

ES 413 Sinais e Sistemas

Análise no Domínio do Tempo de Sistemas Discretos

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo
Depto. of Sistemas de Computação
Centro de Informática - UFPE

Capítulo 3

Conteúdo

- **Introdução**
- **Operações Úteis com Sinais**
- **Alguns Modelos Úteis de Sinais Discretos no Tempo**
- **Exemplos de Sinais Discretos no Tempo**
- **Equações de Sistemas Discretos no Tempo**
- **Resposta de Entrada Zero**
- **Resposta ao Impulso Unitário**
- **Resposta de Estado Zero**
- **Solução Clássica de Equações de Diferenças**
- **Estabilidade de Sistemas**
- **Parâmetros e Comportamento do Sistema**

Análise no Tempo de SLDT (i)

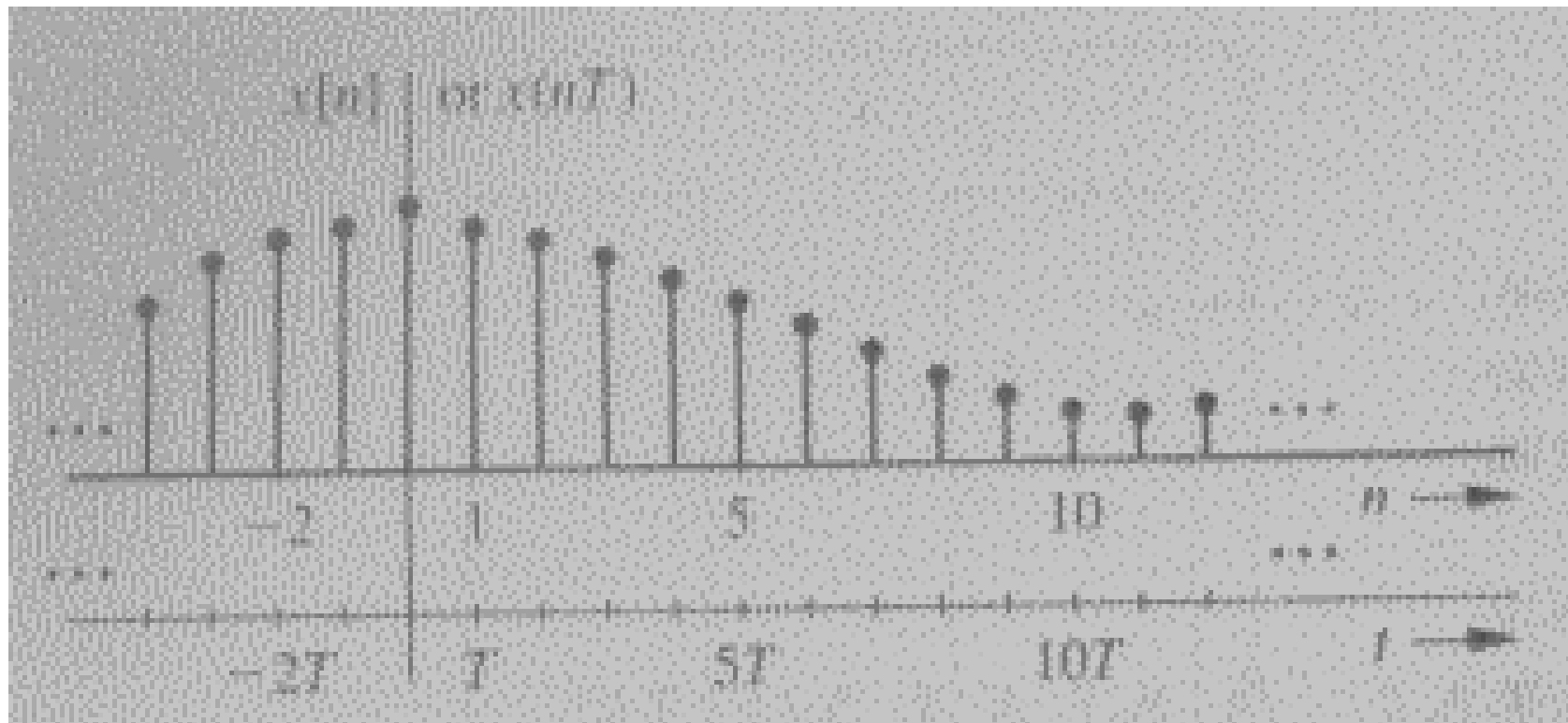
- **Introdução**

- Sistemas discretos são caracterizados por entradas e saídas discretas. Um computador digital é um exemplo típico.
- Sinal discreto no tempo é basicamente uma seqüência de números que aparecem em situações discretas no tempo (e.g., estudos populacionais, problemas de amortização, modelos de renda nacional, rastreamento de radar) ou em amostragens de sinais contínuos no tempo (e.g., sistemas de dados amostrados e filtragem digital).
 - Notação: $x[n]$ denota o n -ésimo número na seqüência rotulada por x .
 - Um sinal discreto proveniente de amostragem de $x(t)$ pode ser expresso por $x(nT)$, onde T é o intervalo de amostragem. Lembre-se que $x[n] = x(nT)$.

Análise no Tempo de SLDT (ii)

- **Introdução**

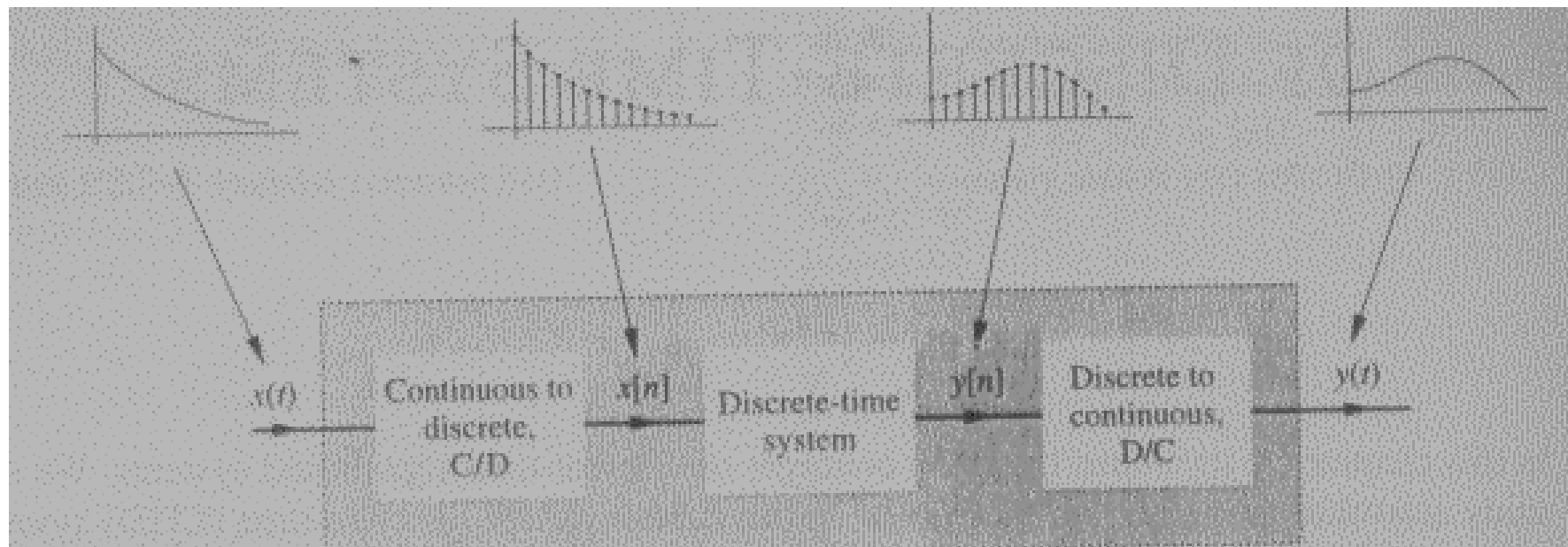
- Exemplo de sinal discreto no tempo: $x(nT) = e^{-nT} = e^{-0.1n}$



Análise no Tempo de SLDT (iii)

- **Introdução**

- Filtros digitais processam sinais contínuos por sistemas discretos. Conversores C/D e D/C são usados neste tipo de configuração. Este processamento é esboçado abaixo:



Tamanho de Sinais Discretos (i)

- **Energia de um Sinal**

- Seja um sinal $x[n]$, define-se energia deste sinal como o somatório ao longo do tempo do valor de $x[n]$ elevado ao quadrado, quando este somatório é finito:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2, \quad \text{para valores reais ou complexos.}$$

$|x[n]| \rightarrow 0$, para $|n| \rightarrow \infty$ de modo contrário, o somatório não converge.

- **Potência de um Sinal**

- Se a amplitude de $x[n]$ não convergir para zero com o passar do tempo, emprega-se a potência de um sinal, definida como (para o valor calculado finito e diferente de zero):

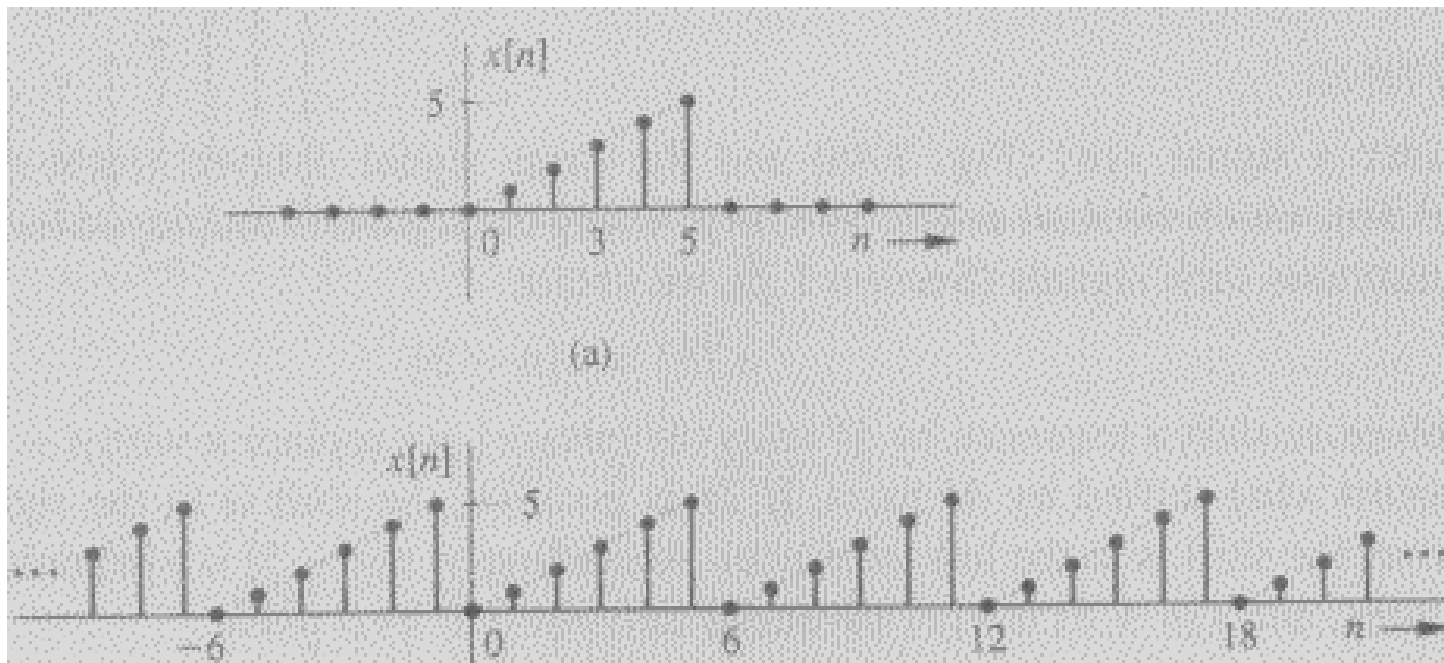
$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2, \quad \text{para valores reais ou complexos.}$$

Existem $2N+1$ amostras no intervalo considerado.

Tamanho de Sinais Discretos (ii)

- **Exemplo**

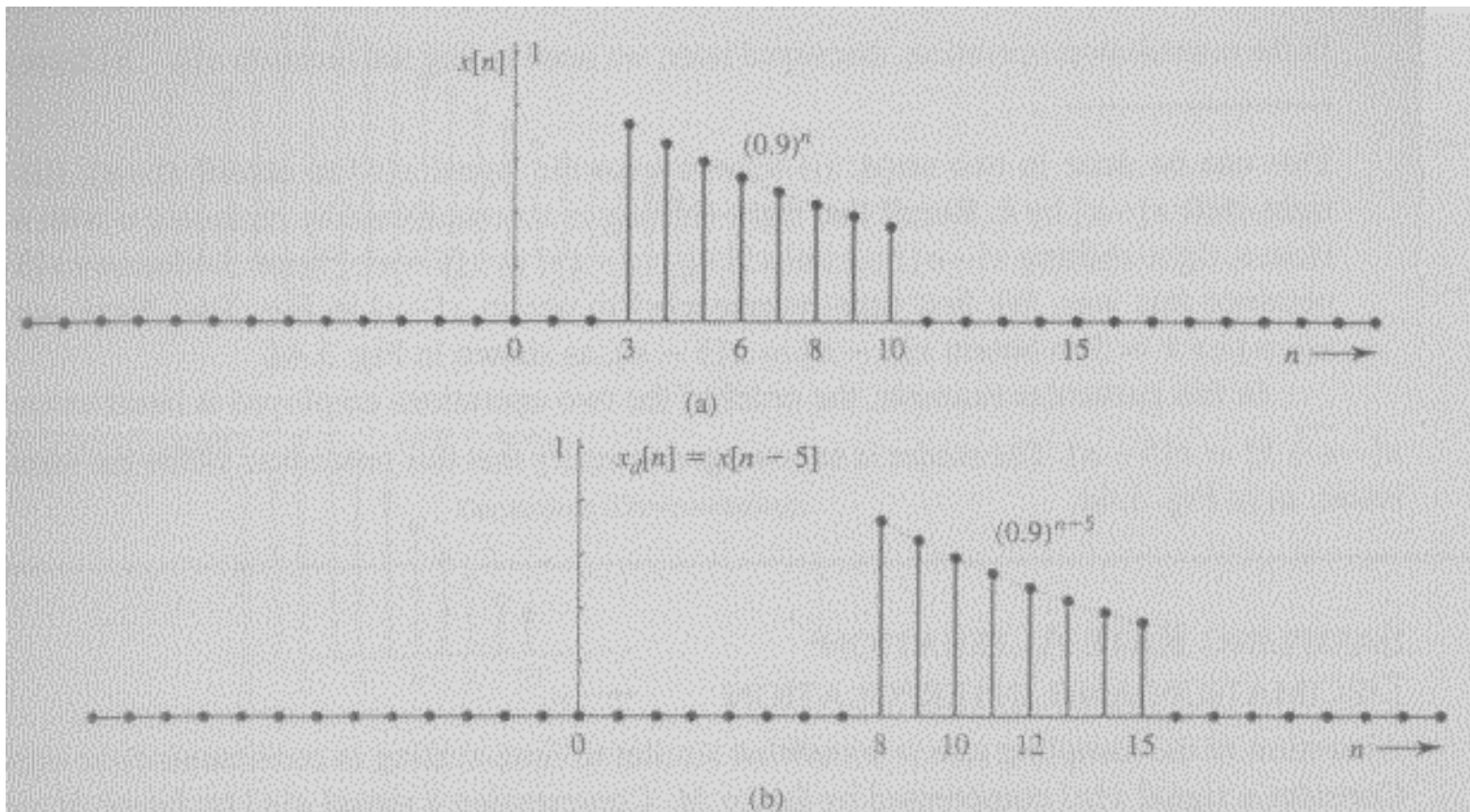
- Determine a energia e a potência do sinal $x[n]$ nas figuras (a) e (b), respectivamente.



$$E_x = \sum_{n=0}^5 n^2 = 55; \quad P_x = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 n^2 = \frac{55}{6}.$$

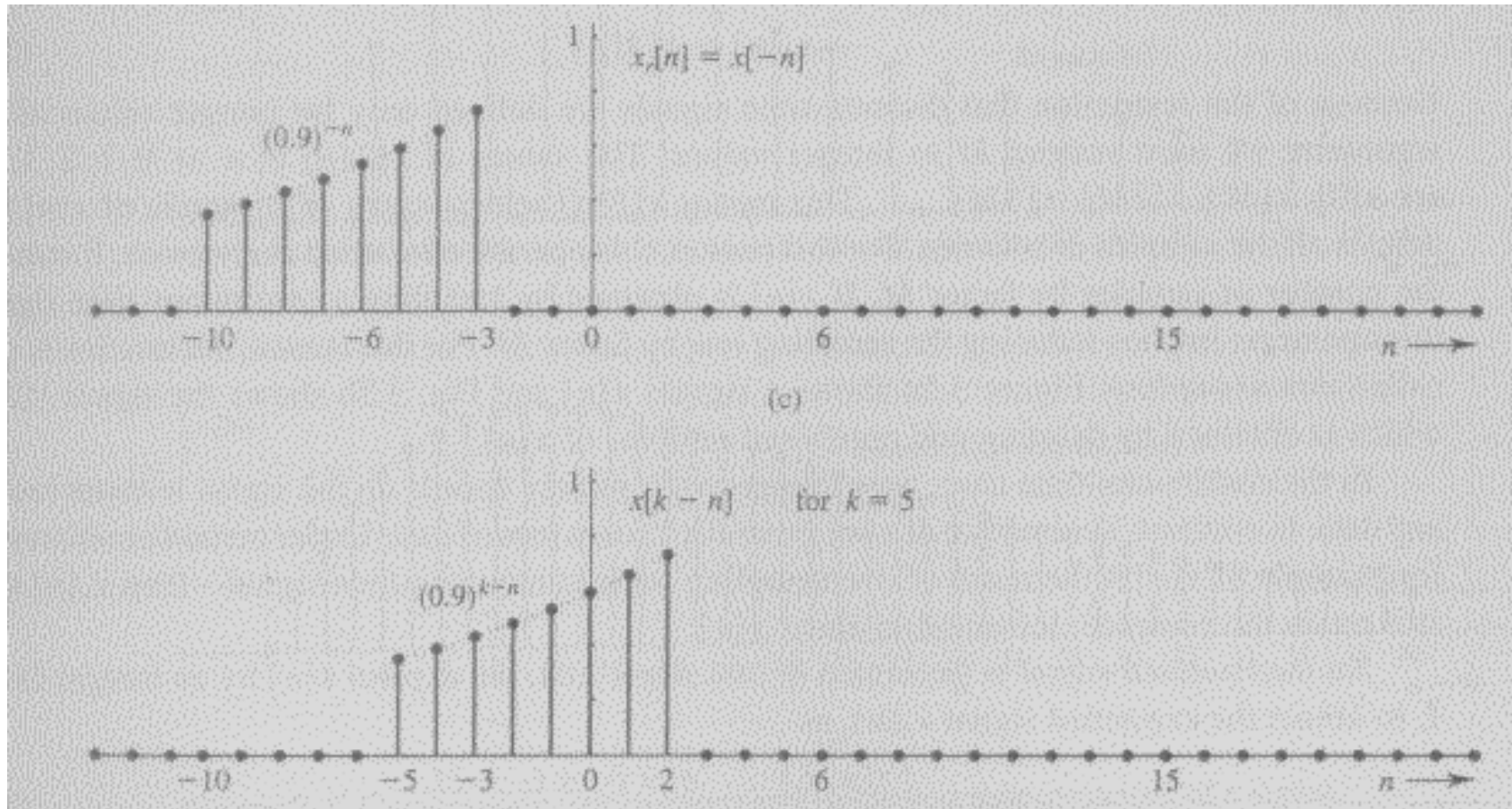
Operações com Sinais Discretos (i)

- **Deslocamento no Tempo: (“Time Shifting”)**
 - Seja um sinal $x[n]$ e este mesmo sinal defasado de M unidades:
 $x_s[n] = x[n - M]$



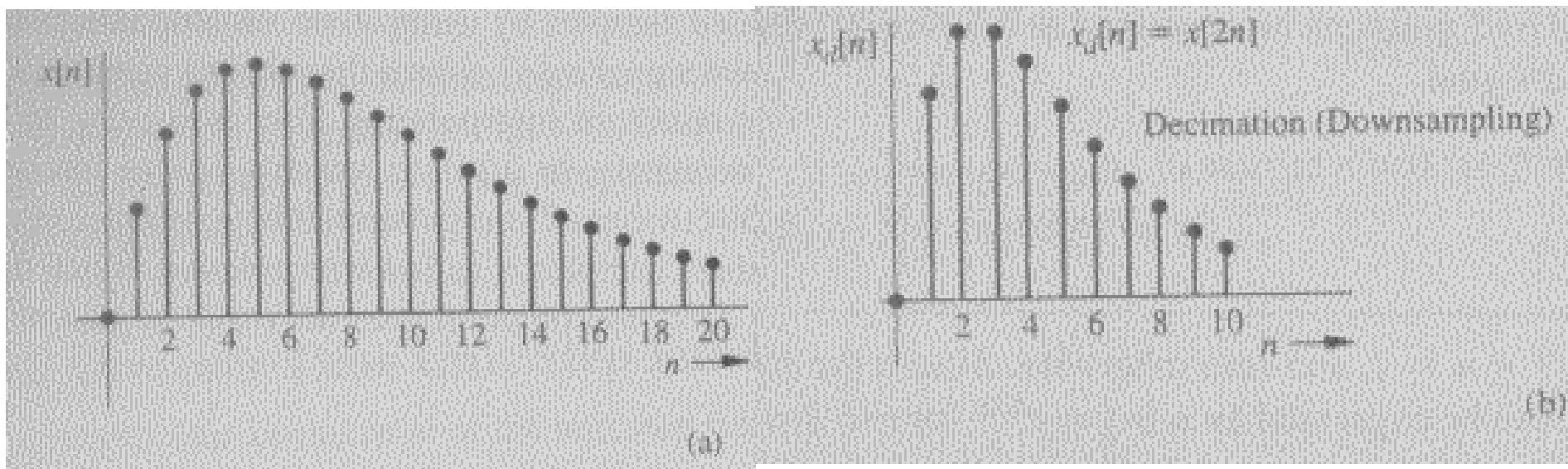
Operações com Sinais Discretos (ii)

- **Reversão no Tempo (“Time Reversal”)**
 - Seja um sinal $x[n]$ e este mesmo sinal rotacionado em torno do eixo vertical: $x_r[n] = x[-n]$. Note também $x[k - n]$, para $k = 5$.



Operações com Sinais Discretos (iii)

- **Alteração de Taxa de Amostragem: Decimação (“Decimation”)**
 - Seja um sinal $x[n]$ e este sinal comprimido por um fator M :
 $x_d[n] = x[Mn]$, onde M é um valor inteiro. Seleciona-se todas as amostras múltiplas de M e coloca-se zero para as demais. Esta operação é chamada de decimação (“decimation”).

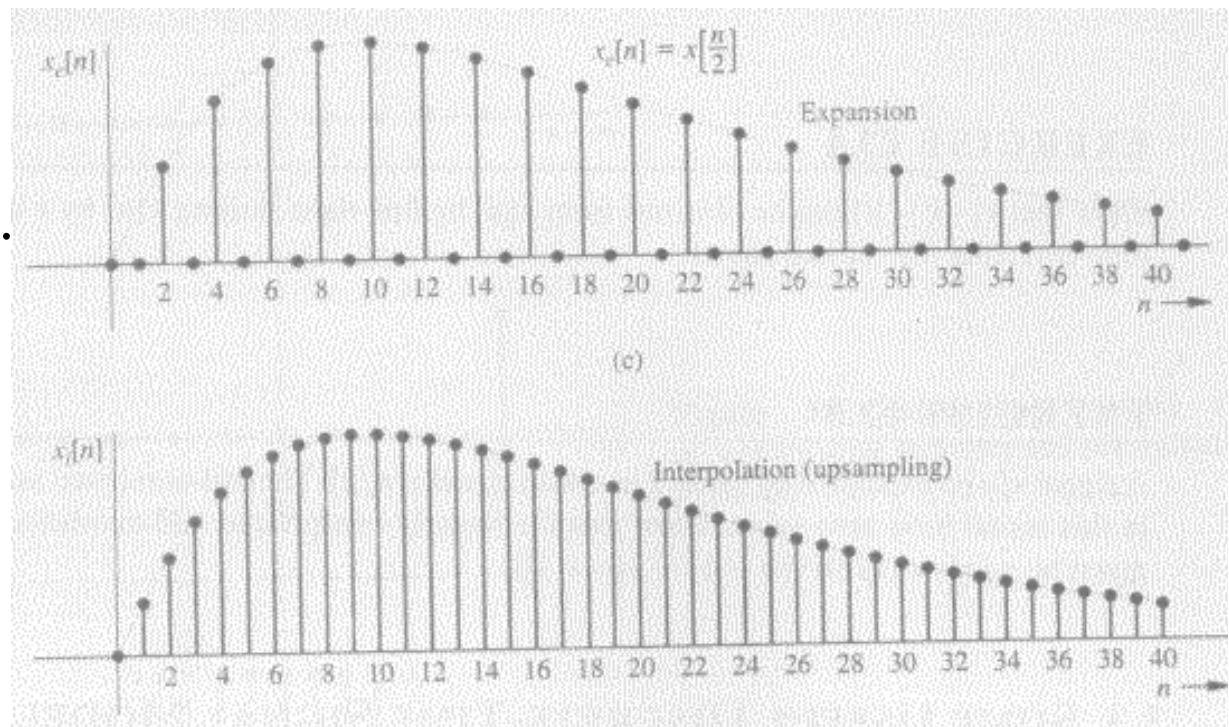


Operações com Sinais Discretos (iv)

- **Alteração de Taxa de Amostragem: Interpolação (“Interpolation”)**
 - Seja um sinal $x[n]$, o sinal interpolado é gerado em dois passos: expande-se o sinal e em seguida atualiza-se os valores com zero através de um método de interpolação apropriado.

Expansão : $x_e[n] =$

$$\begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm L, \pm 2L \dots \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$



Alguns Sinais Discretos Úteis (i)

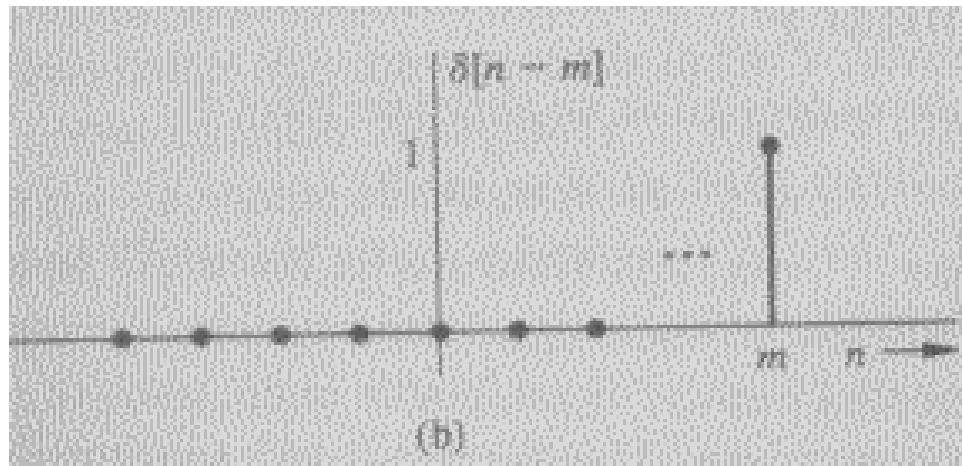
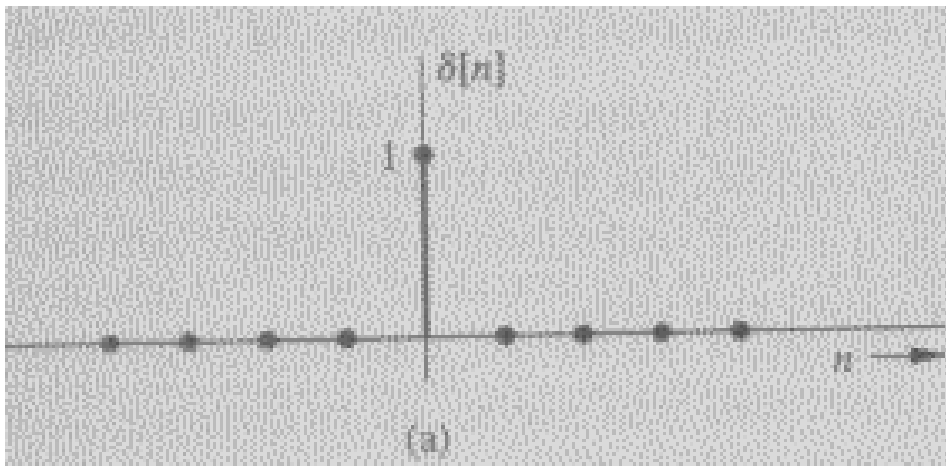
- **Motivação:**
 - Tipicamente, eles são comumente utilizados no estudo de sinais e sistemas discretos no tempo.
- **Funções que serão tratadas:**
 - Função Impulso Discreta;
 - Função Degrau Unitário Discreta;
 - Função Exponencial Discreta;
 - Função Senoidal Discreta.

Alguns Sinais Discretos Úteis (ii)

- **Função Impulso Unitário Discreta**

- Esta é a contrapartida de função impulso contínua no tempo, uma função delta de Kronecker, definida por:

$$d[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}, \text{ também chamada de da seqüência impulso unitário.}$$



Alguns Sinais Discretos Úteis (iii)

- **Função Degrau Unitário Discreta**

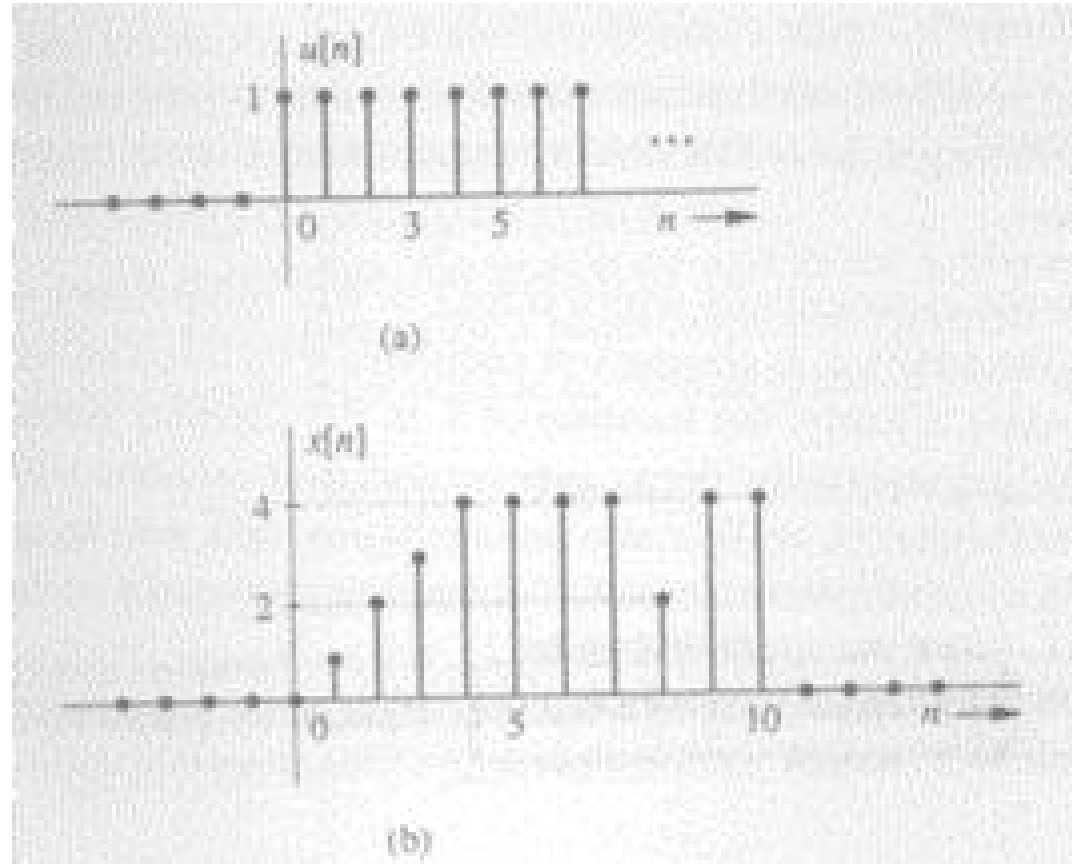
- Esta é a contrapartida de função degrau contínua no tempo, definida por:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] \therefore$$

$$x[n] = n(u[n] - u[n-5]) +$$

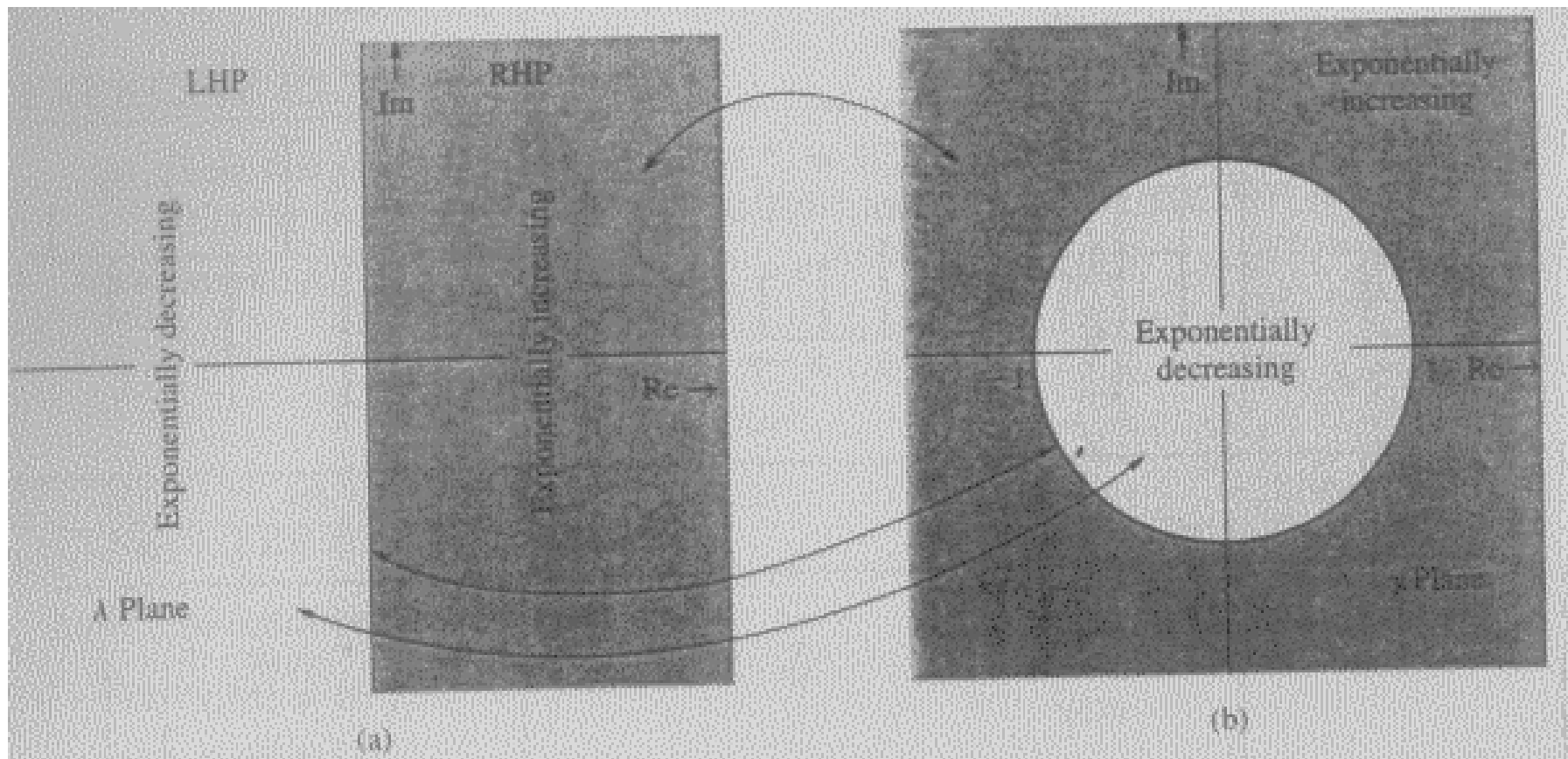
$$u[n-5] - u[n-11] - 2d[n-8]$$



Alguns Sinais Discretos Úteis (iv)

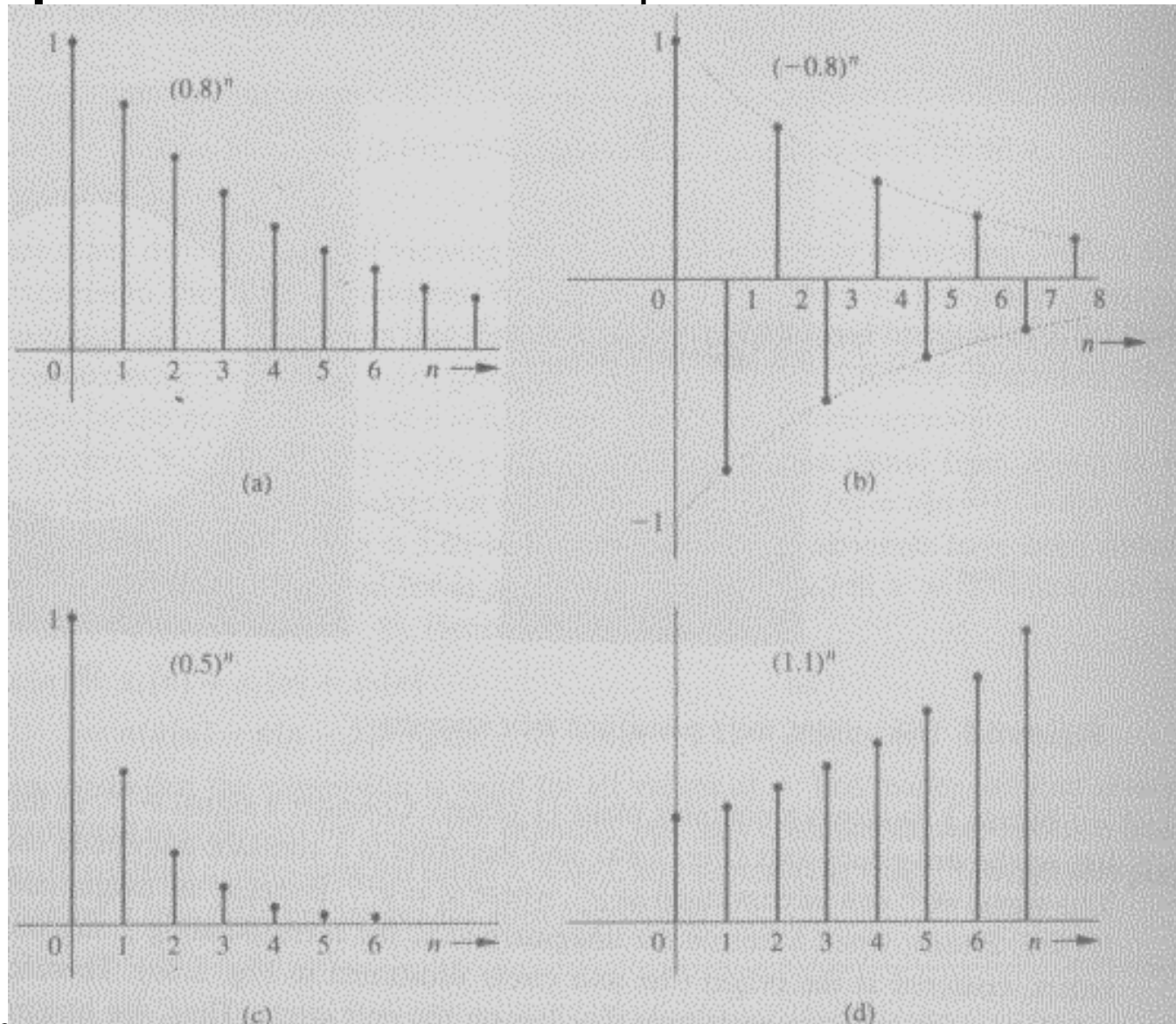
- **Função Exponencial Discreta**

- Esta função é expressa como: $e^{ln} = g^n$ ($g = e^l$ ou $l = \ln g$)



Alguns Sinais Discretos Úteis (v)

- **Função Exponencial Discreta:** Exemplos



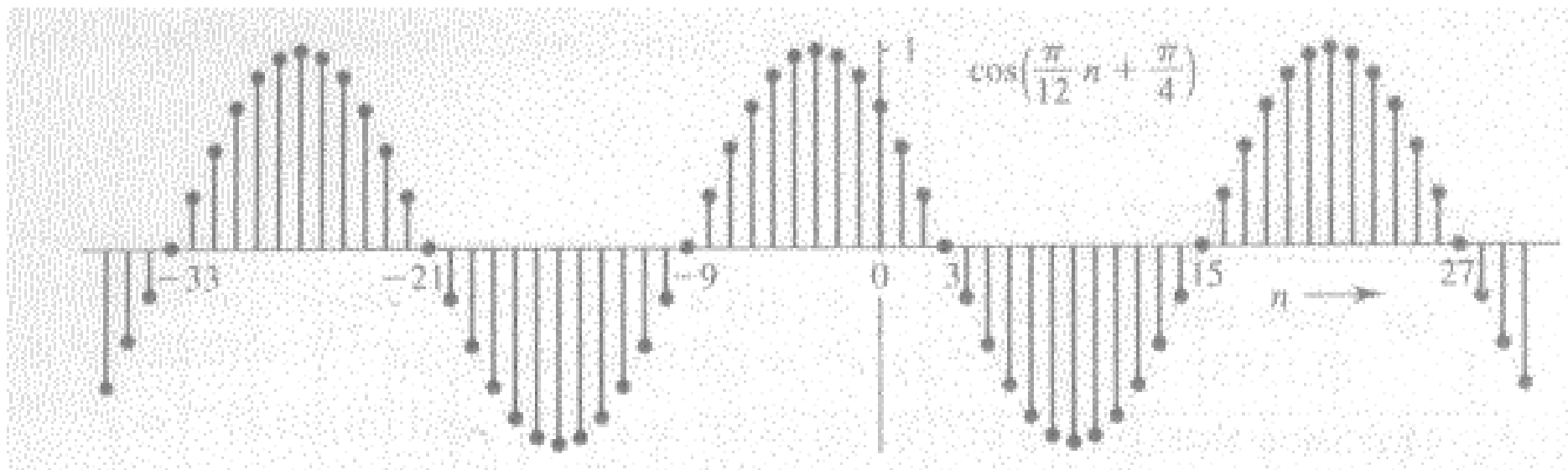
Alguns Sinais Discretos Úteis (vi)

- **Função Senoidal Discreta**

Em sua forma geral : $C \cos(\Omega n + q)$, onde C é a amplitude, q é a fase em radianos, Ωn é um ângulo em radianos e a frequência Ω é dada em radianos por amostra. A função senoidal pode também ser expressa por :

$C \cos(\Omega n + q) = C \cos(2\pi F n + q)$, onde $F = 1/N_0$ (amostras/ciclo).

- Exemplo



Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (i)

- **Caderneta de Poupança** (sinal inerentemente discreto no tempo): Um correntista deposita dinheiro ($x[n]$) em sua caderneta de poupança a cada intervalo de tempo T (1 mês). O banco deposita juros (r) em cada T e envia extrato da conta ($y[n]$) ao depositante. Determine a equação relacionando a saída e a entrada.

O saldo é : $y[n] = y[n-1] + ry[n-1] + x[n] = (1+r)y[n-1] + x[n]$,

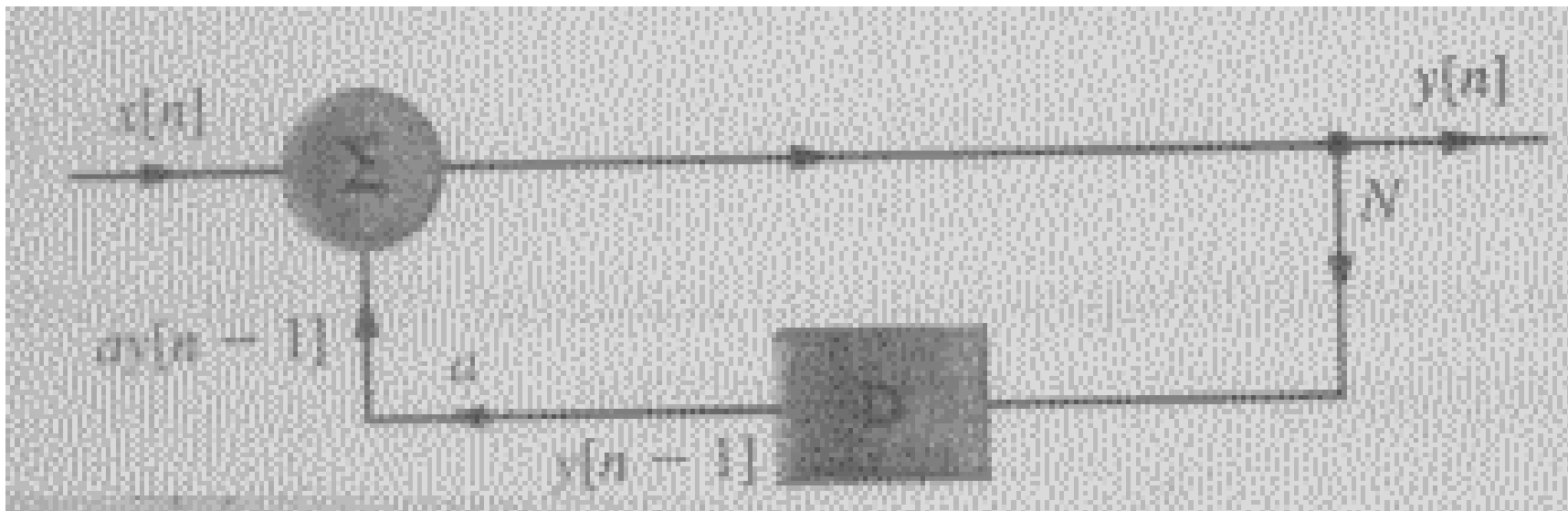
Logo, $y[n] - ay[n-1] = x[n]$, para $a = 1+r$,

equivalentemente pode-se escrever: $y[n+1] - ay[n] = x[n+1]$,

- Uma retirada é representada por uma entrada negativa.
- Para um empréstimo, $y[0] = -M$, onde M é o valor emprestado.
- A expressão com o atraso é chamada de forma de operador de atraso, enquanto que a expressão com avanço é forma de operador de avanço. A primeira forma é natural pois é causal (portanto realizável).

Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (ii)

- **Caderneta de Poupança** (sinal inerentemente discreto no tempo):
 - Representação do sistema por diagrama de blocos (realização do sistema de conta poupança):



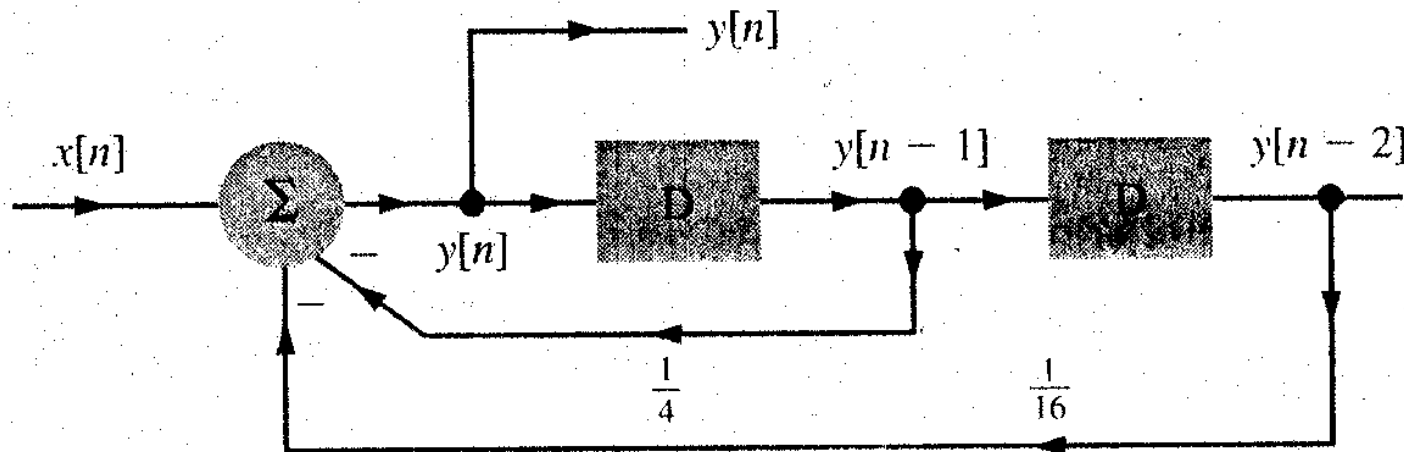
- Emprega-se os operadores básicos: somador, multiplicador escalar e atrasador.
- Utiliza-se N um nodo de coleta de sinal (*pickoff node*).

Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (iii)

- **Estimativa de Vendas** (sinal inerentemente discreto no tempo): No n -ésimo semestre de um curso universitário, $x[n]$ estudantes estão matriculados em uma dada matéria e todos devem comprar seu livro texto que tem três semestres de vida. A editora vende $y[n]$ destes livros neste semestre. Em média, $\frac{1}{4}$ dos livros em boas condições são re-vendidos pelos estudantes. Escreva a saída em função da entrada:

O saldo é : $y[n] + \frac{1}{4} y[n-1] + \frac{1}{16} y[n-2] = x[n]$,

Logo, $y[n] = -\frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{16} y[n-2] + x[n]$,



Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (iv)

- **Diferenciador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto):
Projete um sistema discreto para diferenciar um sinal contínuo. Este diferenciador é usado em um sistema de áudio tendo um sinal de entrada com largura de banda inferior a 20 kHz.

– A saída $y(t)$ é a derivada da entrada $x(t)$. O processador discreto G processa amostras da entrada $x(t)$ e produz saída $y[n]$. Emprega-se amostras a cada T segundos: $x[n] = x(nT)$; e $y[n] = y(nT)$.

$$y(t) = \frac{dx}{dt}, \text{ para } t = nT \text{ tem-se } y(nT) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=nT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} [x(nT) - x[(n-1)T]],$$

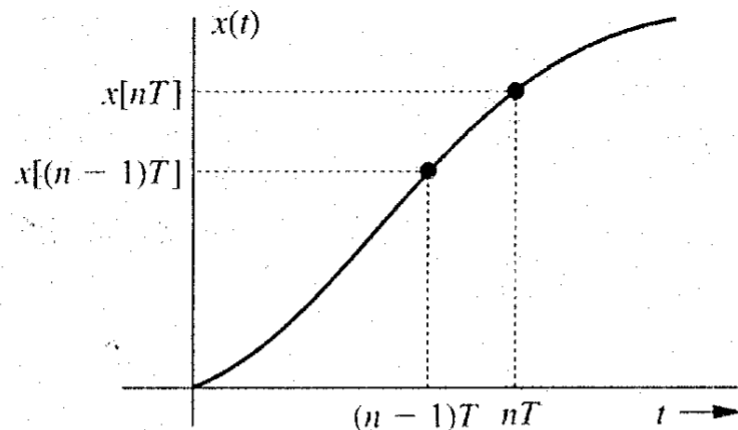
usando notação para sistemas discretos : $y[n] = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \{ [x[n] - x[n-1]] \}$

Assumindo sinal de amostragem suficientemente pequeno (diferente de 0):

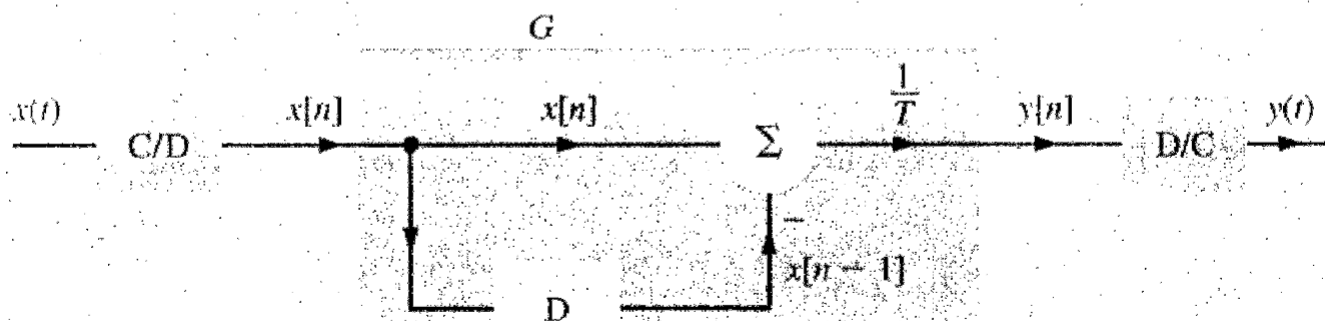
$$y[n] = \frac{1}{T} \{ [x[n] - x[n-1]] \}$$

Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (v)

- **Diferenciador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto):



(a)



(b)

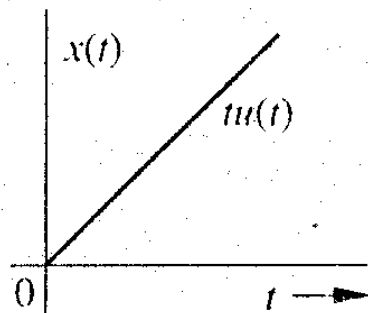
– Intervalo de amostragem: $T \leq \frac{1}{2 \times \text{maior frequência}} = \frac{1}{40000} = 25\text{ms}$

Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (vi)

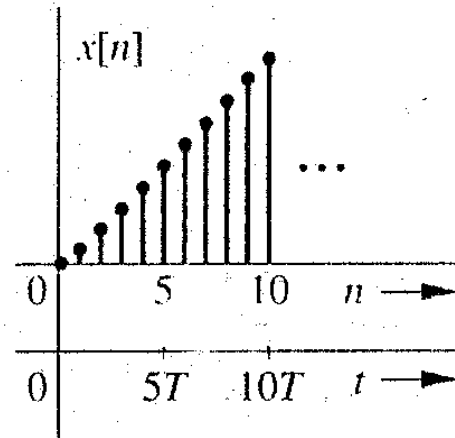
- **Diferenciador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto):

$$x[n] = x(t)|_{t=nT} = t|_{t=nT}, \quad t \geq 0$$

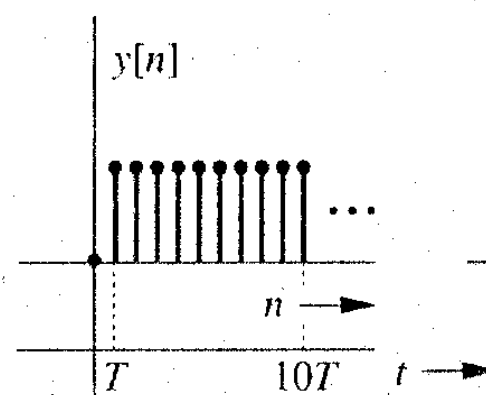
$$x[n] = nT, \quad n \geq 0$$



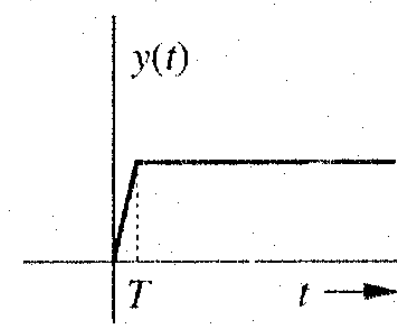
(c)



(d)



(e)



(f)

Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (vii)

- **Integrador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto):
Projete um integrador digital seguindo as mesmas linhas que o diferenciador digital do exemplo anterior.

Integrador : $y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$, em $t = nT$ tem-se $y(nT) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^n x(kT)T$,

usando notação para sistemas discretos : $y[n] = \lim_{T \rightarrow 0} T \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

Assumindo sinal de amostragem suficientemente pequeno (diferente de 0) :

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k], \quad \text{forma não recursiva.}$$

Este é um exemplo de um sistema acumulador.

O integrador digital também é expresso por sua forma recursiva :

$$y[n] - y[n-1] = Tx[n]$$

Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (viii)

- A forma digitalizada de uma equação diferencial resulta em uma equação de diferenças:

Seja a equação diferencial de 1ª ordem: $\frac{dy}{dt} + cy(t) = x(t)$

Para amostragem uniforme T , usa - se a definição de derivada para $t = nT$:

$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{y[n] - y[n-1]}{T} + cy[n] = x[n]$, para $T \neq 0$ mas com valor muito pequeno :

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n], \text{ onde } a = -\frac{1}{1+cT} \text{ e } b = \frac{T}{1+cT}.$$

- Ordem de equação de diferenças : definida pela diferença de maior ordem.
- Eq. diferencial pode ser aproximada por eq. de diferenças de mesma ordem
- Filtros digitais e sistemas discretos são usados como sinônimos.
- Filtros analógicos e sistemas contínuos são usados como sinônimos.

Sistemas Discretos no Tempo: Vantagens (i)

- Vantagens do Processamento Digital de Sinais:
 - Operação de sistemas digitais pode tolerar variações nos valores de sinais, resultando em precisão e estabilidade maior que sistemas analógicos.
 - Sistemas digitais não demandam mesmo grau de precisão de sistemas analógicos. Sistemas digitais complexos podem ser implementados em um chip empregando circuitos VLSI.
 - Filtros digitais são flexíveis: podem ser facilmente alterados por programação. Implementações em hardware permitem uso de microprocessadores, miniprocessadores, chaves digitais, e circuitos VLSI.
 - Circuitos digitais podem modelar grande quantidade de filtros.

Sistemas Discretos no Tempo: Vantagens (ii)

- Vantagens do Processamento Digital de Sinais:
 - Sinais digitais podem ser baratos e facilmente armazenados em mídias magnéticas.
 - Sinais digitais podem ser codificados para produzir erros muito baixos e alta fidelidade.
 - Filtros digitais podem ser compartilhados no tempo.
 - Reprodução com sistemas digitais é confiável e sem deterioração. Mensagens analógicas como fotocópia e filmes perdem precisão para cada estágio sucessivo de reprodução.

Sistemas Discretos no Tempo: Classificação (i)

- **Classificação de Sistemas Discretos**

- Linearidade e Invariância no Tempo

A definição de linearidade é idêntica a sistemas contínuos

Sistemas invariantes no tempo são aqueles nos quais seus parâmetros não mudam ao longo do tempo.

- Sistemas Causais e Não Causais

Um sistema discreto é causal se sua saída em qualquer instante $n = k$ depende apenas dos valores de entrada $x[n]$ para $n \leq k$.

- Sistemas Inversíveis e Não Inversíveis

Um sistema é inversível se for encontrado um outro sistema tal que a conexão de ambos em cascata resulta em um sistema identidade.

Sistemas Discretos no Tempo: Classificação (ii)

- **Classificação de Sistemas Discretos**

- Sistemas Estáveis e Instáveis

A estabilidade pode ser interna e externa. A estabilidade BIBO é análoga ao conceito em sistemas contínuos.

- Sistemas com e sem Memória

Conceitos também idênticos àqueles de sistemas contínuos.

Equações de Sistemas Discretos (i)

- Serão tratados sistemas lineares invariantes e discretos no tempo (LTID), descritos por (forma com termos em avanço):

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \dots + a_{N-1} y[n+1] + a_N y[n] = \\ = b_{N-M} x[n+M] + b_{N-M+1} x[n+M-1] + \dots + b_{N-1} x[n+1] + b_N x[n]$$

esta é uma equação linear de diferenças, cuja ordem é $\text{Max}(N, M)$.

Assume - se que $a_0 = 1$ sem perda de generalidade.

Condição de Causalidade : A saída não depende de entradas futuras, logo $M \leq N$. Para um caso geral, $M = N$, pode - se expressar :

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \dots + a_{N-1} y[n+1] + a_N y[n] = \\ = b_0 x[n+N] + b_1 x[n+N-1] + \dots + b_{N-1} x[n+1] + b_N x[n]$$

Pode - se escrever a expressão na forma com operador de atraso :

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{N-1} y[n-N+1] + a_N y[n-N] = \\ = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_{N-1} x[n-N+1] + b_N x[n-N]$$

Equações de Sistemas Discretos (ii)

- **Solução Recursiva de Equação de Diferenças**

A equação anterior pode ser expressa como a seguir :

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_{N-1} x[n-N+1] + b_N x[n-N]$$

- A saída é calculada a partir de $2N+1$ parcelas de informação: N valores anteriores de saída, N valores anteriores de entrada e o valor atual de entrada.
- Em princípio, este método reflete o modo como um computador resolve uma equação recursiva de diferenças: Dados a entrada e as condições iniciais.
- Se o método for não recursivo, então a saída é computada apenas a partir das entradas, sem utilizar as saídas prévias.

Equações de Sistemas Discretos (iii)

- **Exemplo**

Resolva, de modo iterativo : $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$, onde

Condições iniciais $y[-1] = 16$, entrada causal $x[n] = n^2$ (início em $n = 0$).

Esta equação pode ser re - escrita : $y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$

Para $n = 0$, obtem - se : $y[0] = 0.5y[-1] + x[0] = 0.5(16) + (0)^2 = 8$

Para $n = 1$, obtem - se : $y[1] = 0.5y[0] + x[1] = 0.5(8) + (1)^2 = 5$

Para $n = 2$, obtem - se : $y[2] = 0.5y[1] + x[2] = 0.5(5) + (2)^2 = 6.5$

Para $n = 3$, obtem - se : $y[3] = 0.5y[2] + x[3] = 0.5(6.5) + (3)^2 = 12.25$

Para $n = 4$, obtem - se : $y[4] = 0.5y[3] + x[4] = 0.5(12.25) + (4)^2 = 22.125$

Equações de Sistemas Discretos (iv)

- **Notação Operacional**

- Analogamente a sistemas contínuos no tempo, Emprega-se uma notação operacional: o operador E .

O operador é aplicado da seguinte forma :

$$Ex[n] \equiv x[n+1]; \quad E^2 x[n] = x[n+2]; \dots E^N x[n] = x[n+N]$$

Exemplos :

Equação de diferenças de 1ª ordem $y[n+1] - ay[n] = x[n+1]$

Pode ser re - escrita : $Ey[n] - ay[n] = Ex[n] \therefore (E - a)y[n] = Ex[n]$

Equação de diferenças de 2ª ordem $y[n+2] + \frac{1}{4}y[n+1] + \frac{1}{16}y[n] = x[n+2]$

Pode ser re - escrita : $(E^2 + \frac{1}{4}E + \frac{1}{16})y[n] = E^2x[n]$

Equações de Sistemas Discretos (v)

- **Notação Operacional**

- Expressão geral para equação de diferenças de ordem N :

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N) y[n] = (b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \dots + b_{N-1} E + b_N) x[n]$$

Alternativamente, tem-se que :

$Q[E]y[n] = P[E]x[n]$, onde os polinômios são definidos como

$$Q[E] = E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N$$

$$P[E] = b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \dots + b_{N-1} E + b_N$$

- Resposta de sistemas LTID: A solução geral deste sistema é formada pelos componentes de entrada zero e de estado zero.

Resposta de Entrada Zero (i)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Este componente é a resposta do sistema para entrada nula.

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N) y_0[n] = 0 \therefore Q[E] y_0[n] = 0$$

Para a combinação linear resultar em zero, todas equações de diferenças existem e são da mesma forma. Esta é uma propriedade da função

exponencial: $E^k \{g^n\} = g^{k+n} = g^k g^n$, onde o termo g^k é uma constante.

$$y_0[n] = c g^n \Rightarrow E^k y_0[n] = y_0[n+k] = c g^{k+n}$$

Desta forma, o polinômio assume a forma :

$$Q[E] y_0[n] = c(g^N + a_1 g^{N-1} + \dots + a_{N-1} g + a_N) g^n = 0$$

A solução não - trivial do polinômio característico ($Q[g] = 0$) é :

$$Q[g] = g^N + a_1 g^{N-1} + \dots + a_{N-1} g + a_N = 0 \therefore$$

$$Q[g] = (g - g_1)(g - g_2) \dots (g - g_N) = 0$$

Resposta de Entrada Zero (ii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes distintas:

Tem -se N possíveis soluções para $Q[E]y_0[n] = 0$, dados por :

$$y_1[n] = c_1 g_1^n, y_2[n] = c_2 g_2^n, \dots, y_N[n] = c_N g_N^n$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_N$ são constantes arbitrárias

e $g_1, g_2, \dots, g_N$ são raízes características

Cada solução satisfaz individualmente o polinômio $Q[E]y_0[n] = 0$:

Como o sistema é linear, tem -se :

$$Q[E][(c_1 g_1^n + c_2 g_2^n + \dots + c_N g_N^n)] = 0$$

Assim, a solução geral é dada por :

$$y_0[n] = c_1 g_1^n + c_2 g_2^n + \dots + c_N g_N^n$$

Resposta de Entrada Zero (iii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes repetidas:

Para um sistema com o polinômio característico :

$$Q[g] = (g - g_1)^r (g - g_{r+1})(g - g_{r+2}) \dots (g - g_N)$$

tem os modos característicos : $g_1^n, n g_1^n, n^2 g_1^n, \dots, n^{r-1} g_1^n, g_{r+1}^n, \dots, g_N^n$

e solução : $y_0[n] = (c_1 + c_2 n + \dots + c_r n^{r-1}) g_1^n + c_{r+1} g_{r+1}^n + \dots + c_N g_N^n$.

Para raízes complexas:

- Estas raízes aparecem sempre aos pares.
- O procedimento é o mesmo que aquele para raízes reais. Nesta caso ter-se-á modos característicos complexos e forma de solução complexa.

Resposta de Entrada Zero (iv)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes complexas:

– Pode-se optar por não se trabalhar com a forma complexa:

Par de raízes complexas na forma polar :

$$g = |g|e^{jb} \quad \text{e} \quad g^* = |g|e^{-jb}$$

A resposta de entrada zero é dada por :

$$y_0[n] = c_1 g^n + c_2 (g^*)^n = c_1 |g|^n e^{jbn} + c_2 |g|^n e^{-jbn} \therefore$$

Sejam os coeficientes $c_1 = \frac{C}{2} e^{jq}$ e $c_2 = \frac{C}{2} e^{-jq}$, isto resulta :

$$y_0[n] = \frac{C}{2} |g|^n (e^{j(bn+q)} + e^{-j(bn+q)}) \therefore y_0[n] = C |g|^n \cos(bn + ?),$$

onde C e q são constantes determinadas a partir das condições auxiliares.

Resposta de Entrada Zero (v)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Ex: Calcule a resposta de entrada zero para o sistema LTID.

$$y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2],$$

para $y[-1] = 0$, $y[-2] = 25/4$, $x[n] = 4^{-n}u[n]$.

A equação característica é $g^2 - 0.6g - 0.16 = (g + 0.2)(g - 0.8)$

os modos característicos são $(-0.2)^n$, $(0.8)^n$ e a solução dada por :

$$y_0[n] = c_1(-0.2)^n + c_2(0.8)^n.$$

Para achar as constantes, faz-se $n = -1$ e $n = -2$ na equação acima :

$$\left. \begin{aligned} y_0[-1] = 0 &= c_1(-0.2)^{-1} + c_2(0.8)^{-2} \therefore -5c_1 + (5/4)^2 c_2 = 0 \\ y_0[-2] = 25/4 &= c_1(-0.2)^{-2} + c_2(0.8)^{-2} \therefore 25c_1 + (25/16)c_2 = 25/4 \end{aligned} \right\}$$
$$\Rightarrow c_1 = 1/5, \quad c_2 = 4/5.$$

A resposta de entrada zero é $y_0[n] = 1/5(-0.2)^n + 4/5(0.8)^n$.

Resposta de Entrada Zero (v)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Ex: Calcule a resposta de entrada zero para o sistema LTID.

$$(E^2 + 6E + 9)y[n] = (2E^2 + 6E)x[n]$$

$$\text{para } y[-1] = -1/3, \quad y[-2] = -2/9 \quad x[n] = 4^{-n}u[n].$$

A equação característica é $g^2 + 6g + 9 = (g + 3)(g + 3)$

os modos característicos são : $(-3)^n, n(-3)^n$ e a solução dada por :

$$y_0[n] = (c_1 + c_2 n)(-3)^n.$$

Para achar as constantes, faz - se $n = -1$ e $n = -2$ na equação acima :

$$\left. \begin{aligned} y_0[-1] &= -1/3 \therefore (c_1 + c_2(-1))(-3)^{-1} = -1/3 \therefore -c_1 + c_2 = -1 \\ y_0[-2] &= -2/9 \therefore (c_1 + c_2(-2))(-3)^{-2} = -2/9 \therefore c_1 - 2c_2 = -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow c_1 = 4, \quad c_2 = 3.$$

A resposta de entrada zero é $y_0[n] = (4 + 3n)(-3)^n$.

Resposta ao Impulso Unitário (i)

- **Fundamentos**

- Considere o sistema de n-ésima ordem especificado pela equação:

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N) y[n] = \\ = (b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \dots + b_{N-1} E + b_N) x[n]$$

ou $Q[E]y[n] = P[E]x[n]$

A resposta ao impulso é a solução desta equação para entrada impulso e condições iniciais nulas :

$$Q[E]h[n] = P[E]d[n]$$

s.a. $h[-1] = h[-2] = \dots = h[-N] = 0$

Resposta ao Impulso Unitário (ii)

- **Fundamentos**

- Exemplo: Calcule a resposta ao impulso para o sistema :

$$y[n] - 0.6y[n-1] - 0.16y[n-2] = 5x[n]$$

A resposta ao impulso é a solução da equação :

$$h[n] - 0.6h[n-1] - 0.16h[n-2] = 5d[n]$$

s.a. $h[-1] = h[-2] = 0$

Fazendo $n = 0$, tem - se : $h[0] - 0.6h[-1] - 0.16h[-2] = 5(1) \therefore h[0] = 5$

Fazendo $n = 1$, tem - se : $h[1] - 0.6h[0] - 0.16h[-1] = 5(0) \therefore h[1] = 3$

Continuando desta forma, determina - se os próximos termos de $h[n]$.

Esta solução é útil para se determinar a solução de forma fechada.

Resposta ao Impulso Unitário (iii)

- **A Solução de Forma Fechada**
 - A resposta ao impulso unitário $h[n]$ tem as características:
 - A entrada é nula exceto para $n=0$, implica resposta formada por modos característicos do sistema.
 - Em $n=0$, tem-se valor diferente de zero.

A forma geral de $h[n]$ é expressa como : $h[n] = A_0 d[n] + y_c[n]u[n]$

onde $y_c[n]$ é a combinação linear dos modos característicos do sistema.

Como $Q[E]h[n] = P[E]d[n] \Rightarrow Q[E](A_0 d[n] + y_c[n]u[n]) = P[E]d[n]$

Como $y_c[n]$ é feito de modos característicos, tem - se $Q[E](y_c[n]u[n]) = 0$

Logo, $Q[E](A_0 d[n]) = P[E]d[n]$

Resposta ao Impulso Unitário (iv)

- **A Solução de Forma Fechada**

Lembrando que $Q[E](A_0 d[n]) = P[E]d[n] \therefore$

$$A_0(d[n+N] + a_1 d[n+N-1] + \dots + a_N d[n]) = b_0 d[n+N] + \dots + b_N d[n]$$

Faz - se $n = 0$, emprega - se $d[m] = 0 \forall m \neq 0$, e $d[0] = 1$, obtem - se

$$A_0 a_N = b_N \therefore A_0 = \frac{b_N}{a_N}, \text{ finalmente resultando em}$$

$$h[n] = \frac{b_N}{a_N} d[n] + y_c[n] u[n]$$

Os coeficientes desconhecidos de $y_c[n]$ são determinados a partir do conhecimento dos N valores de $h[n]$.

Resposta ao Impulso Unitário (iv)

- **A Solução de Forma Fechada**

- Exemplo: Determine a resposta ao impulso do exemplo anterior

$$y[n] - 0.6y[n-1] - 0.16y[n-2] = 5x[n]$$

Esta equação pode ser re - escrita na forma avançada :

$$y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2] \text{ ou}$$

$$(E^2 - 0.6E - 0.16)y[n] = 5E^2 x[n]$$

O polinômio característico é : $g^2 - 0.6g - 0.16 = (g + 0.2)(g - 0.8)$

Modos característicos : $(-0.2)^n$ e $(0.8)^n \Rightarrow y_c[n] = c_1(-0.2)^n + c_2(0.8)^n$

Como $b_N = 0 \Rightarrow A_0 = 0$, resultando em $h[n] = [c_1(-0.2)^n + c_2(0.8)^n]u[n]$

Como $h[-1] = h[-2] = 0$, por substituição direta na forma interativa,

encontra - se $h[n] = [(-0.2)^n + 4(0.8)^n]u[n]$

Resposta de Estado Zero (i)

- **Introdução**

- Resposta $y[n]$ para condições iniciais nulas no sistema discreto de entrada arbitrária $x[n]$ diferente de zero.
 - Esta situação é comum a todos sistemas tratados nesta seção, a não ser quando dito o contrário.

Sinal de entrada $x[n]$ expresso como soma de componentes impulso :

A componente $x[n]$ em $n = m$ é $x[m]d[n - m]$, logo escreve - se :

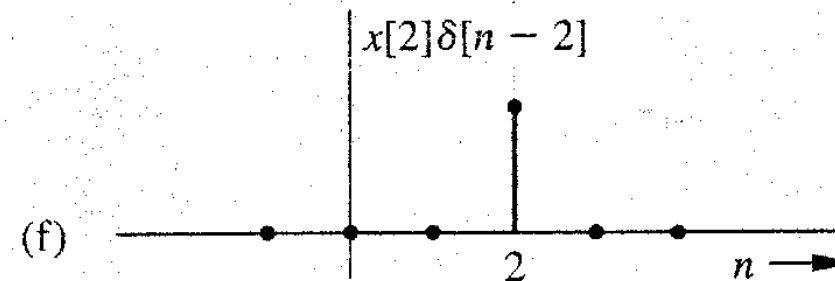
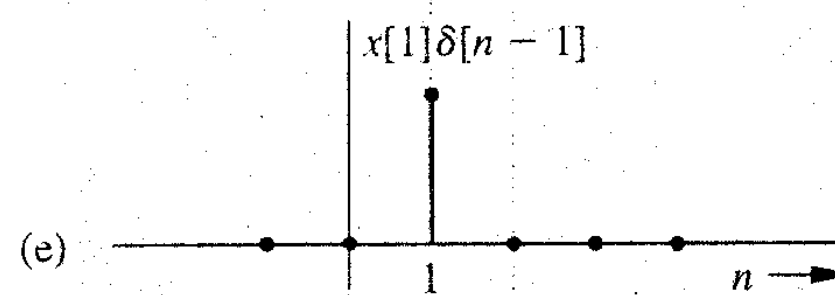
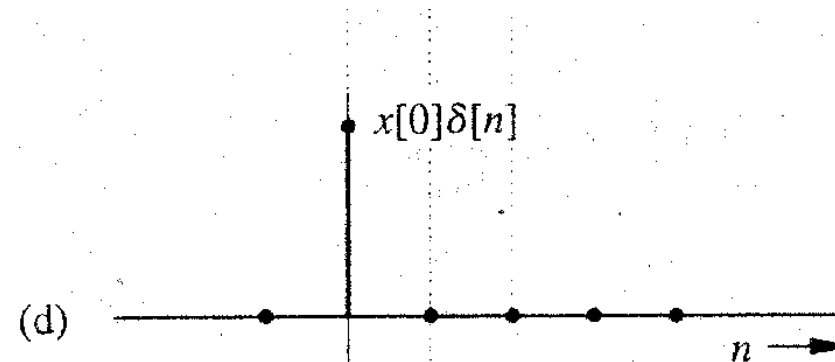
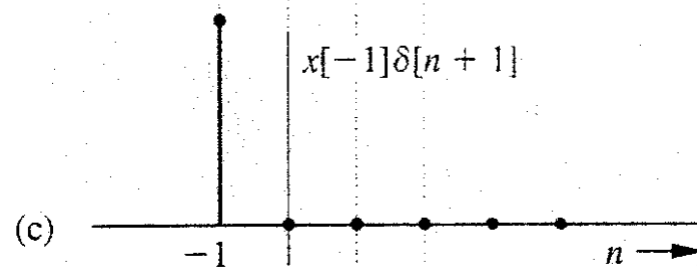
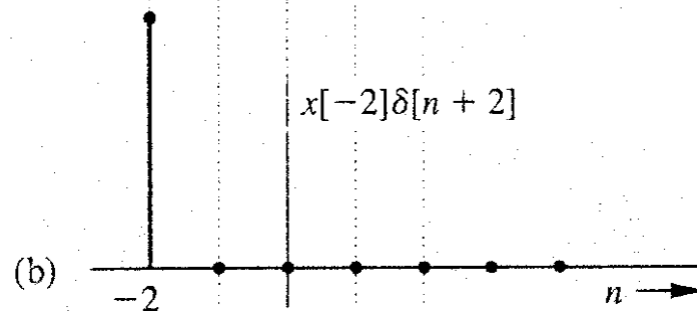
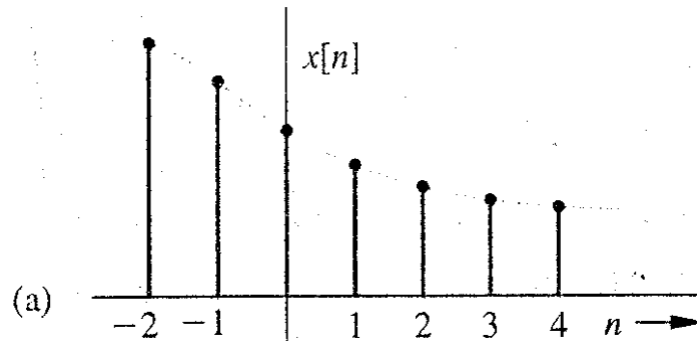
$$x[n] = x[0]d[n] + x[1]d[n - 1] + \dots + x[-1]d[n + 1] + \dots$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]d[n - m],$$

Para sistemas lineares, sua resposta para qualquer entrada arbitrária é obtida somando - se sua resposta às suas componentes impulso.

Resposta de Estado Zero (ii)

- Introdução



Resposta de Estado Zero (iii)

- **Introdução**

A notação abaixo indica a entrada e sua correspondente saída :

$x[n] \Rightarrow y[n]$, em particular $d[n] \Rightarrow h[n]$.

Devido à invariância no tempo, $d[n-m] \Rightarrow h[n-m]$

Devido à linearidade : $x[m]d[n-m] \Rightarrow x[m]h[n-m]$

$$\text{e } \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]d[n-m]}_{x[n]} \Rightarrow \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]}_{y[n]}$$

$$\text{Logo, } y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

Resposta de Estado Zero (iv)

- **Somatório de Convolução**

- O somatório de convolução de duas funções é definido como:

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m], \text{ com as propriedades relevantes :}$$

Comutativa : $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$

Distributiva : $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$

Associativa : $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$

Deslocamento no tempo :

$$x_1[n] * x_2[n] = c[n], \text{ então } x_1[n-m] * x_2[n-p] = c[n-m-p]$$

Convolução com um impulso : $x[n] * d[n] = x[n]$

Largura : Sejam $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sinais com larguras W_1 e W_2 finitas, então

$c[n] = x_1[n] * x_2[n]$, tem largura $W_1 + W_2$.

A largura de um sinal é o número de elementos (comprimento) menos um.

Resposta de Estado Zero (v)

- **Somatório de Convolução**

- Causalidade e Resposta de Estado Zero

Considere a resposta do sistema : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m],$

para um sinal de entrada $x[n]$ causal, então $x[m] = 0$ para $m < 0$;

para um sistema causal (i.e. $h[n]$ causal), então $h[n-m] = 0$ para $m > n$.

Para sinal e sistema causais : $y[n] = \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m]$

- Somatório de convolução a partir de uma tabela: Pode-se utilizar uma tabela de somatórios de convolução para determinar outros somatórios de convolução mais complexos.

Resposta de Estado Zero (vi)

- **Somatório de Convolução**

– Exemplo: Determine $c[n]$ para o sistema LTID:

$$\left. \begin{array}{l} x[n] = (0.8)^n u[n] \\ g[n] = (0.3)^n u[n] \end{array} \right\}, \quad \text{então} \quad \left\{ \begin{array}{l} x[m] = (0.8)^m u[m] \\ g[n-m] = (0.3)^{n-m} u[n-m] \end{array} \right.$$

$$c[n] = x[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]g[n-m], \text{ como o sinal e o sistema são causais :}$$

$$c[n] = \sum_{m=0}^n x[m]g[n-m] \therefore c[n] = \sum_{m=0}^n (0.8)^m u[m](0.3)^{n-m} u[n-m]$$

$$c[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^n (0.8)^m (0.3)^{n-m}, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \therefore c[n] = (0.3)^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{0.8}{0.3}\right)^m u[n]$$

$$c[n] = (0.3)^n \frac{(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}}{(0.3)^n (0.8 - 0.3)} u[n] = 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}] u[n]$$

Resposta de Estado Zero (vii)

- **Somatório de Convolução**

- Exemplo: A resposta de estado zero para o sistema LTID:

$$y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2]$$

A entrada é $x[n] = -4^{-n}u[n]$ e a resposta ao impulso unitário é

$h[n] = [(-0.2)^n + 4(0.8)^n]u[n]$. Assim, a resposta é:

$$y[n] = x[n] * h[n] = (0.25)^n u[n] * [(-0.2)^n u[n] + 4(0.8)^n u[n]] \therefore$$

$$y[n] = (0.25)^n u[n] * (-0.2)^n u[n] + (0.25)^n u[n] * 4(0.8)^n u[n]$$

Tabela de somatórios de convolução : $x_1[n] = g_1^n u[n]$; $x_2[n] = g_2^n u[n]$;

$$x_1[n] * x_2[n] = \left[\frac{g_1^{n+1} - g_2^{n+1}}{g_1 - g_2} \right] u[n], \quad \text{então}$$

$$y[n] = \left[\frac{g_1^{n+1} - g_2^{n+1}}{g_1 - g_2} \right] u[n] + 4 \left[\frac{g_1^{n+1} - g_3^{n+1}}{g_1 - g_3} \right] u[n]$$

Resposta de Estado Zero (viii)

- **Somatório de Convolução**

- Exemplo: continuação:

$$y[n] = \left[\frac{g_1^{n+1} - g_2^{n+1}}{g_1 - g_2} \right] u[n] + 4 \left[\frac{g_1^{n+1} - g_3^{n+1}}{g_1 - g_3} \right] u[n] \therefore$$

$$y[n] = \left[\frac{(0.25)^{n+1} - (-0.2)^{n+1}}{(0.25) - (-0.2)} \right] u[n] + 4 \left[\frac{(0.25)^{n+1} - (0.8)^{n+1}}{(0.25) - (0.8)} \right] u[n] \therefore$$

$$y[n] = (2.22[(0.25)^{n+1} - (-0.2)^{n+1}] - 7.27[(0.25)^{n+1} - (0.8)^{n+1}])u[n] \therefore$$

$$y[n] = [-5.05(0.25)^{n+1} - 2.22(-0.2)^{n+1} + 7.27(0.8)^{n+1}]u[n],$$

lembrando que $g^{n+1} = g \cdot g^n$, a resposta pode ser re-escrita :

$$y[n] = [-1.26(0.25)^n + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n]u[n] \therefore$$

$$y[n] = [-1.26(4)^{-n} + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n]u[n]$$

Resposta de Estado Zero (ix)

– Resposta para Entradas Complexas

- A parte real da entrada gera a parte real da resposta e a parte imaginária da entrada gera a parte imaginária da resposta. Logo,

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n] \quad \text{e} \quad y[n] = y_r[n] + jy_i[n]$$

$$\text{logo, } x_r[n] \Rightarrow y_r[n] \quad \text{e} \quad x_i[n] \Rightarrow y_i[n]$$

– Entradas Múltiplas

- Entradas múltiplas para um sistema LTI são tratadas empregando o princípio da superposição.

Resposta de Estado Zero (x)

- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**

- Procedimento Gráfico:

O somatório de convolução de sinais causais $x[n]$ e $g[n]$ é dado por :

$$c[n] = \sum_{m=0}^n x[m]g[n-m]$$

O somatório de convolução pode ser determinado pelo procedimento :

0. Trace o gráfico de $x[m]$ e $g[m]$ como funções de m .

1. Inverta a função $g[m]$ em torno do eixo vertical ($m = 0$) e obtenha $g[-m]$.

2. Desloque $g[-m]$ por n unidades e obtenha $g[n-m]$. Para $n > 0$, move - se à direita (atraso); para $n < 0$, move - se à esquerda (avanço).

3. Multiplique $x[m]$ por $g[n-m]$, adicione todos produtos e obtenha $c[n]$.

O procedimento é repetido para cada valor de n no intervalo $-\infty$ a ∞ .

Resposta de Estado Zero (xi)

- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**

- Exemplo: Determine graficamente a $c[n] = x[n] * g[n]$.

$$x[n] = (0.8)^n, \quad g[n] = (0.3)^n, \quad \text{logo,} \quad x[m] = (0.8)^m, \quad g[n-m] = (0.3)^{n-m}$$

As duas funções se sobrepoem no intervalo $0 \leq m \leq n$, assim :

$$c[n] = \sum_{m=0}^n x[m]g[n-m] = \sum_{m=0}^n (0.8)^m (0.3)^{n-m} = (0.3)^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{0.8}{0.3}\right)^m \therefore$$

$$c[n] = 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}], \quad n \geq 0.$$

Para $n < 0$, não existe sobreposição entre $x[m]$ e $g[n-m]$, logo,

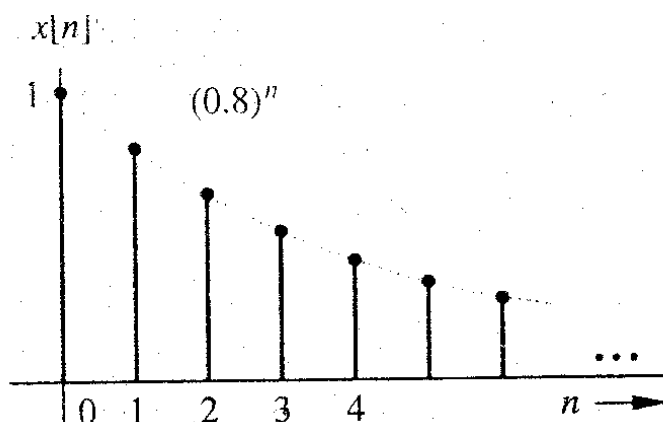
$$c[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}], & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } c[n] = 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}]u[n]$$

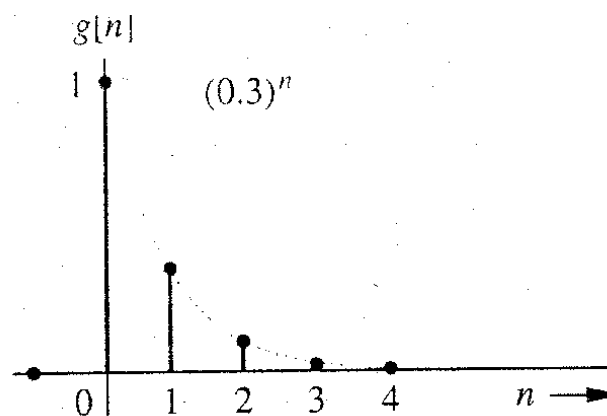
A Figura (h), a seguir, mostra a situação geral para $n \geq 0$.

Resposta de Estado Zero (xii)

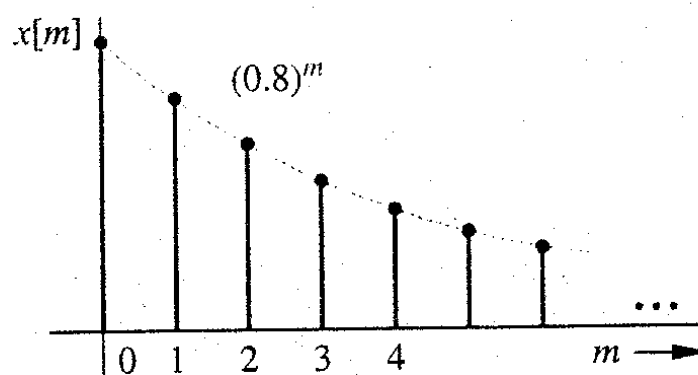
- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**
 - Exemplo: Representação gráfica



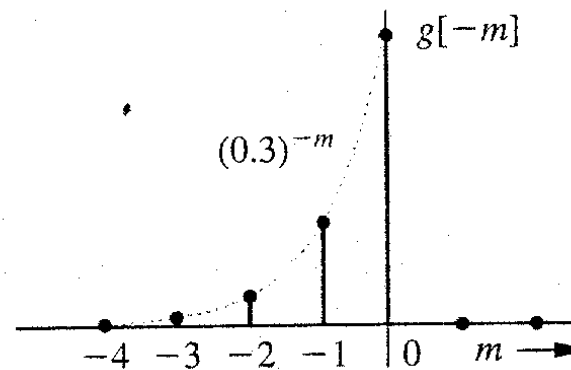
(a)



(b)



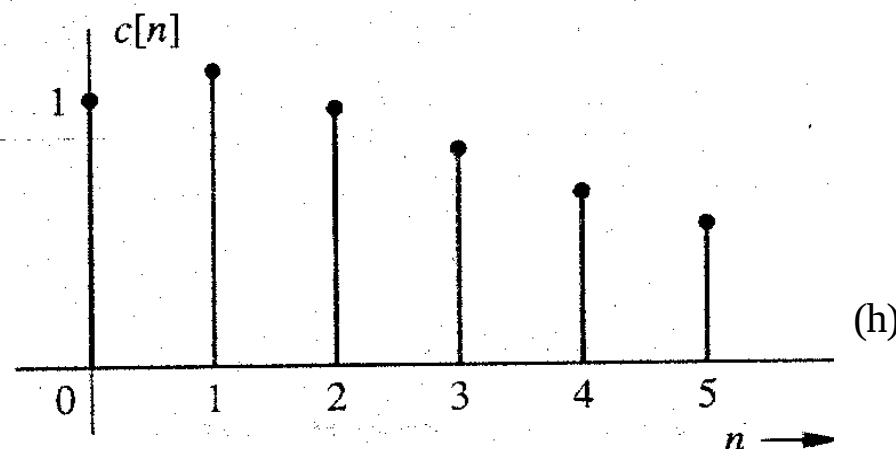
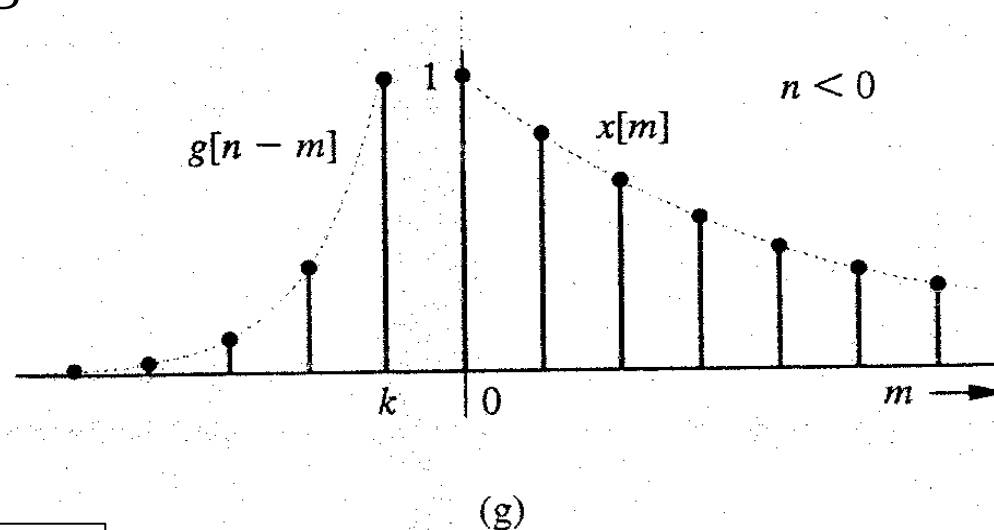
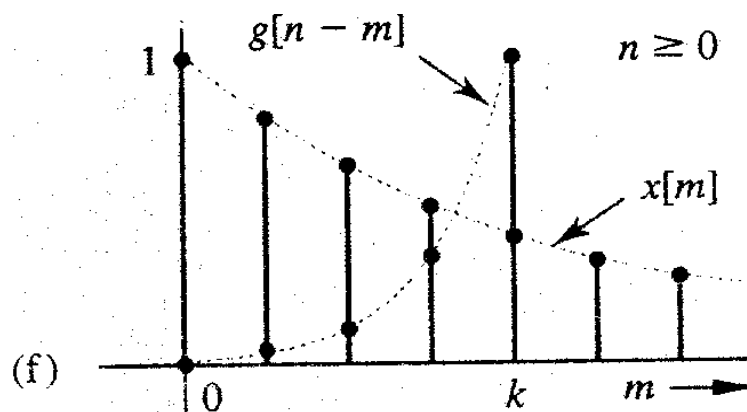
(c)



(d)

Resposta de Estado Zero (xiii)

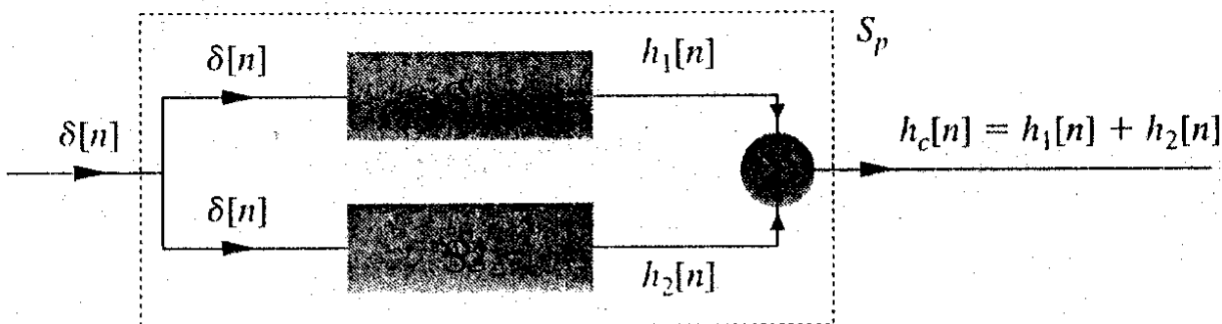
- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**
 - Exemplo: Representação gráfica



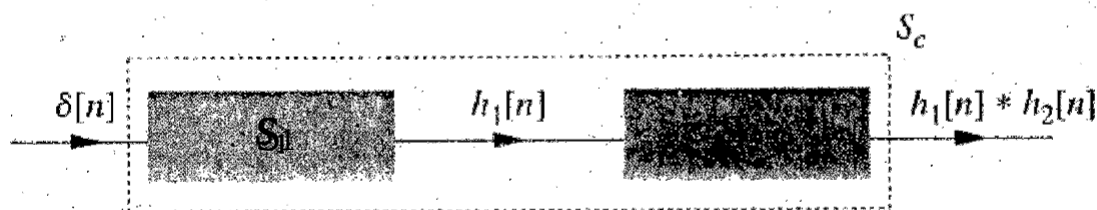
Resposta de Estado Zero (xv)

- **Somatório de Convolução: Sistemas Interconectados**

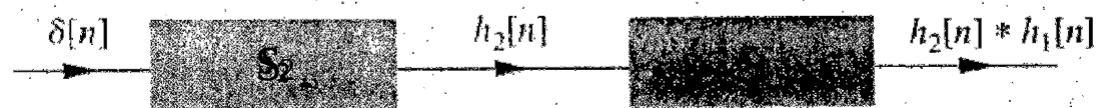
- Sistema composto por subsistemas mais simples para se gerar a resposta ao impulso de sistemas em paralelo ou em cascata.



(a)



(b)

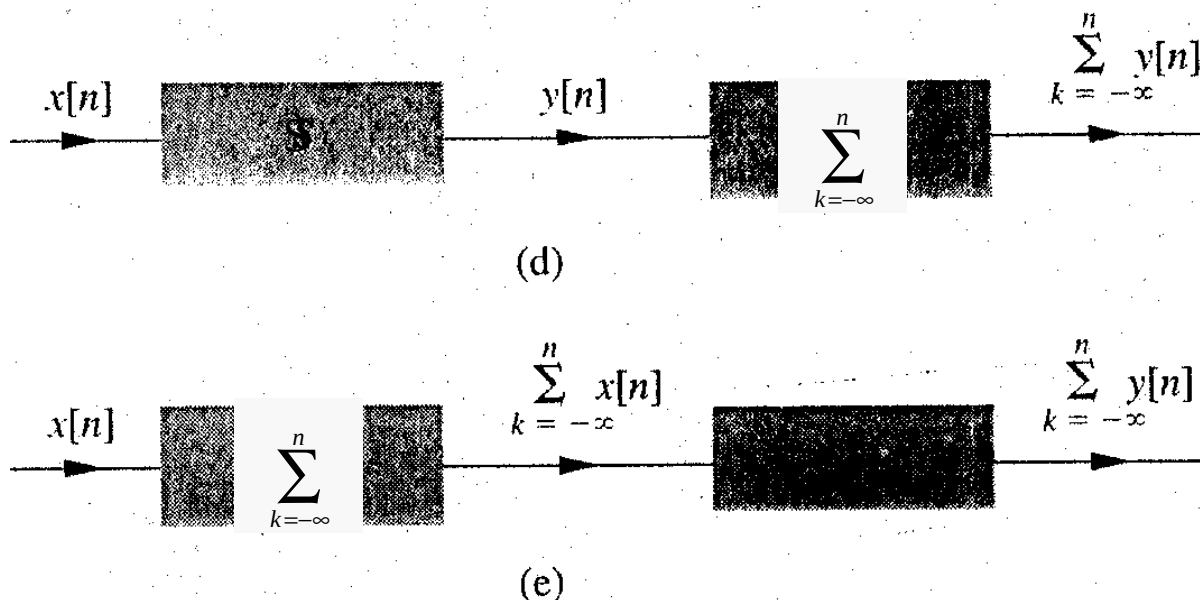


(c)

Resposta de Estado Zero (xvi)

- **Somatório de Convolução: Sistemas Interconectados**

- Sistema LTID composto por sistema S com resposta ao impulso $h[n]$ seguido de acumulador.



A resposta $g[n]$ ao degrau unitário de um sistema LTID, com resposta ao impulso $h[n]$, é:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

Resposta de Estado Zero (xvii)

- **Somatório de Convolução: Sistemas Interconectados**
 - Sistema Inverso: $h[n] * h_i[n] = d[n]$
 - Analogia entre operadores de sistemas contínuos e sistemas discretos: integrador e acumulador, diferenciador e diferença para trás.

Acumulador : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$; Diferença para trás : $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Exemplo de sistema inverso considerando a resposta ao impulso :

do acumulador : $h_{acc}[n] = \sum_{k=-\infty}^n d[k] = u[n]$

da diferença para trás : $h_{bdf}[n] = d[n] - d[n-1]$

$$h_{acc}[n] * h_{bdf}[n] = u[n] * \{d[n] - d[n-1]\} = u[n] - u[n-1] = d[n]$$

Resposta de Estado Zero (xviii)

- **Somatório de Convolução: Função Exponencial Incessante (z^n)**
 - Função característica: Entrada para qual um sistema responde da mesma forma, a exponencial é o único caso.

Seja um sistema LTID com resposta ao impulso $h[n]$ e entrada z^n então a resposta do sistema $y[n]$ é:

$$y[n] = h[n] * z^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] * z^{n-m} = z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] * z^{-m} \therefore$$

$$y[n] = H[z]z^n, \text{ onde } H[z] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] * z^{-m}, \text{ válido para somatório finito.}$$

$H[z]$ é uma constante para um dado valor de z .

$$\text{Função de transferência : } H[z] = \frac{\text{sinal de saída}}{\text{sinal de entrada}} \bigg|_{\text{entrada} = \text{exponencial incessante } z^n}$$

Resposta de Estado Zero (xix)

- **Somatório de Convolução: : Função Exponencial Incessante (z^n)**
 - A função de transferência para sistema LTID, com sinal de entrada não-causal pode ser expressa em termos de polinômio:

Tem - se que $H[z] = \frac{\text{sinal de saída}}{\text{sinal de entrada}} \Big|_{\text{entrada} = z^n}$

Na forma de polinômio a exponencia l incessante e sua resposta :

$$H[z][Q[E]z^n] = P[E]z^n$$

Como $E^k z^n = z^{n+k} = z^n z^k \therefore \begin{cases} P[E]z^n = P[z]z^n \\ Q[E]z^n = Q[z]z^n \end{cases}$

Conclui - se que a função de transferência é $H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$

Resposta de Estado Zero (xx)

- Somatório de Convolução: Resposta Total**

– Resposta total = Resposta entrada-zero + Resposta estado-zero=

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{j=1}^N c_j g_j^n}_{\text{entrada zero}} + \underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{estado zero}}, \text{ para autovalores distintos} \\ \underbrace{\sum_{j=1}^r n^{j-1} c_j g_1^n + \sum_{j=r+1}^N c_j g_j^n}_{\text{entrada zero}} + \underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{estado zero}}, \text{ para autovalores repetidos e distintos} \end{array} \right.$$

Exemplo : Sistema : $y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2]$

Com condições iniciais : $y[-1] = 0$, $y[-2] = 25/4$ e entrada $(4)^{-n}u[n]$

$$\text{resp} = \underbrace{0.2(-0.2)^n + 0.8(0.8)^n}_{\text{entrada zero}} - \underbrace{1.26(4)^n + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n}_{\text{estado zero}}$$

Solução Clássica de Equações de Diferenças (i)

- **Determinação das Respostas Natural e Forçada**

- A resposta natural de um sistema consiste de todos termos de modos característicos na resposta.
- A a resposta forçada é composta pelos termos remanescentes que não forem de modos característicos.

resposta total = $y[n] = y_c[n] + y_f[n]$, logo,

$$Q[E](y_c[n] + y_f[n]) = P[E]x[n] \therefore \begin{cases} Q[E]y_c[n] = 0 \\ Q[E]y_f[n] = P[E]x[n] \end{cases}$$

- Na resposta natural, as constantes arbitrárias são determinadas a partir, em geral, das condições auxiliares ($y[0], y[1], \dots, y[n-1]$) ao invés das condições iniciais ($y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$).
- Cálculo de resposta forçada por método de coeficientes indeterminados.

Solução Clássica de Equações de Diferenças (ii)

- **Resposta Forçada**

- A tabela mostra algumas funções de entrada e a saída forçada:

Entrada

$$r^n, \quad r \neq g_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$r^n, \quad r = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\cos(bn + q)$$

$$\left(\sum_{i=0}^m a_i n^i \right) r^n$$

Saída

$$cr^n$$

$$cnr^n$$

$$c \cos(bn + f)$$

$$\left(\sum_{i=0}^m c_i n^i \right) r^n$$

Solução Clássica de Equações de Diferenças (iii)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo :

Resolva a equação de diferenças : $(E^2 - 5E + 6)y[n] = (E - 5)x[n]$, com entrada $x[n] = (3n + 5)u[n]$ e condições auxiliares $y[0] = 4$, $y[1] = 13$.

Polinômio característico : $g^2 - 5g + 6 = (g - 2)(g - 3)$, assim :

Logo, a resposta natural é $y_c[n] = B_1(2)^n + B_2(3)^n$

Pela tabela anterior, a resposta forçada é $y_f[n] = c_1n + c_0$

Considerando a resposta forçada, tem-se que :

$$y_f[n+1] = c_1(n+1) + c_0 = c_1n + c_1 + c_0$$

$$y_f[n+2] = c_1(n+2) + c_0 = c_1n + 2c_1 + c_0$$

$$x[n] = 3n + 5 \quad \text{e} \quad x[n+1] = 3(n+1) + 5 = 3n + 8$$

Solução Clássica de Equações de Diferenças (iv)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo (continuação) :

Lembre que $Q[E]y_f[n] = P[E]x[n]$ logo tem-se :

$$y_f[n+2] - 5y_f[n+1] + 6y_f[n] = x[n+1] - 5x[n] \therefore$$

$$c_1n + 2c_1 + c_0 - 5(c_1n + c_1 + c_0) + 6(c_1n + c_0) = 3n + 8 - 5(3n + 5) \therefore$$

$$2c_1n - 3c_1 + 2c_0 = -12n - 17, \quad \text{por comparação tem-se}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2c_1 = -12 \\ -3c_1 + 2c_0 = -17 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -6 \\ c_0 = -\frac{35}{2} \end{cases} \Rightarrow y_f[n] = -6n - \frac{35}{2}$$

$$\text{Resposta total : } y[n] = y_c[n] + y_f[n] = B_1(2)^n + B_2(3)^n - 6n - \frac{35}{2} \quad n \geq 0$$

Solução Clássica de Equações de Diferenças (v)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo (continuação):

$$\text{Resposta total : } y[n] = y_c[n] + y_f[n] = B_1(2)^n + B_2(3)^n - 6n - \frac{35}{2} \quad n \geq 0$$

As condições auxiliares são usadas para determinar B_1 e B_2 :

$$y[0] = 4 = B_1(2)^0 + B_2(3)^0 - 6(0) - \frac{35}{2} \therefore B_1 + B_2 = \frac{43}{2}$$

$$y[1] = 13 = B_1(2)^1 + B_2(3)^1 - 6(1) - \frac{35}{2} \therefore 2B_1 + 3B_2 = \frac{73}{2}$$

$$\begin{cases} (B_1 + B_2)(-2) = \frac{43}{2}(-2) \\ 2B_1 + 3B_2 = \frac{73}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} -2B_1 - 2B_2 = -\frac{86}{2} \\ 2B_1 + 3B_2 = \frac{73}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} B_2 = \frac{73}{2} - \frac{86}{2} = -\frac{13}{2} \\ B_1 = \frac{43}{2} - B_2 = 15 \end{cases}$$

$$\text{Resposta total : } y[n] = y_c[n] + y_f[n] = 15(2)^n - \frac{13}{2}(3)^n - 6n - \frac{35}{2}$$

Solução Clássica de Equações de Diferenças (vi)

- O método clássico requer condições auxiliares pois em $n = -1, -2, \dots, -N$ apenas a componente de entrada zero existe e neste método, não se pode separar as componentes de entrada zero e estado zero. Logo, as condições iniciais devem ser aplicadas à resposta total que se inicia em $n=0$. Logo precisa-se de condições auxiliares: $y[0], y[1], \dots, y[N-1]$.
 - Se forem informadas condições iniciais $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$. então pode-se usar procedimento iterativo para se obter as condições auxiliares $y[0], y[1], \dots, y[N-1]$.

O sistema especificado pela equação $Q[E]y[n] = P[E]x[n]$

tem resposta forçada para a entrada exponencial $x[n] = r^n$ dada por

$$y_f[n] = H[r]r^n \quad \text{onde} \quad \begin{cases} r \neq g_i \text{ (modo característico)} \\ H[r] = \frac{P[r]}{Q[r]} \end{cases}$$

Estabilidade de Sistemas (i)

- **Estabilidade BIBO**

- Se toda entrada limitada produzir saídas limitadas no sistema, este é dito estável BIBO. Em contraste, se alguma entrada limitada resultar em resposta ilimitada o sistema é definido com instável BIBO. Assim, para um sistema LTID:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \therefore$$

$$|y[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| |x[n-m]|,$$

Se $x[n]$ limitada, então $|x[n-m]| < K_1 < \infty$ e $|y[n]| \leq K_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]|$.

Condição necessária e suficiente para estabilidade BIBO:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < K_2 < \infty.$$

Estabilidade de Sistemas (ii)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

Seja um sistema LTID definido pelo polinômio : $Q(E)y[n] = P(E)x[n]$.

Para modos característicos g^n , com g complexo, tem-se que o sistema é :

- Assintoticamente estável : $g^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para $|g| < 1$.

- Instável : $g^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, para $|g| > 1$.

- Marginalmente estável : $|g|^n = 1$ quando $n \rightarrow \infty$ para $|g| = 1$.

Estes resultados são válidos também para raízes repetidas.

Raízes imaginárias repetidas e $|g| = 1$ tornam o sistema instável, pois

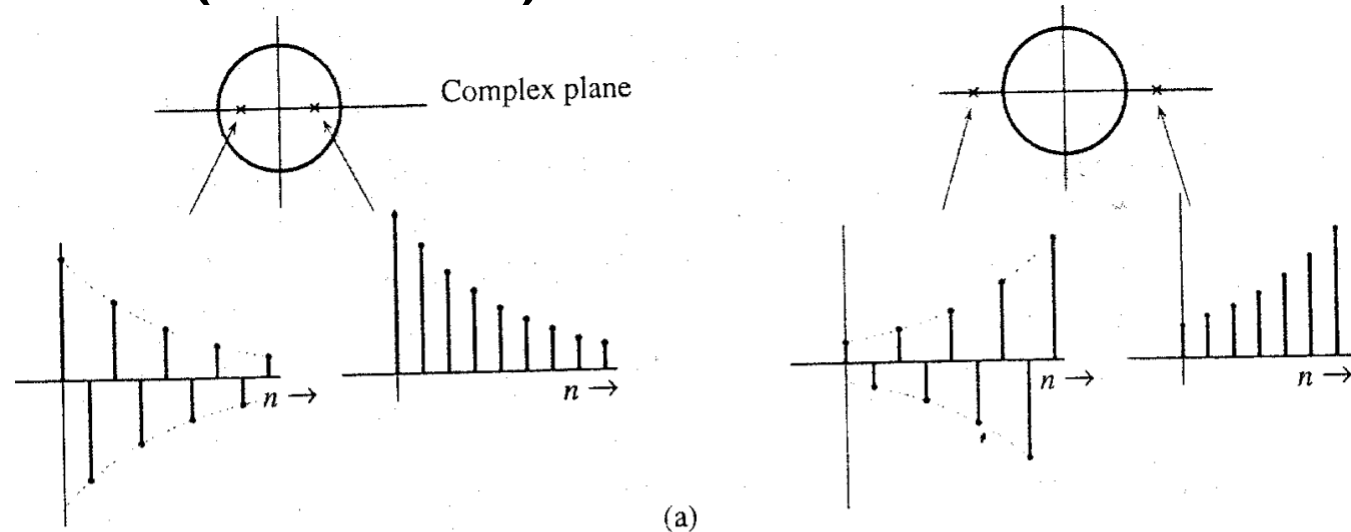
modos característicos $n^{r-1}g^n$, então $|n^{r-1}g^n| = n^{r-1} \rightarrow \infty$ se $n \rightarrow \infty$

Estabilidade de Sistemas (iii)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

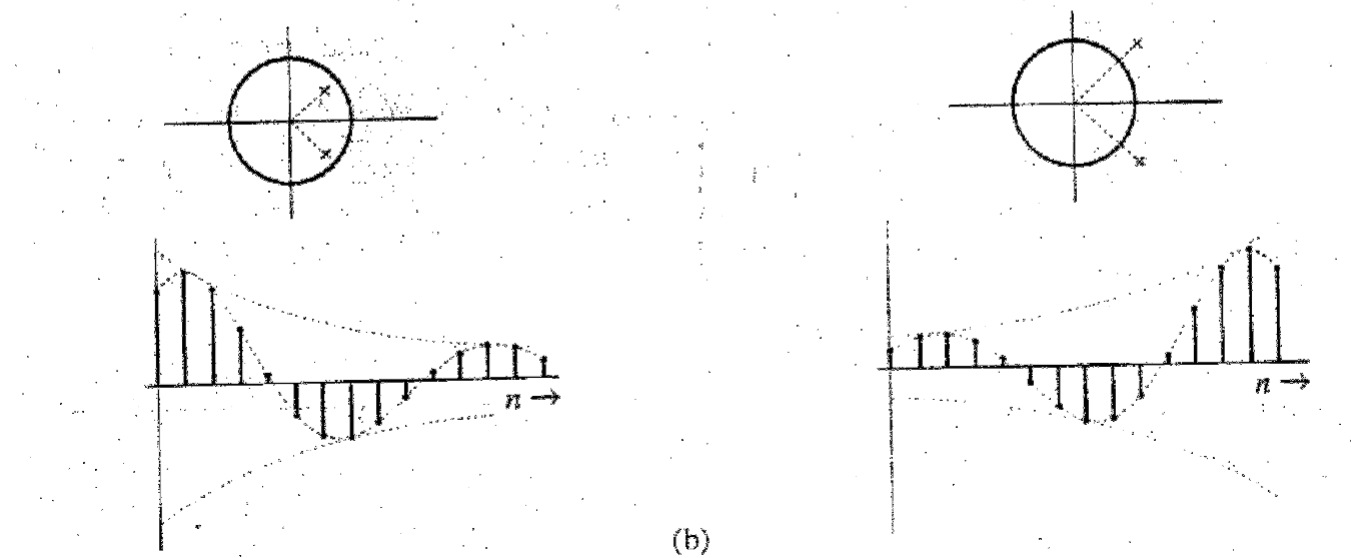
-Raízes reais

Dentro e fora do círculo de raio 1.



-Raízes complexas

Dentro e fora do círculo de raio 1.

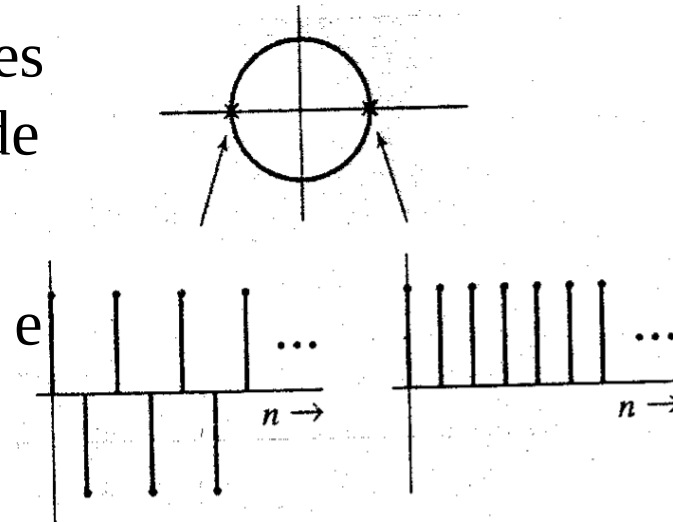


Estabilidade de Sistemas (iv)

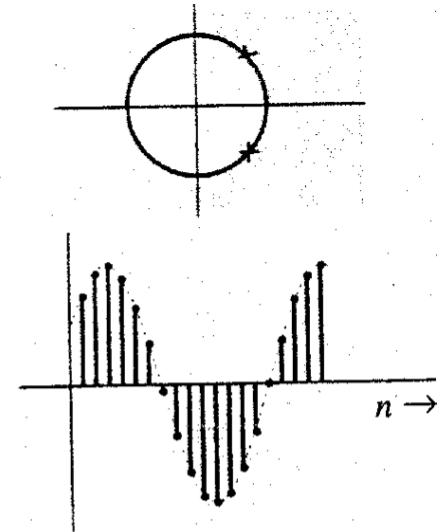
- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

- Raízes simples sobre o círculo de raio 1 :

Reais reais e complexas.

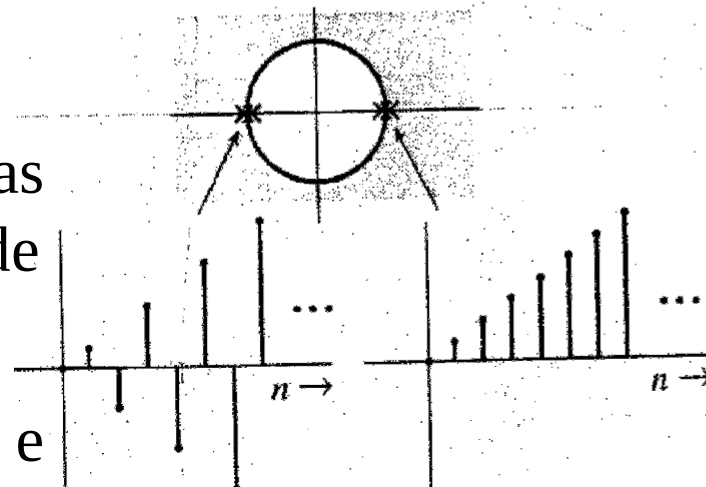


(c)

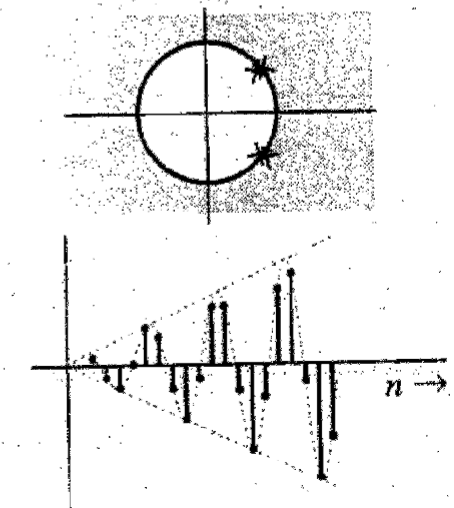


-Raízes repetidas sobre o círculo de raio 1:

Raízes reais e complexas.



(d)



Estabilidade de Sistemas (v)

- **Definição de Estabilidade Interna**

- Um sistema LTID é assintoticamente estável se e só se todas raízes características (simples ou repetidas) estiverem dentro do círculo unitário.
- Um sistema LTID é instável se e só se for verdade ao menos uma das condições: (i) ao menos uma das raízes está fora do círculo unitário; (ii) existem raízes repetidas sobre o círculo unitário.
- Um sistema LTID é marginalmente estável se e só se não existirem raízes características fora do círculo unitário e se houver algumas raízes não repetidas sobre o círculo unitário.

- **Relação entre Estabilidade Interna e Externa**

- Estabilidade interna é determinada para condições iniciais não nulas e entrada nula enquanto que a externa é determinada com condições iniciais nulas e entrada diferente de zero.
- Estabilidade interna assegura estabilidade externa mas o inverso não é verdadeiro.

Parâmetros e Comportamento de Sistemas (i)

- **O comportamento de um sistema LTID (com respeito aos seus parâmetros):**
 - Depende dos modos característicos em termos de módulo, tempo e precisão.
 - Responde fortemente a entradas similares a seus modos característicos e e pobremente a entradas muito diferentes.
 - Tem seu tempo de resposta indicado pela largura da resposta ao impulso.
 - Dispersa, em geral, pulsos discretos no tempo que são aplicados a sistemas discretos no tempo.
 - Tem a quantidade de dispersão e a taxa de transmissão de informação determinadas pela constante de tempo do sistema.

Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
 - Todos
- **Problemas**
 - 3.1-1, 3.1-2, 3.1-4
 - 3.2-1 até 3.2-4.
 - 3.3-1, 3.3-3, 3.3-5 até 3.3-7.
 - 3.4-1 até 3.4-5, 3.4-7 até 3.4-9, 3.4-11 e 3.4-13.
 - 3.5-1 até 3.5-5.
 - 3.6-1 até 3.6-5 3.6-7.
 - 3.7-1 até 3.7-4.
 - 3.8-1 até 3.8-5, 3.8-10, 3.8-11, 3.8-16 e 3.8-17.
 - 3.9-1 até 3.9-8.
 - 3.10-1 até 3.10.-6.