ES 413 Sinais e Sistemas

Análise de Sistemas Discretos por Transformada-z

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo

Depto. of Sistemas de Computação

Centro de Informática - UFPE

Capítulo 5

Conteúdo

- **Introdução**
- **A Transformada-*z***
- **A Transformada Inversa**
- **Propriedades da Transformada-*z***
- **Solução de Equações Lineares de Diferenças**

Transformada-z (i)

– A contraparte da transformada de Laplace para sistemas discretos no tempo é a transformada-*z*. Esta ferramenta transforma equações de diferenças em equações algébricas.

- **Definições**

– Dado um sinal $x[n]$, a transformada-*z* (bilateral) é definida como:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad \text{onde } z \text{ é uma variável complexa.}$$

– A transformada-*z* (bilateral) inversa é definida como:

$$x[n] = \frac{1}{2pj} \oint X[z] z^{n-1} dz$$

- Tem-se uma integração no sentido anti-horário em torno de um caminho fechado no plano complexo.
- A inversa será considerada através de tabela.

Transformada-z (ii)

- **Definições**: A transformada - z e sua inversa são denotadas como :

$$X[z] = Z\{x[n]\} \quad \text{ou} \quad x[n] \Leftrightarrow X[z] \quad \text{e} \quad x[n] = Z^{-1}\{X[z]\}$$

Analogamente à transformada de Laplace:

$$Z^{-1}[Z\{x[n]\}] = x[n] \qquad \text{ou} \qquad Z[Z^{-1}\{X[z]\}] = X[z]$$

  - A Transformada-z Unilateral: A transformada (bilateral) inversa pode não ser única enquanto que a transformada unilateral o é. Esta última pode apenas lidar com sinais e sistemas causais. Na prática, o termo transformada-*z*, em geral, significa transformada-*z* unidirecional. Esta é definida como:

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad \text{onde } z \text{ é uma variável complexa.}$$

  - A expressão da inversa permanece a mesma.

Transformada-*z* (iii)

- **Características**
  - Linearidade da transformada-*z*:

    Sejam $x_1[n] \Leftrightarrow X_1[z]$ e $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[z]$

    então $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \Leftrightarrow a_1 X_1[z] + a_2 X_2[z]$

    A prova decorre diretamente da definição de transformada - z.

  - Região de convergência (ROC):
    - A região de convergência (ou região de existência) de $X[z]$ é o conjunto de valores de z para os quais existe (é convergente) o somatório que define a transformada-*z*.

Transformada-z (iv)

– Exemplo:

Determine $X[z]$ e sua região de convergência para $x[n] = g^n u[n]$

Por definição $X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} g^n u[n] z^{-n}$, como $u[n] = 1, \quad n \geq 0$, então

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g}{z}\right)^n = 1 + \left(\frac{g}{z}\right) + \left(\frac{g}{z}\right)^2 + \left(\frac{g}{z}\right)^3 + \ldots + \ldots$$

Para a progressão geométrica $(|v| < 1)$: $1 + v + v^2 + v^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-v}$

Logo $\quad X[z] = \dfrac{1}{1 - \dfrac{g}{z}} = \dfrac{z}{z-g} \qquad \left|\dfrac{g}{z}\right| < 1$ ou $|z| > |g|$

A região de convergência de $X[z]$ é $|z| > |g|$.

Transformada-z (vi)

- **Observações**
  - O papel de ROC é avaliar a transformada-*z* inversa que é calculada empregando-se integração de caminho fechado no plano complexo, em torno da origem, satisfazendo a condição de convergência. A transformada-*z* unilateral possui a propriedade de unicidade logo a inversa é única. Consulte tabela para inversas.

Considere $X[z]=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x[n]}{z^n},$ a transformada - z existe se

$\left|X[z]\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|x[n]\right| / \left|z^n\right| < \infty,\ \forall x[n]$ que cresça mais lentamente que

a exponencial $(r_0)^n$, para algum r_0, satifaz a condição : $\left|x[n]\right| \leq (r_0)^n$,

logo tem - se que $\left|X[z]\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{|z|}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{r_0}{|z|}} \qquad |z| > r_0$

Transformada-z (vii)

- Exemplo: Determine $X[z]$ dos sinais discretos abaixo.

Lembre-se que $X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + \frac{x[1]}{z} + \frac{x[2]}{z^2} + \frac{x[3]}{z^3} + \ldots$

(a) $x[n] = d[n]; \qquad X[z] = 1 + 0 + 0 + \ldots$

(b) $x[n] = u[n]; \qquad X[z] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$

(c) $x[n] = \cos b\,n\,u[n];$ como $\cos b\,n = \left(e^{jbn} + e^{-jbn}\right)/2$ e $g^n u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-g}$

então $X[z] = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{jb}} + \frac{z}{z-e^{-jb}}\right] = \frac{z(z-\cos b)}{z^2 - 2z\cos b + 1} \qquad |z| > 1$

(d) $x[n] = u[n] - u[n-5]$

$X[z] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^4} \quad z \neq 0$

Transformada-z Inversa (i)

- **Determinação da Transformada Inversa**
  - Busca-se expressar $X[z]$ como o somatório de funções mais simples que podem ser encontradas em tabelas.

Exemplo : Encontre a transformada - z inversa de $\dfrac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$

$$\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)} = \frac{k_1}{z-2} + \frac{k_2}{z-3} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{8z-19}{\cancel{(z-2)}(z-3)}\right|_{z=2} = \frac{16-19}{2-3} = 3$$

$$k_2 = \left.\frac{8z-19}{(z-2)\cancel{(z-3)}}\right|_{z=3} = \frac{24-19}{3-2} = 5$$

Logo, $\quad X[z] = \dfrac{3}{z-2} + \dfrac{5}{z-3} \Rightarrow x[n] = [3(2)^{n-1} + 5(3)^{n-1}]u[n]$

Transformada-z Inversa (ii)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : Encontre a transformada - z inversa de $\dfrac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$

$$X[z]=\frac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}\therefore\frac{X[z]}{z}=\frac{(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

$$\frac{X[z]}{z}=\frac{k}{z-1}+\frac{a_0}{(z-2)^3}+\frac{a_1}{(z-2)^2}+\frac{a_2}{z-2}\Rightarrow$$

$$k=\left.\frac{(2z^2-11z+12)}{\cancel{(z-1)}(z-2)^3}\right|_{z=1}=\frac{2-11+12}{(1-2)^3}=-3$$

$$a_0=\left.\frac{(2z^2-11z+12)}{(z-1)\cancel{(z-2)^3}}\right\|_{z=2}=\frac{8-22+12}{2-1}=-2$$

$$\frac{X[z]}{z}=-\frac{3}{z-1}-\frac{2}{(z-2)^3}+\frac{a_1}{(z-2)^2}+\frac{a_2}{z-2}$$

Transformada-z Inversa (iii)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : (continuação) transformada - z inversa de $\dfrac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$

$$\frac{X[z]}{z}=\frac{(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}=-\frac{3}{z-1}-\frac{2}{(z-2)^3}+\frac{a_1}{(z-2)^2}+\frac{a_2}{z-2}$$

Igualando - se os coeficientes dos termos de potência de z : $a_1=-1$; $a_2=3$.

$$\frac{X[z]}{z}=-3\frac{1}{z-1}-2\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^2}+3\frac{1}{z-2}$$

Como $g^n u[n]\Leftrightarrow\dfrac{z}{z-g}$ e $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{g^m m!}g^m u[n]\Leftrightarrow\dfrac{z}{(z-g)^{m+1}}$

Resulta $x[n]=\left[-3-2\dfrac{n(n-1)}{8}(2)^n-\dfrac{n}{2}(2)^n+3(2)^n\right]u[n]\therefore$

$$x[n]=-\left[3+\frac{1}{4}(n^2+n-12)(2)^n\right]u[n]$$

Transformada-*z* Inversa (iv)

- **Determinação da Transformada Inversa**

$$\text{Exemplo: Encontre a transformada - } z \text{ inversa de } \frac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)}$$

$$X[z] = \frac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)} = \frac{2z(3z+17)}{(z-1)(z-3-j4)(z-3+j4)}$$

Cálculo dos coeficinetes por método dos fatores de primeira ordem:

$$\frac{X[z]}{z} = \frac{2(3z+17)}{(z-1)(z-3-j4)(z-3+j4)} = \frac{k_1}{(z-1)} + \frac{k_2}{(z-3-j4)} + \frac{k_3}{(z-3+j4)} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{2(3z+17)}{\cancel{(z-1)}(z^2-6z+25)}\right|_{z=1} = \frac{2(3+17)}{(1-6+25)} = 2$$

Transformada-z Inversa (v)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : (continuação) transformada - z inversa de $\dfrac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)}$

$$k_2 = \left.\frac{2(3z+17)}{(z-1)\cancel{(z-3-j4)}(z-3+j4)}\right|_{z=3+j4} = \frac{2(9+j12+17)}{(3+j4-1)(3+j4-3+j4)}$$

$$= \frac{52+j24}{(2+j4)(j8)} \therefore k_2 = \frac{52+j24}{16j-32} \therefore k_2 = \frac{13+j8}{4j-8} \therefore k_2 = 1.6e^{-j2.246}$$

$$k_3 = \left.\frac{2(3z+17)}{(z-1)(z-3-j4)\cancel{(z-3+j4)}}\right|_{z=3-j4} = \frac{2(9-j12+17)}{(3-j4-1)(3-j4-3-j4)}$$

$$= \frac{52-j24}{(2+j4)(-j8)} \therefore k_3 = \frac{52-j24}{-16j+32} \therefore k_3 = \frac{13-j8}{-4j+8} \therefore k_2 = 1.6e^{j2.246}$$

Finalmente $\quad x[n] = [2+3.2(5)^n \cos(0.927n-2.246)]u[n]$

Propriedades da Transformada-*z* (i)

- **Motivação:**
  - Úteis para para encontrar a transformada-*z* e para se determinar soluções de equações lineares de diferenças.
- **Deslocamento à Direita no Tempo (Atraso):**

$$x[n-m]u[n] \Leftrightarrow z^{-m}X[z] + z^{-m}\sum_{n=1}^{m} x[-n]z^{n}$$

- **Deslocamento à Esquerda no Tempo (Avanço):**

$$x[n+m]u[n] \Leftrightarrow z^{m}X[z] - z^{m}\sum_{n=0}^{m-1} x[n]z^{-n}$$

- **Convolução:**

Considere $x_1[n] \Leftrightarrow X_1[z]$ e $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[z]$

Convolução no tempo $x_1[n] * x_2[n] \Leftrightarrow X_1[n]X_2[n]$

Propriedades da Transformada-z (ii)

- **Resposta de Sistema LTID**

  Equação entrada - saída : $y[n] = x[n] * h[n]$

  Sabendo – se que $h[n] \Leftrightarrow H[z]$, então $Y[z] = X[z]H[z]$

- **Multiplicação por g^n (Escalonamento no Domínio-z):**

  Se $x[n]u[n] \Leftrightarrow X[z]$, então $g^n x[n]u[n] \Leftrightarrow X\left[z/g\right]$

- **Multiplicação por n:**

  Se $x[n]u[n] \Leftrightarrow X[z]$, então $nx[n]u[n] \Leftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}X[z]$

- **Reversão no Tempo:**

  Se $x[n] \Leftrightarrow X[z]$, então $x[-n] \Leftrightarrow X\left[1/z\right]$

- **Valores Iniciais e Finais:**

  Para $x[n]$ causal, valor inicial : $x[0] = \lim_{z \to \infty} X[z]$;

  valor final : $\lim_{N \to \infty} x[N] = \lim_{z \to 1} (z-1)X[z]$, se os limites existirem.

Soluções de Equações (i)

- **Equações de Diferenças**
  - A propriedade de deslocamento no tempo (atraso ou avanço) é empregada para resolução de equações de diferenças com coeficientes constantes. Converte-se equações de diferenças em equações algébricas e encontram-se as soluções no domínio-*z*. A transformada inversa determina a solução no domínio do tempo.
  - Exemplo:

Resolva a equação de diferenças de segunda ordem:

$$y[n+2]-5y[n+1]+6y[n]=3x[n+1]+5x[n]$$

condições iniciais $y[-1]=11/6$ e $y[-2]=37/36$; entrada $x[n]=2^{-n}u[n]$

Para poder utilizar condições iniciais (ao invés de condições auxiliares), re-escreve-se a expressão para operador de atraso:

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$$

Soluções de Equações (ii)

- **Equações de Diferenças**
  - Exemplo (continuação):

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$$

Para o sinal $y[n]$ tem-se: $y[n]u[n] \Leftrightarrow Y[z];$

$$y[n-1]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z}Y[z]+y[-1]=\frac{1}{z}Y[z]+\frac{11}{6}$$

$$y[n-2]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{1}{z}y[-1]+y[-2]=\frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{11}{6z}+\frac{37}{36}$$

Para sistemas causais: $x[-1]=x[-2]=\ldots=x[-n]=0$

Para a entrada: $x[n]=(2)^{-n}u[n]=(0.5)^{n}u[n] \Leftrightarrow z/(z-0.5)$

$$x[n-1]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z}X[z]+x[-1]=\frac{1}{z}\frac{z}{z-0.5}+0=\frac{1}{z-0.5}$$

$$x[n-2]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z^2}X[z]+\frac{1}{z}x[-1]+x[-2]=\frac{1}{z^2}X[z]+0+0=\frac{1}{z(z-0.5)}$$

Soluções de Equações (iii)

- **Equações de Diferenças**
  - Exemplo (continuação):

Tomando-se $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$, tem-se

$$Y[z]-5\left[\frac{1}{z}Y[z]+\frac{11}{6}\right]+6\left[\frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{11}{6z}+\frac{37}{36}\right]=3\frac{1}{z-0.5}+5\frac{1}{z(z-0.5)}\therefore$$

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]-\left(3-\frac{11}{z}\right)=\frac{3}{z-0.5}+\frac{5}{z(z-0.5)}\therefore$$

$$\left(z^2-5z+6\right)Y[z]=\frac{z(3z^2-9.5z+10.5)}{(z-0.5)}\therefore\frac{Y[z]}{z}=\frac{(3z^2-9.5z+10.5)}{(z-0.5)\left(z^2-5z+6\right)}$$

$$\frac{Y[z]}{z}=\frac{(3z^2-9.5z+10.5)}{(z-0.5)(z-2)\left(z-3\right)}=\frac{(26/15)}{z-0.5}-\frac{(7/3)}{z-2}+\frac{(18/5)}{z-3}$$

$$y[n]=\left[\frac{26}{15}(0.5)^n-\frac{7}{3}(2)^n+\frac{18}{5}(3)^n\right]u[n]$$

Soluções de Equações (iv)

– Exemplo (continuação):

Separação dos componentes de entrada zero e estado zero:

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]-\left(3-\frac{11}{z}\right)=\frac{3}{z-0.5}+\frac{5}{z(z-0.5)}\ \therefore$$

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]=\left(3-\frac{11}{z}\right)+\frac{(3z+5)}{z(z-0.5)},\ \text{multiplicando-se por } z^2\ \therefore$$

$$(z^2-5z+6)Y[z]=z(3z-11)+\frac{z(3z+5)}{z-0.5}$$

$$Y[z]=\underbrace{\frac{z(3z-11)}{(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de entrada zero}}+\underbrace{\frac{z(3z+5)}{(z-0.5)(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de estado zero}}$$

Soluções de Equações (v)

– Exemplo (continuação):

$$Y[z] = \underbrace{\frac{z(3z-11)}{(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de entrada zero}} + \underbrace{\frac{z(3z+5)}{(z-0.5)(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de estado zero}}$$

Expandindo ambos termos, tem-se:

$$Y[z] = \underbrace{\left[5\left(\frac{z}{z-2}\right)-2\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{resposta de entrada zero}} + \underbrace{\left[\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z-0.5}\right)-\frac{22}{3}\left(\frac{z}{z-2}\right)+\frac{28}{5}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{resposta de estado zero}}$$

$$y[n] = \underbrace{\left[5(2)^n-2(3)^n\right]}_{\text{resposta de entrada zero}} - \underbrace{\left[\frac{22}{3}(2)^n+\frac{28}{5}(3)^n+\frac{26}{15}(0.5)^n\right]}_{\text{resposta de estado zero}} u[n] \therefore$$

$$y[n] = \left[-\frac{7}{3}(2)^n+\frac{18}{5}(3)^n+\frac{26}{15}(0.5)^n\right]u[n] \therefore$$

Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  – Todos
- **Problemas**
  – 5.1-1 até 5.1-5
  – 5.2-1 até 5.2-7.
  – 5.3-1 até 5.3-10.