uma série de Fourier trigonométrica e compacta, pode-se traçar o gráfico da amplitude C_n por n (espectro de amplitude) e o gráfico da fase por n (espectro de fase):
 - = Como n é proporcional à frequência $n\omega_0$, então os gráficos acima são versões escalonadas de $C_n \times \omega$ e $q_n \times \omega$.
 - = Os gráficos acima compõem os espectros de frequência de $x(t)$.
 - = Estes espectros mostram os conteúdos de frequência do sinal $x(t)$ e permitem sua reconstrução ou síntese.
- O espectro de frequência de um sinal $x(t)$ constitui sua descrição no domínio da frequência, enquanto que na descrição no domínio do tempo, o sinal é especificado como função do tempo.

Representação de Sinal Periódico (x)

- **Série de Fourier compacta**

- Exemplo: Encontre a série de Fourier trigonométrica para o sinal periódico $x(t)$, mostrado na figura abaixo.



Pela figura, $T_0 = p \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{p} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2 \text{ rad/seg}$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad \text{cujos coeficientes são dados por :}$$

Representação de Sinal Periódico (xi)

- **Série de Fourier compacta**

– Exemplo (continuação):

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{p} \int_0^p e^{-t/2} dt = -\frac{1}{2p} e^{-t/2} \Big|_0^p = 0.504$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos nw_0 t dt = \frac{2}{p} \int_0^p e^{-t/2} \cos 2nt dt \therefore$$

$$a_n = \left[\left(-\frac{1}{2} \cos 2nt + 2n \sin 2nt \right) \frac{e^{-t/2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (2n)^2} \right]_0^p = 0.504 \frac{2}{1+16n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin nw_0 t dt = \frac{2}{p} \int_0^p e^{-t/2} \sin 2nt dt = 0.504 \frac{8n}{1+16n^2}$$

Portanto, $x(t) = 0.504 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right]$ 1-14

Representação de Sinal Periódico (xii)

- **Série de Fourier compacta**

- Exemplo (continuação):

Para $x(t) = 0.504 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1+16n^2)} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right]$

Em termos de série compacta ($x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + q_n)$):

$$C_0 = a_0 = 0.504$$

$$C_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} = 0.504 \sqrt{\left(\frac{2}{1+16n^2}\right)^2 + \left(\frac{8n}{1+16n^2}\right)^2} = 0.504 \frac{2}{\sqrt{1+16n^2}}$$

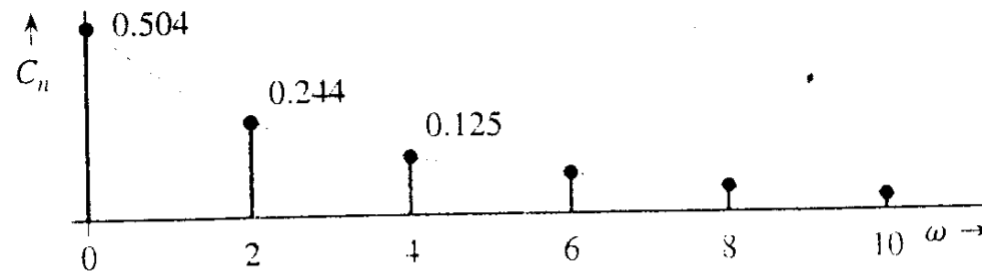
$$q_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-8n}{1+16n^2} \frac{1+16n^2}{2}\right) = \tan^{-1}(-4n) = -\tan^{-1}(4n)$$

Finalmente, $x(t) = 0.504 + 0.504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+16n^2}} \cos(2nt - \tan^{-1} 4n)$

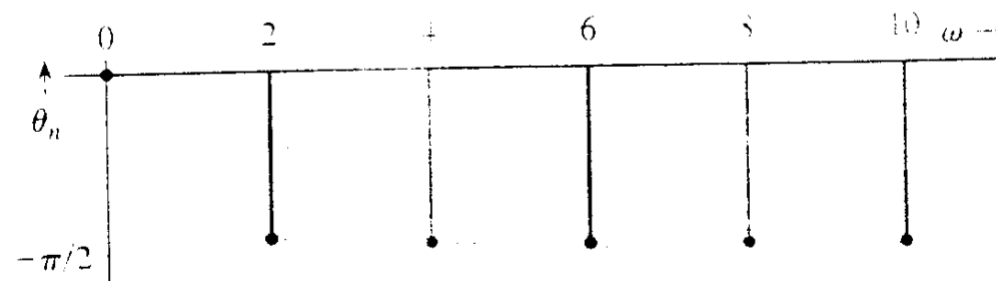
Representação de Sinal Periódico (xiii)

- **Série de Fourier compacta**

- Exemplo (continuação): Espectros da série de Fourier compacta.



(b)



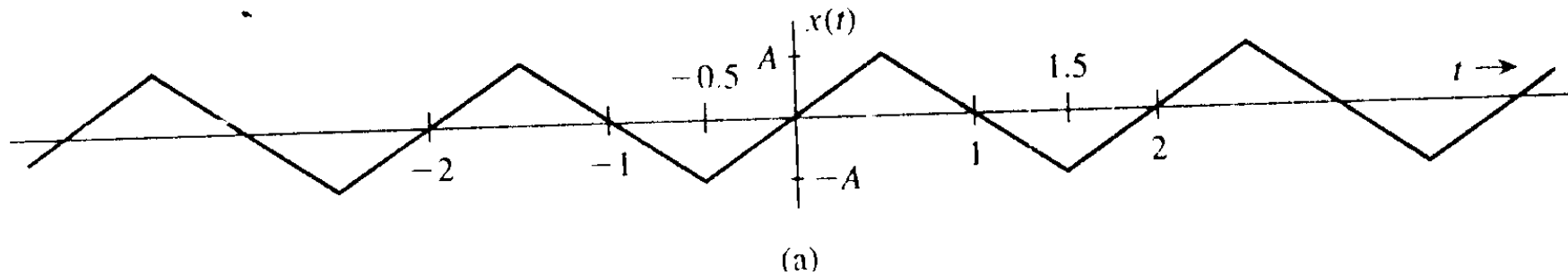
(c)

- Um sinal tem identidade dual: no domínio do tempo ($x(t)$) e no domínio da frequência (espectros de Fourier). Uma identidade complementa a outra e juntas melhoram entendimento do sinal.

Representação de Sinal Periódico (xiv)

- **Série de Fourier compacta**

- Exemplo: Ache série de Fourier trigonométrica compacta para $x(t)$.



Pela figura, $T_0 = 2 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$ rad/seg

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad \text{onde}$$

$$x(t) = \begin{cases} 2At & |t| < \frac{1}{2} \\ 2A(1-t) & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ cujos coeficientes são dados por:}$$

Representação de Sinal Periódico (xv)

- **Série de Fourier compacta**

- Exemplo (continuação):

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{3/2} x(t) dt = 0, \quad \text{pois o sinal é periódico}$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} 2At \cos np t dt + \frac{2}{2} \int_{1/2}^{3/2} 2A(1-t) \cos np t dt = 2A \int_{-1/2}^{1/2} t \cos np t dt +$$

$$2A \int_{1/2}^{3/2} \cos np t dt - 2A \int_{1/2}^{3/2} t \cos np t dt = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} 2At \sin np t dt + \frac{2}{2} \int_{1/2}^{3/2} 2A(1-t) \sin np t dt \therefore b_n = \frac{8A}{n^2 p^2} \sin\left(\frac{np}{2}\right)$$

Representação de Sinal Periódico (xvi)

- **Série de Fourier compacta**

- Exemplo (continuação):

$$\therefore b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ (8A/p^2) & \text{para } n = 1, 5, 9, 13 \dots \\ -(8A/p^2) & \text{para } n = 3, 7, 11, 15 \dots \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{8A}{p^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} (-1)^{n+1} (\text{sen}(2n-1)pt) \right]$$

Em termos de série compacta ($x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nw_0t + q_n)$):

$$C_0 = a_0 = 0; \quad C_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} = b_n,$$

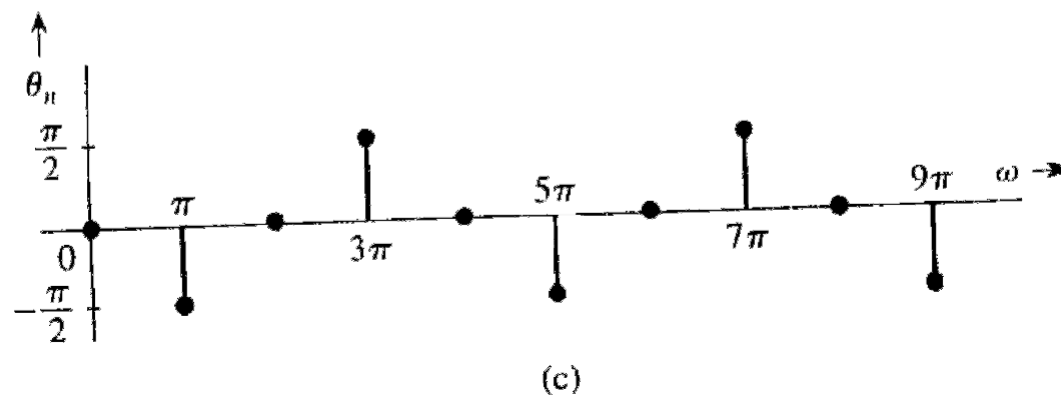
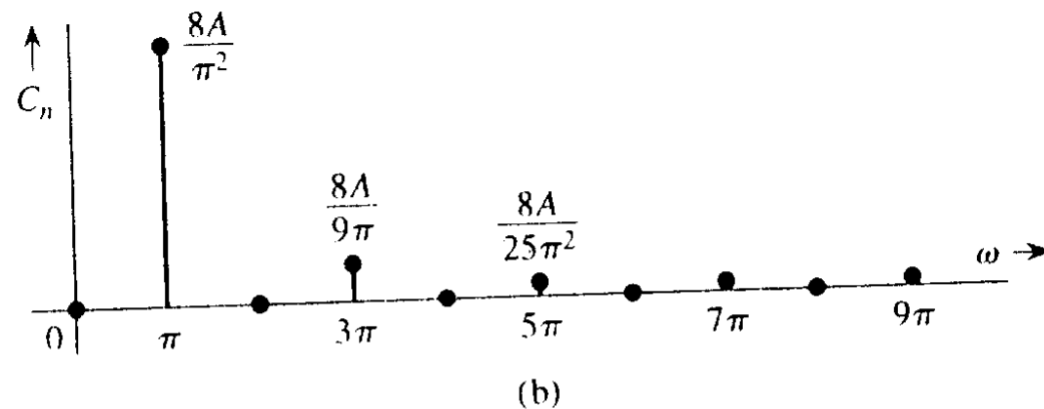
$$q_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = \tan^{-1}(-\infty) = \tan^{-1}(3p/2)$$

$$x(t) = \frac{8A}{p^2} \left[\cos(pt - \frac{p}{2}) + \frac{1}{9} \cos(3pt + \frac{p}{2}) + \frac{1}{25} \cos(5pt - \frac{p}{2}) + \frac{1}{49} \cos(7pt + \frac{p}{2}) + \dots \right]$$

Representação de Sinal Periódico (xvii)

- **Série de Fourier compacta**

- Exemplo (continuação): Espectros da série de Fourier trigonométrica compacta para um sinal periódico triangular.



Representação de Sinal Periódico (xviii)

- Um sinal periódico pode ser representado por um somatório senoidais ou de exponenciais. Se a frequência do sinal periódico for f_0 o sinal pode ser expresso por uma soma ponderada de uma senóide de frequência f_0 e seus harmônicos. O sinal periódico pode ser reconstruído a partir do conhecimento das amplitudes e fases dos componentes senoidais.
- Se um sinal periódico $x(t)$ tiver:
 - Simetria par então a série de Fourier só contém termos em cosseno e o termo DC.
 - Simetria impar então a série de Fourier só contém termos em seno.
 - Nenhuma simetria então a serie de Fourier contém ambos termos.

Existência e Convergência de SF (i)

- **Observações**

- Para existir, uma série trigonométrica de Fourier, deve ter seus coeficientes finitos. A existência destes coeficientes é assegurada se $x(t)$ for absolutamente integrável sobre um período:

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

- Em pontos de descontinuidade, a série de Fourier $x(t)$ converge para a média dos valores de $x(t)$ em ambos os lados das descontinuidades.
- O espectro de amplitude da série de Fourier para um sinal periódico $x(t)$ com saltos de descontinuidade decai suavemente com a frequência. Neste caso, são necessários vários termos na série de Fourier para aproximar $x(t)$ de uma faixa de erro desejada.
- O espectro de amplitude da série de Fourier para um sinal periódico $x(t)$ suave decai rapidamente com a frequência e poucos termos são necessários para aproximar $x(t)$ de uma faixa de erro desejada.

Série de Fourier Exponencial (i)

- **Motivação:**

- Utilizar a equação de Euler para expressar as funções senoidais em termos de funções exponenciais. Em seguida, escrever as séries de Fourier em termos de exponenciais.

A equação de Euler é dada por :

$$\begin{cases} \cos j = (1/2)(e^{jj} + e^{-jj}) \\ \sin j = (1/2j)(e^{jj} - e^{-jj}) \end{cases} \text{ que é equivalente a } \begin{cases} e^{jj} = \cos j + j \sin j \\ e^{-jj} = \cos j - j \sin j \end{cases}$$

Pode - se definir a série de Fourier exponencial para um sinal periódico :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jnw_0t}, \text{ note que } n \text{ varia de } [-\infty, \infty].$$

Para escrever a série é necessário calcular os valores de D_n : multiplica - se ambos os lados da eq. por e^{-jmw_0t} (m inteiro) e os integra sobre um período.

Série de Fourier Exponencial (ii)

- **Definição:**

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j m \omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \int_{T_0} e^{j(n \omega_0 t - m \omega_0 t)} dt$$

$$\int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} \int_{T_0} e^{j(0)} dt = T_0 & m = n \\ \int_{T_0} \cos(n-m)\omega_0 t + j \sin(n-m)\omega_0 t dt = 0 & m \neq n \end{cases}$$

Logo, a primeira integral acima pode ser re - escrita :

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt = D_n T_0 \therefore D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$$

– Note que, a série de Fourier exponencial:

- Tem forma mais compacta que a série trigonométrica;
- Tem expressão para cálculo dos coeficientes da série mais compacta que a série trigonométrica.

Série de Fourier Exponencial (iii)

- **Coeficientes da SF Trigonométrica e da SF Exponencial:**

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

Para $n = 0$ tem-se $D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^0 dt \therefore D_0 = a_0$

Para $n \neq 0$, tem-se :

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) [\cos nw_0 t - j \operatorname{sen} nw_0 t] dt \therefore$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos nw_0 t dt - \frac{j}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} nw_0 t dt = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad e$$

$$D_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos nw_0 t dt + \frac{j}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} nw_0 t dt = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

Série de Fourier Exponencial (iv)

- **Coeficientes da SF Trigonométrica e da SF Exponencial:**

- Os resultados anteriores são válidos para sinal $x(t)$ real ou complexo.
- Se o sinal e seus coeficientes forem reais, tem-se que D_n e D_{-n} são conjugados. Além disto,

$$a_n - jb_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} e^{j \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)} = C_n e^{jq_n} \therefore \begin{cases} D_0 = a_0 = C_0 \\ D_n = \frac{1}{2} C_n e^{jq_n} \\ D_{-n} = \frac{1}{2} C_n e^{-jq_n} \end{cases}$$

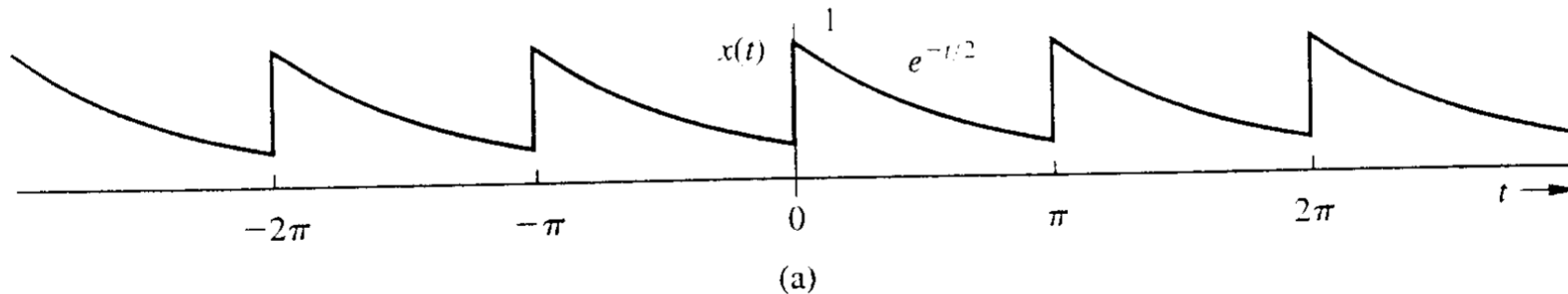
$$\text{Portanto, } |D_n| = |D_{-n}| = \frac{1}{2} C_n \quad n \neq 0$$

$$\angle D_n = q_n \quad \angle D_{-n} = -q_n$$

Série de Fourier Exponencial (v)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo: Encontre a série de Fourier exponencial para o sinal periódico $x(t)$, mostrado na figura abaixo.



Pela figura, $T_0 = p \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{p} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2 \text{ rad/seg}$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt}$ cujos coeficientes são dados por :

Série de Fourier Exponencial (vi)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo (continuação):

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt;$$

$$D_n = \frac{1}{p} \int_0^p e^{-t/2} e^{-j2nt} dt = \frac{1}{p} \int_0^p e^{-(\frac{1}{2} + j2n)t} dt = \frac{-1}{p(\frac{1}{2} + j2n)} e^{-(\frac{1}{2} + j2n)t} \bigg|_0^p = \frac{0.504}{1 + j4n}$$

$$\text{Portanto, } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-jn\omega_0 t} \therefore x(t) = 0.504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j4n} e^{j2nt}$$

- Observações :

= Os coeficientes D_n são complexos;

= D_n e D_{-n} são conjugados.

Série de Fourier Exponencial (vii)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo (continuação):

Para traçar os espectros exponenciais, utiliza - se as partes imaginária e real de D_n , ou a magnitude e o ângulo de D_n . Nesta opção, os coeficientes são expressos em sua forma polar $|D_n|e^{j\angle D_n}$.

$$D_n = \frac{0.504}{1 + j4n}; \quad |D_n| = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}; \quad \angle D_n = \tan^{-1}(-b_n / a_n), \quad \text{então :}$$

$$D_0 = \frac{0.504}{1 + j4(0)} = 0.504 \Rightarrow |D_0| = 0.504 \quad \angle D_0 = 0^\circ$$

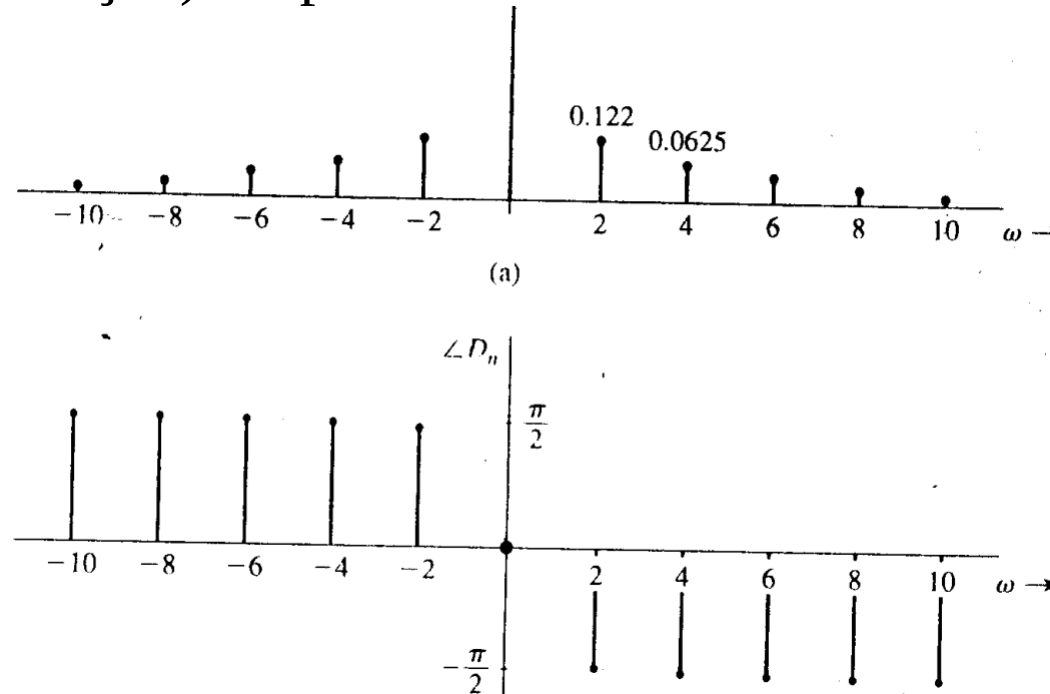
$$D_1 = \frac{0.504}{1 + j4(1)} = \frac{0.504}{17}(1 - j4) \Rightarrow |D_1| = 0.122 \quad \angle D_1 = -75.96^\circ$$

$$D_{-1} = \frac{0.504}{1 + j4(-1)} = \frac{0.504}{17}(1 + j4) \Rightarrow |D_{-1}| = 0.122 \quad \angle D_{-1} = 75.96^\circ \quad \dots$$

Série de Fourier Exponencial (viii)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo (continuação): Espectros da série de Fourier exponencial.

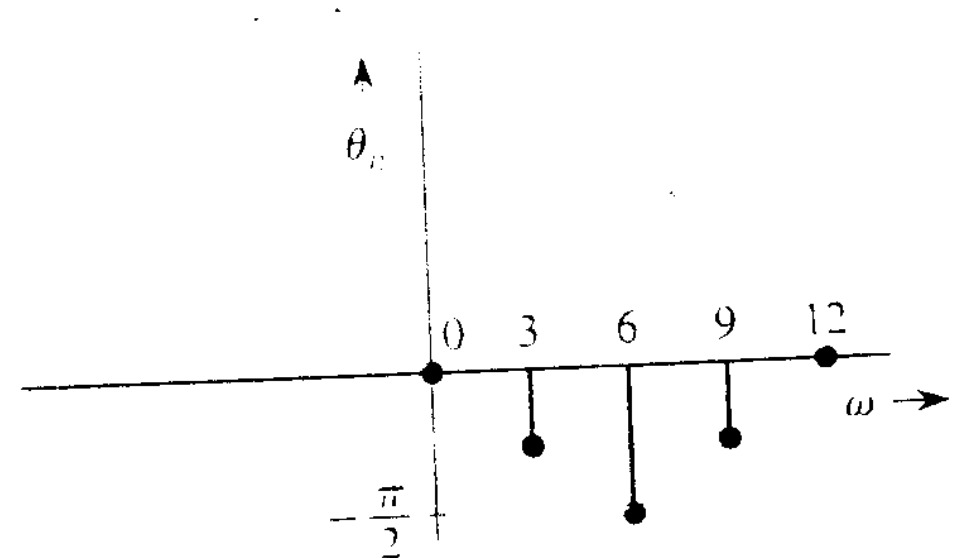
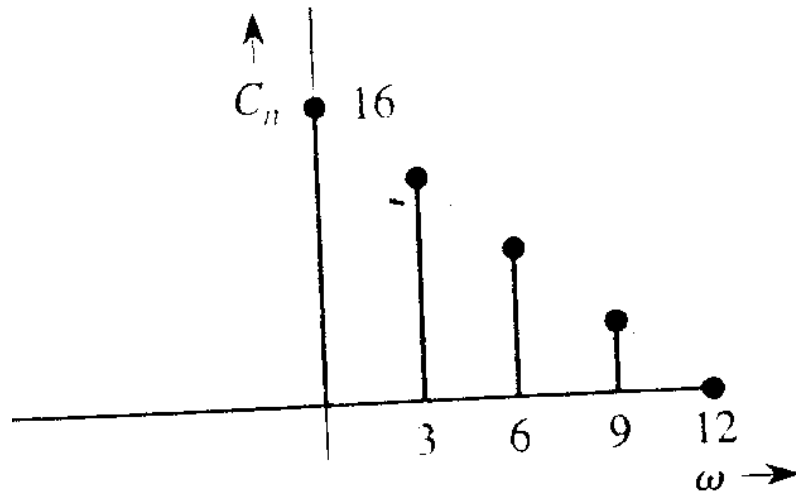


- O espectro de amplitude é uma função par de ? e o espectro de ângulo é uma função ímpar de ? .
- Consideração de valores negativos de frequências ($\omega = -n\omega_0$) indica que um componente exponencial ($\exp(-jn\omega_0 t)$) existe na série.

Série de Fourier Exponencial (ix)

- **Série de Fourier Exponencial**

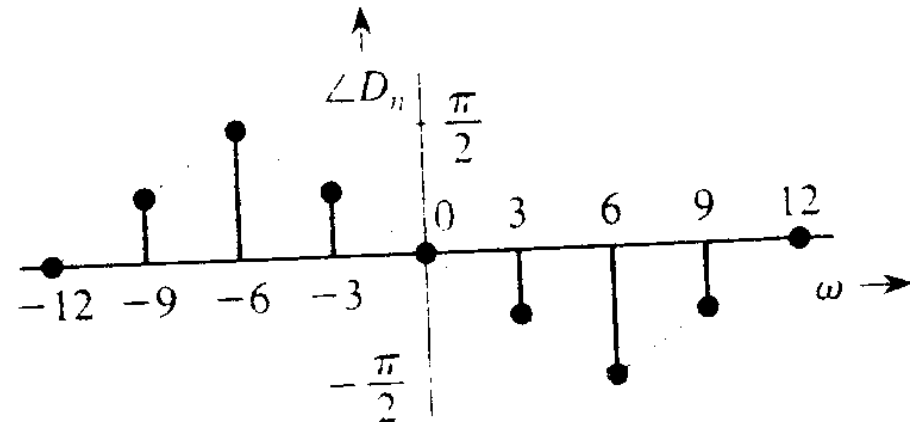
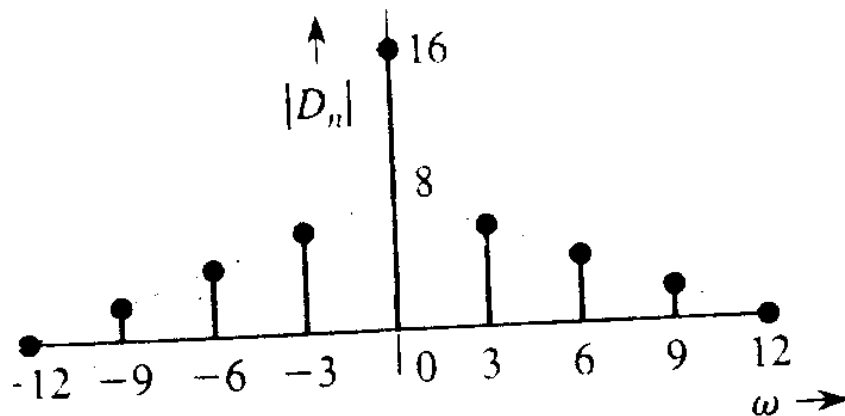
- Exemplo: Dado os espectros de uma série de Fourier trigonométrica, esboce o espectro da série de Fourier exponencial e verifique os resultados analiticamente.



Série de Fourier Exponencial (x)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo: Os componentes nos espectros trigonométricos geram os mesmos componentes nos espectros exponenciais e seus simétricos com relação à origem. As amplitudes são divididas por dois e os ângulos são os mesmos.



Série de Fourier Exponencial (xi)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo (continuação):

Série de Fourier trigonométrica compacta : $x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + q_n)$

$$x(t) = 16 + 12 \cos\left(3t - \frac{p}{4}\right) + 8 \cos\left(6t - \frac{p}{2}\right) + 4 \cos\left(9t - \frac{p}{4}\right)$$

Para a série de Fourier exponencial : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

$$x(t) = 16 + [6e^{-jp/4} e^{j3t} + 6e^{jp/4} e^{-j3t}] + [4e^{-jp/2} e^{j6t} + 4e^{jp/2} e^{-j6t}] + \\ + [2e^{-jp/4} e^{j9t} + 2e^{jp/4} e^{-j9t}]$$

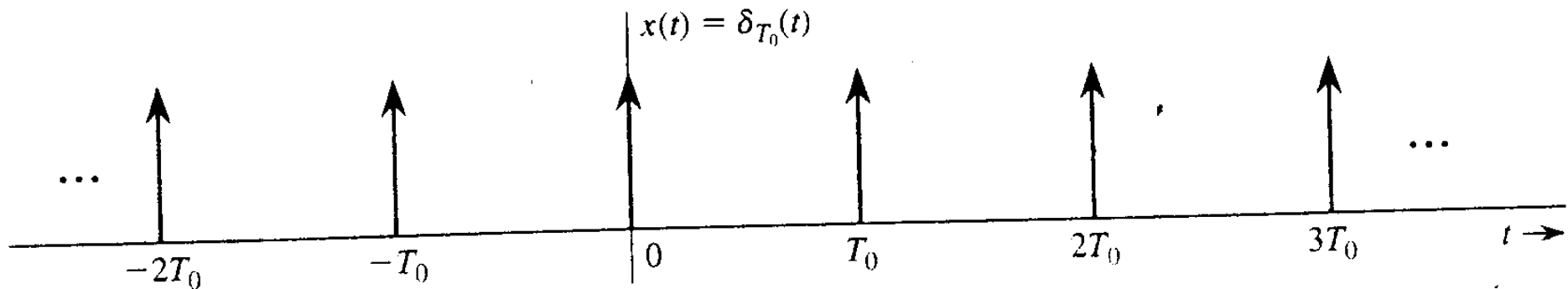
$$x(t) = 16 + 6[e^{j(3t-p/4)} + e^{-j(3t-p/4)}] + 4[e^{j(6t-p/2)} + e^{-j(6t-p/2)}] + \\ + [2e^{j(9t-p/4)} + 2e^{-j(9t-p/4)}]$$

logo as expressões são idênticas.

Série de Fourier Exponencial (xii)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo: encontre a série de Fourier exponencial e trace seus espectros para um trem de impulsos (figura abaixo). A partir deste resultado, esboce os espectros trigonométricos e escreva as séries de Fourier trigonométrica.



Trem de impulsos : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t - nT_0) \equiv d_{T_0}$, na figura $w_0 = 2\pi / T_0$

Série: $x(t) = d_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$, onde $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} d_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Série de Fourier Exponencial (xiii)

- **Série de Fourier Exponencial**

- Exemplo (continuação):

Escolhe - se o intervalo de integração $(-T_0/2, T_0/2)$ onde $d_{T_0}(t) = d(t)$:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \therefore D_n = \frac{1}{T_0}$$

Substituindo na série de Fourier : $x(t) = d_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t}$

Para o espectro trigonométrico : $|D_n| = |D_{-n}| = \frac{1}{2} C_n \quad n \neq 0; \quad \angle D_n = q_n$

$$C_0 = D_0 = \frac{1}{T_0}; \quad C_n = 2|D_n| = \frac{2}{T_0}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad q_n = 0^\circ, \quad \text{a série é}$$

$$d_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} [1 + 2(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \dots)]$$

Série de Fourier Exponencial (xiv)

- **Largura de Banda (Bandwidth) de um Sinal:**
 - A largura de banda (ou de faixa) de um sinal é a diferença entre a menor e a maior componente de frequência das componentes espectrais do sinal (valores negativos não são considerados).
- **Efeito de Simetria em Série de Fourier Exponencial:**
 - Para $x(t)$ tendo simetria par, $b_n=0$, $D_n=a_n/2$ (valor real):
 - Ângulo de D_n pode ser 0 ou $\pm p$.
 - Calcular D_n só requer integração sobre metade do período.
 - Para $x(t)$ com simetria ímpar, $a_n=0$, $D_n=-jb_n/2$ (valor imaginário):
 - Ângulo de D_n pode ser 0 ou $\pm p$.
 - Calcular D_n só requer integração sobre metade do período.

Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (i)

- **Definição**

- Um sinal periódico pode ser expresso pelo somatório de exponenciais (ou senoidais) não cessantes.
- A maneira conhecida de determinar a resposta em um sistema LTIC pode ser empregada para determinar respostas de um sistema LTIC a entradas periódicas. Assim, um sinal periódico $x(t)$ de entrada com período T_0 pode ser expresso como:

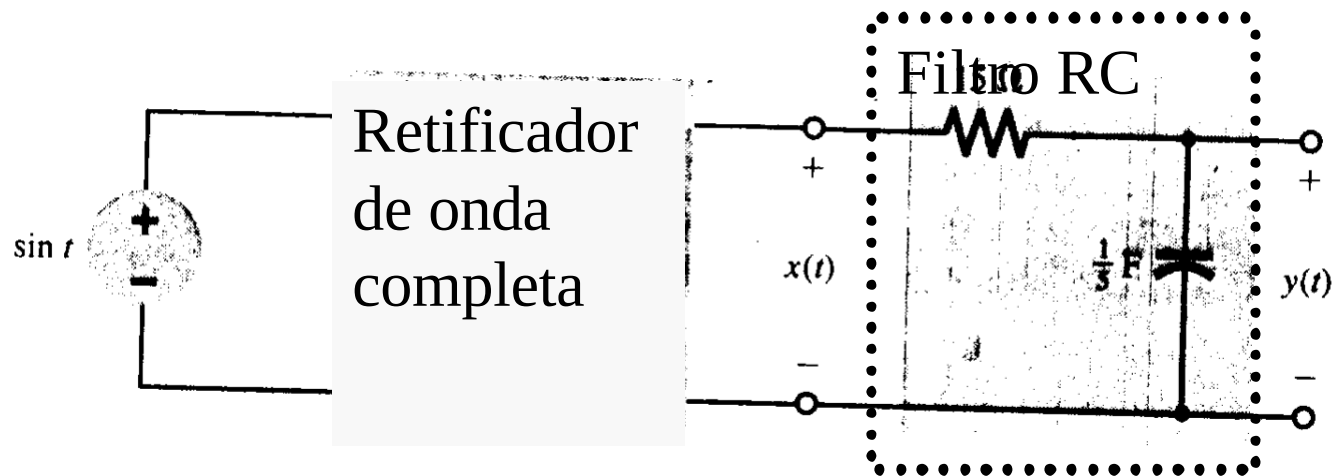
Sistema LTIC, uma entrada $e^{j\omega t}$ produz o par : $e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$

Como um sinal periódico é expresso por $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

A linearidade faz inferir : $\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}}_{\text{entrada}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}}_{\text{saída}} = y(t)$

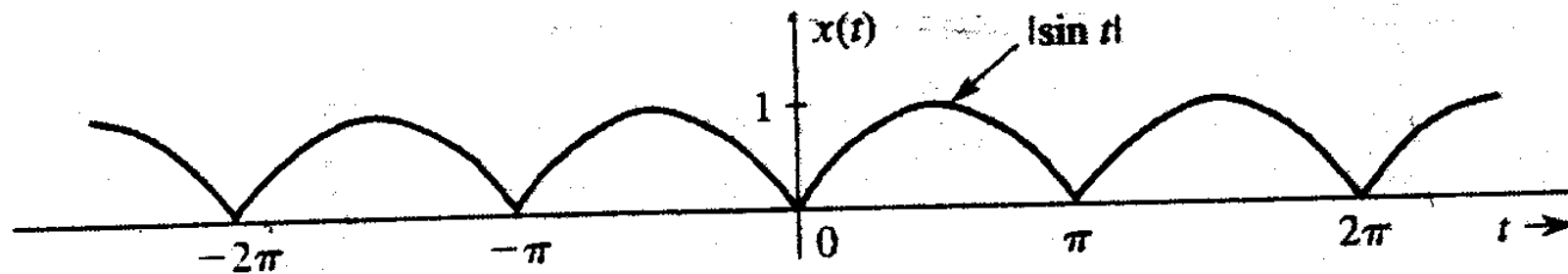
Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (ii)

- Exemplo: um retificador de onda completa (figura) produz um sinal dc a partir de um sinal senoidal. O sinal $x(t)$ retificado (gráfico) é então aplicado à entrada de um filtro RC passa-baixa para supressão da componente ac resultando em um sinal dc com uma ondulação residual. Encontre: a saída do filtro, a saída e o valor rms da ondulação de tensão.



Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (iii)

– Exemplo (continuação):



Série de Fourier para o sinal retificado $x(t)$ com período $T_0 = p$ e $w_0 = 2$:

$$\text{Assim, } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt}, \text{ para } D_n = \frac{1}{p} \int_0^p \sin t e^{-j2nt} dt = \frac{2}{p(1-4n^2)}$$

$$\text{Logo tem-se que } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{p(1-4n^2)} e^{j2nt}$$

Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (iv)

– Exemplo (continuação):

Descrição do filtro RC : $(3D + 1)y(t) = x(t)$

sua função de transferência é $H(s) = \frac{1}{3s + 1}$, logo $H(j\omega) = \frac{1}{3j\omega + 1}$

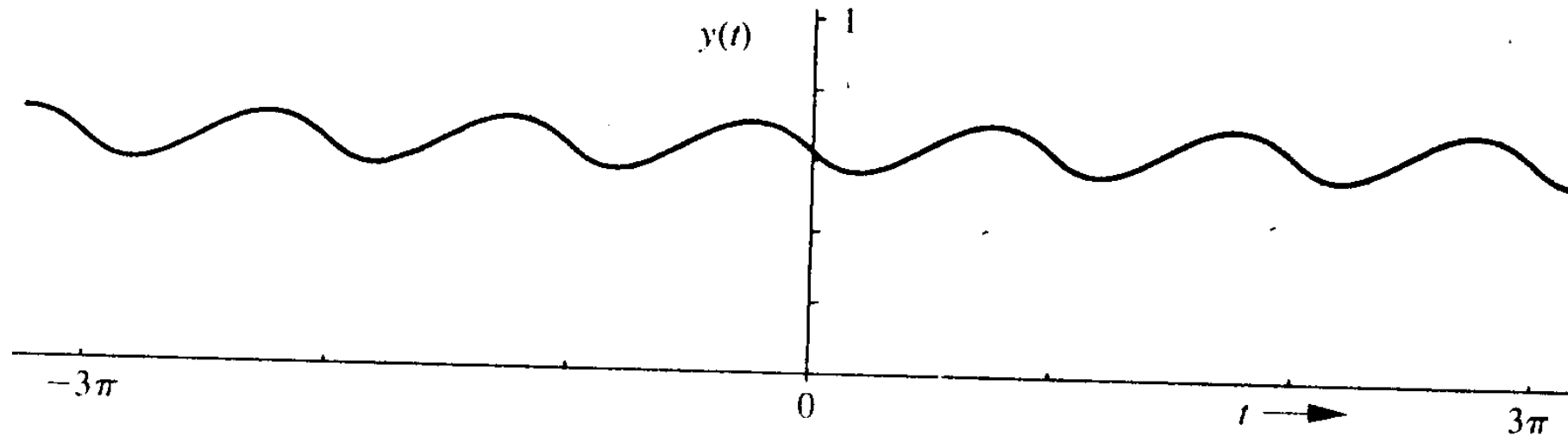
Lembre - se que $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(j2n) e^{j2nt}$

Substituindo - se os valores de D_n e $H(j2n)$ na equação acima :

O termo $\frac{2}{p}$ é o termo constante, o restante dos termos na série de Fourier são os termos responsáveis pela ondulação.

Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (v)

- Exemplo (continuação): Sinal constante mais ondulação.



Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
 - Todos
- **Problemas**
 - 6.1-1 até 6.1-7.
 - 6.3-1 até 6.3-7.
 - 6.4-1 até 6.4-3.