

ES 413 Sinais e Sistemas

Análise no Domínio do Tempo de Sistemas Contínuos

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo
Depto. of Sistemas de Computação
Centro de Informática - UFPE

Capítulo 2

Conteúdo

- **Introdução**
- **Resposta de Entrada Zero**
- **Resposta ao Impulso Unitário**
- **Resposta de Estado Zero**
- **Solução Clássica de Equações Diferenciais**
- **Estabilidade de Sistemas**
- **Parâmetros e Comportamento do Sistema**

Análise no Tempo de SLCT (i)

- **Introdução**

- Serão considerados sistemas diferenciais lineares para análise.
 - Serão tratados sistemas lineares invariantes e contínuos no tempo (LTIC), descritos por:

$$\begin{aligned} \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \dots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) = \\ = b_{N-M} \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_{N-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_N x(t) \end{aligned}$$

onde a_i e b_i são constantes. Pode - se rescrever com o uso de D :

$$\begin{aligned} (D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) y(t) = \\ = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N) x(t) \end{aligned}$$

ou, em termos de polinômio : $Q(D)y(t) = P(D)x(t)$

Análise no Tempo de SLCT (ii)

- **Introdução**

- Valores de M e N , contudo não deve ocorrer $M > N$ pois:
 - A expressão anterior atuaria como diferenciador (função de transferência) de ordem $(M-N)$. Isto poderia levar o sistema a instabilidade (BIBO) pois a derivada de uma entrada degrau unitário será ilimitada (função impulso unitário).
 - Em geral, um sinal de ruído é rápido, gerando valores altos de derivadas. Logo o diferenciador aumenta seu efeito.

Recomenda - se, portanto, utilizar : $M \leq N$.

Esta hipótese será assumida daqui para frente.

Como o sistema definido é linear, sua resposta total é dada por :

Resposta total = Resposta de Entrada Zero + Resposta de Estado Zero

Resposta de Entrada Zero (i)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Este componente é a resposta do sistema para entrada nula.

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) y_0(t) = 0 \therefore Q(D) y_0(t) = 0$$

Para a combinação linear resultar em zero, todas derivadas existem e são da mesma forma. Esta é uma propriedade de função exponencial :

$$y_0(t) = c e^{lt} \Rightarrow D y_0(t) = c l e^{lt} \Rightarrow D^2 y_0(t) = c l^2 e^{lt} \dots \Rightarrow D^N y_0(t) = c l^N e^{lt}$$

Desta forma, o polinômio assume a forma :

$$Q(D) y_0(t) = c (l^N + a_1 l^{N-1} + \dots + a_{N-1} l + a_N) e^{lt} = 0$$

Como, por hipótese $y_0(t) \neq 0$ e $c \neq 0$, então tem-se que

$$Q(l) = l^N + a_1 l^{N-1} + \dots + a_{N-1} l + a_N = 0 \therefore$$

$$Q(l) = (l - l_1)(l - l_2) \dots (l - l_N) = 0$$

Resposta de Entrada Zero (ii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes distintas:

Tem - se N possíveis soluções para $Q(D)y_0(t) = 0$, dados por :

$$y_1(t) = c_1 e^{l_1 t}, y_2(t) = c_2 e^{l_2 t}, \dots, y_{N-1}(t) = c_{N-1} e^{l_{N-1} t}, y_N(t) = c_N e^{l_N t}$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, c_N$ são constantes arbitrárias

Cada solução satisfaz individualmente o polinômio $Q(D)y_0(t) = 0$:

$$Q(D)y_1(t) = Q(D)y_2(t) = \dots = Q(D)y_{N-1}(t) = Q(D)y_N(t) = 0$$

Como o sistema é linear, tem - se :

$$Q(D)[(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_N y_N(t))] = 0$$

Assim, a solução geral é dada por :

$$y_0(t) = c_1 e^{l_1 t} + c_2 e^{l_2 t} + \dots + c_N e^{l_N t}$$

Resposta de Entrada Zero (iii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes distintas:

O polinômio $Q(l)$ é relacionado com as características do sistema.

Assim, chama-se $Q(l)$ de polinômio característico do sistema

e $Q(l) = 0$ de equação característica do sistema.

As raízes desta equação são chamadas de raízes características, valores característicos, frequências naturais e autovalores.

As exponenciais $e^{p_i t}, i = 1, \dots, N$, no sistema de entrada zero são chamadas de modos característicos, modos naturais ou modos. Estes influenciam na resposta completa. A resposta de entrada zero é uma combinação linear dos modos característicos do sistema.

Resposta de Entrada Zero (iv)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes repetidas:

Seja a equação $Q(D)y_0(t) = (D^2 - 2Dl + l^2)y_0(t) = (D - l)^2 y_0(t) = 0$,
com solução $y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{lt}$, provada por substituição direta

De modo análogo, a equação diferencial $(D - l)^r y_0(t) = 0$,

tem os modos característicos: $e^{lt}, te^{lt}, t^2 e^{lt}, \dots, t^{r-1} e^{lt}$

Assim, a solução é dada por: $y_0(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1})e^{lt}$.

Assim para um sistema com o polinômio característico:

$$Q(l) = (l - l_1)^r (l - l_{r+1}) \dots (l - l_N)$$

tem os modos característicos: $e^{l_1 t}, te^{l_1 t}, \dots, t^{r-1} e^{l_1 t}, e^{l_{r+1} t}, \dots, e^{l_N t}$

e solução: $y_0(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1})e^{l_1 t} + c_{r+1} e^{l_{r+1} t} + \dots + c_N e^{l_N t}$.

Resposta de Entrada Zero (v)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes complexas:

– O procedimento é o mesmo que aquele para raízes reais. Nesta caso ter-se-á modos característicos complexos e forma de solução complexa.

– Pode-se optar por não se trabalhar com a forma complexa:

Raízes complexas ocorrem aos pares : $y_0(t) = c_1 e^{(a+jb)t} + c_2 e^{(a-jb)t}$,

Para um sistema real, a resposta é real se c_1 e c_2 são conjugados :

$$c_1 = \frac{C}{2} e^{jq} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{C}{2} e^{-jq}, \text{ isto resulta :}$$

$$y_0(t) = \frac{C}{2} e^{jq} e^{(a+jb)t} + \frac{C}{2} e^{-jq} e^{(a-jb)t} = \frac{C}{2} e^{at} (e^{j(bt+q)} + e^{-j(bt+q)}) \therefore$$

$$y_0(t) = ce^{at} \cos(bt + ?)$$

Resposta de Entrada Zero (vi)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Exemplo Calcule a resposta de entrada zero para a equação:
 $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$, para $y_0(0) = 0, \dot{y}_0(0) = -5$.

A equação característica do sistema é $l^2 + 3l + 2 = 0$,

Para o qual as raízes características são $l_1 = -1, l_2 = -2$;

os modos característicos são e^{-t}, e^{-2t} e a solução dada por :

$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Para achar as constantes, calcula - se :

$\dot{y}_0(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$, segue - se a solução do sistema de equações :

$$\left. \begin{array}{l} y_0(0) = 0 = c_1 e^0 + c_2 e^0 \therefore c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{y}_0(0) = -5 = -c_1 e^0 - 2c_2 e^0 \therefore -c_1 - 2c_2 = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = -5, \quad c_2 = 5.$$

A resposta de entrada zero é $y_0(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}$.

Resposta de Entrada Zero (vii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

– Exemplo: Calcule a resposta de entrada zero para a equação:
 $(D^2 + 6D + 9)y(t) = (3D + 5)x(t)$, para $y_0(0) = 3, \dot{y}_0(0) = -7$.

A equação característica do sistema é $l^2 + 6l + 9 = 0$,

Para o qual as raízes características são $l_1 = -3, l_2 = -3$;

os modos característicos são e^{-3t}, te^{-3t} e a solução dada por :

$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}$. Para achar as constantes, calcula - se :

$\dot{y}_0(t) = -3c_1 e^{-3t} + c_2 (e^{-3t} - 3te^{-3t})$, a solução do sistema de equações é :

$$\left. \begin{aligned} y_0(0) = 3 &= c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 \therefore c_1 = 3 \\ \dot{y}_0(0) = -7 &= -3c_1 e^0 + c_2 (e^0 - 3te^0) \therefore -3c_1 + c_2 = -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_2 = 2.$$

A resposta de entrada zero é $y_0(t) = (3 + 2t)e^{-3t}$.

Resposta de Entrada Zero (viii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Exemplo: Calcule a resposta de entrada zero para a equação:

$$(D^2 + 4D + 40)y(t) = (D + 2)x(t), \quad \text{para } y_0(0) = 2, \dot{y}_0(0) = 16.78.$$

A equação característica do sistema é $l^2 + 4l + 40 = 0$,

As raízes características são $?_1 = -2 + j6$, $?_2 = -2 - j6$;

os modos característicos : $e^{(-2+j6)t}$, $e^{(-2-j6)t}$. A solução na forma é :

$y_0(t) = ce^{-2t} \cos(6t + ?)$. Para achar as constantes, calcula-se :

$\dot{y}_0(t) = -2ce^{-2t} \cos(6t + ?) - 6ce^{-2t} \sin(6t + ?)$, a solução é dada por :

$$\left. \begin{aligned} y_0(0) = 2 &= ce^0 \cos(0 + ?) \therefore c \cos q = 2 \\ \dot{y}_0(0) = 16.78 &\therefore -2c \cos ? - 6c \sin ? = -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c \cos q = 2 \\ c \sin q = -3.463 \end{cases}$$

Resposta de Entrada Zero (ix)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Calculando as constantes:

$$\begin{cases} c \cos ? = 2 \\ c \sin ? = -3,463 \end{cases}, \text{ elevando ambos os termos ao quadrado}$$

$$(c \cos ?)^2 = (2)^2; \quad (c \sin ?)^2 = (-3,463)^2$$

Somando - se as duas equações tem - se :

$$(c \cos ?)^2 + (c \sin ?)^2 = (2)^2 + (-3,463)^2 \therefore c^2 = 16 \therefore c = 4.$$

Acha - se o ângulo de fase :

$$q = \tan^{-1}\left(\frac{-3,463}{2}\right) = -\frac{p}{3}$$

A resposta de entrada zero é $y_0(t) = 4e^{-2t} \cos\left(6t - \frac{p}{3}\right)$

Resposta de Entrada Zero (x)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

- Condições Iniciais na Prática

- Em problemas reais, as condições iniciais devem ser geradas a partir das situações físicas.
 - As condições iniciais imediatamente anteriores a $t=0$, em geral, são diferentes das condições iniciais imediatamente após a aplicação da entrada.

Notações : $t = 0^-$ e $t = 0^+$

- Imediatamente antes da aplicação da entrada, tem-se a resposta de entrada zero.

Resposta de Entrada Zero (xi)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
 - Independência das Resposta de Entrada Zero e Estado Zero:
 - Estes dois componentes do sistema são mutuamente independentes. Isto é, as duas respostas coexistem sem haver interferência de uma sobre a outra.
 - Condições Auxiliares para Solução de Equações Diferenciais:
 - Em geral, para se determinar unicamente $y(t)$ a partir de sua N -ésima derivada, são necessárias N informações (restrições) sobre $y(t)$. Tais restrições são geralmente chamadas de condições auxiliares e recebem denominação particular para quando $t=0$: condições iniciais.

Resposta ao Impulso Unitário (i)

- **Fundamentos**

- Se for conhecida a resposta de um sistema a uma entrada impulso, pode-se determinar a resposta do sistema a uma entrada arbitrária $x(t)$.
- Apresenta-se um método para determinar a resposta ao impulso unitário de um sistema LTIC descrito pela equação diferencial de ordem N : $Q(D)y(t)=P(D)x(t)$. Onde $Q(D)$ e $P(D)$ são polinômios, onde $M \leq N$. Para esta restrição, o caso mais geral é $M=N$.

$$\begin{aligned}(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y(t) = \\ = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N)x(t)\end{aligned}$$

- $h(t)$ é a resposta de um sistema para uma entrada impulso em $t=0$, com todas as condições iniciais nulas em $t = 0^-$. Esta entrada gera armazenamento de energia, implicando em condições iniciais não nulas em $t = 0^+$.

Resposta ao Impulso Unitário (ii)

- **Fundamentos**

- Como não há entrada após o impulso ter sido aplicado, o sistema responderá à condição inicial recém-criada.
- Assim, a resposta ao impulso $h(t)$ é formada a partir dos modos característicos do sistema:

$$h(t) = \text{termos dos modos característicos} \quad t \geq 0^+$$

- Em $t=0$ pode haver no máximo um impulso, gerando:

$$h(t) = A_0 d(t) + \text{termos dos modos característicos} \quad t \geq 0$$

- Assumindo $x(t)$ como um impulso unitário, tem-se que

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N)h(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_N)d(t),$$

Substituindo - se a expressão para $h(t)$, tem - se como resposta :

$$h(t) = b_0 d(t) + \text{modos característicos, com } b_0 = 0 \text{ para } M < N.$$

Resposta ao Impulso Unitário (iii)

- **Fundamentos**

– Exemplo: Calcule a resposta ao impulso para o sistema:

$$(D^2 + 5D + 6)y(t) = (D + 1)x(t), \text{ como } M < N \Rightarrow b_0 = 0,$$

Equação característica é $l^2 + 5l + 6 = 0 \therefore l_1 = -2, l_2 = -3$;

Resposta ao impulso (só modos caract.): $h(t) = (c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t})u(t)$

para $x(t) = d(t)$ e $y(t) = h(t) \Rightarrow \ddot{h}(t) + 5\dot{h}(t) + 6h(t) = \dot{d}(t) + d(t)$

Condições iniciais $h(0^-) = \dot{h}(0^-) = 0$; e sejam $h(0^+) = K_1$; $\dot{h}(0^+) = K_2$

Devido ao impulso : $\dot{h}(0) = K_1 \dot{d}(t)$; $\ddot{h}(0) = K_1 \ddot{d}(t) + K_2 \dot{d}(t) \Rightarrow$

$$K_1 \dot{d}(t) + K_2 \dot{d}(t) + 5K_1 \dot{d}(t) + 6h(0) = \dot{d}(t) + d(t) \therefore$$

$$5K_1 + K_2 = 1; \quad K_1 = 1 \Rightarrow K_1 = 1, K_2 = -4.$$

$$\left. \begin{aligned} h(0^+) &= (c_1 e^0 + c_2 e^0) = K_1 = 1 \therefore c_1 + c_2 = 1 \\ \dot{h}(0^+) &= (-2c_1 e^0 - 3c_2 e^0) = K_2 = -4 \therefore -2c_1 - 3c_2 = -4 \end{aligned} \right\} \therefore c_1 = -1; c_2 = 2$$

Resposta ao Impulso Unitário (iv)

- **Resposta Impulso Unitário**

- Método de Casamento de Impulso Simplificado:

- Busca reduzir procedimento para determinar $h(t)$.

Seja o sistema LTIC definido por :

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t) \therefore$$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N)y(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_N)x(t)$$

a resposta ao impulso unitário $h(t)$ é : $h(t) = b_0 d(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$,

onde $y_n(t)$ é combinação linear dos modos característicos do sistema de

condições iniciais : $y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \dots = y_n^{N-2}(0) = 0, \quad y_n^{N-1}(0) = 1$

determinadas para que não haja derivadas que gerem discontinuidades

Para $M < N \Rightarrow b_0 = 0$, logo $b_0 d(t) = 0$

Resposta ao Impulso Unitário (v)

- **Resposta Impulso Unitário**

- Exemplo: determine a resposta ao impulso $h(t)$.

$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$, sistema de segunda ordem ($N = 2$),

eq. característica : $(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

Logo : $y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \Rightarrow \dot{y}_n(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$.

As condições iniciais são : $y_n(0) = 0, \dot{y}_n(0) = 1$.

Assim, tem-se que $\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = -c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

Lembre-se : $h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t)$, onde $P(D)y_n(t) = Dy_n(t)$,

Portanto, $h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t) = \dot{y}_n(t)u(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$

Resposta de Estado Zero (i)

- **Introdução**

- Resposta para condições iniciais nulas.
- Uso do princípio da superposição para encontrar a resposta de um sistema a um sinal de entrada arbitrário $x(t)$. Considere

Pulso básico $p(t)=1$, para largura Δt iniciando em $t = 0$;

Entrada $x(t)$ é somatório de pulsos retangulares estreitos;

Assim, um pulso iniciando em $t = n\Delta t$ com altura $x(n\Delta t)$ é expresso :

$x(n\Delta t)p(t - n\Delta t)$. Portanto, o sinal de entrada $x(t)$ é dado por :

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_t x(n\Delta t)p(t - n\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_t \frac{x(n\Delta t)}{\Delta t} p(t - n\Delta t)\Delta t,$$

onde $[x(n\Delta t)/\Delta t]p(t - n\Delta t)$ é um pulso com altura $[x(n\Delta t)/\Delta t]$.

Assim, para $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow [x(n\Delta t)/\Delta t] \rightarrow \infty$ e área permanece $x(n\Delta t)$.

Resposta de Estado Zero (ii)

- Introdução**

O pulso aproxima -se do impulso : $x(n\Delta t)d(t - n\Delta t)$, para $\Delta t \rightarrow 0$

Logo,
$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_t x(n\Delta t)d(t - n\Delta t)\Delta t$$

Encontra -se o par entrada -saída para a entrada $x(t)$:

Entrada ($x(t)$) $\rightarrow$ Saída ($y(t)$)

$d(t)$ $\rightarrow$ $h(t)$

$d(t - n\Delta t)$ $\rightarrow$ $h(t - n\Delta t)$

$[x(n\Delta t)\Delta t]d(t - n\Delta t)$ $\rightarrow$ $[x(n\Delta t)\Delta t]h(t - n\Delta t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_t x(n\Delta t)\Delta t d(t - n\Delta t) \rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_t x(n\Delta t)\Delta t h(t - n\Delta t)$$

Resposta de Estado Zero (iii)

- **Introdução**

$$\text{Portanto : } y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_t x(n\Delta t)h(t - n\Delta t)\Delta t \therefore$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Esta é a resposta do sistema $y(t)$ para uma entrada arbitrária $x(t)$ em termos da resposta ao impulso $h(t)$. Logo, conhecendo-se este último, pode-se determinar $y(t)$ para qualquer entrada.
 - Note que a resposta do sistema para qualquer entrada é determinada pela resposta ao impulso, que por sua vez, é construída a partir dos modos característicos do sistema.

Resposta de Estado Zero (iv)

- Introdução

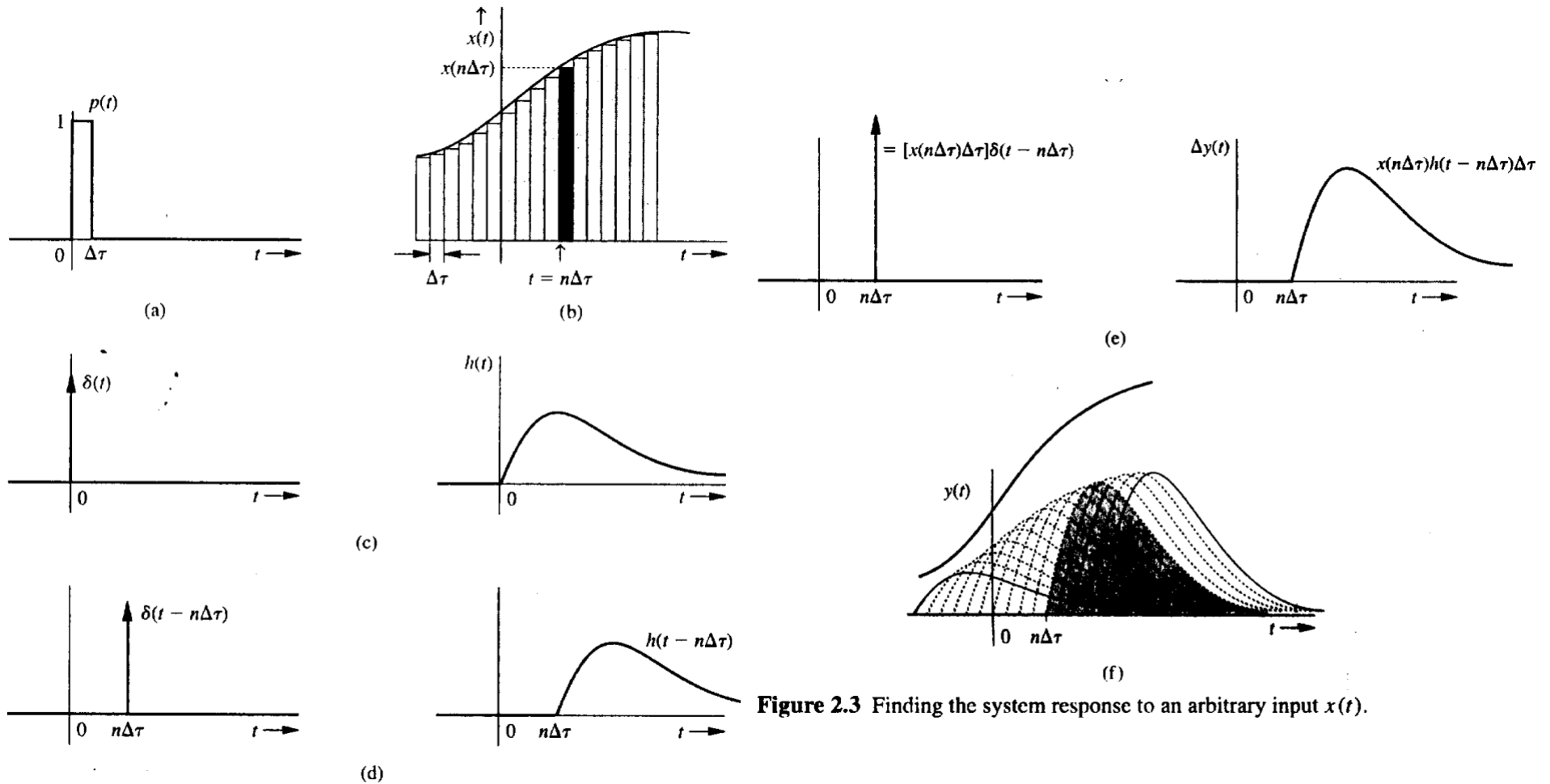


Figure 2.3 Finding the system response to an arbitrary input $x(t)$.

Resposta de Estado Zero (v)

- **Integral de Convolução**

- A integral de convolução de duas funções é definida como:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t-t) dt, \text{ com propriedades relevantes :}$$

Propriedade Comutativa :

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

prova - se mudando a variável $z = t - t \Rightarrow dt = -dz$

$$x_1(t) * x_2(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} x_1(t-z) x_2(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(z) x_1(t-z) dz = x_2(t) * x_1(t)$$

Propriedade Distributiva :

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

Propriedade Associativa :

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

Resposta de Estado Zero (vi)

- **Integral de Convolução**

Propriedade de Deslocamento : para $x_1(t) * x_2(t) = c(t)$, logo

$$x_1(t) * x_2(t - T) = x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T) \quad \text{e}$$

$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2)$$

Convolução com um Impulso : $x(t) * d(t) = x(t)$

Propriedade da Largura :

Duração (largura) de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é T_1 e $T_2 \Rightarrow$ duração de $c(t)$ é $T_1 + T_2$.

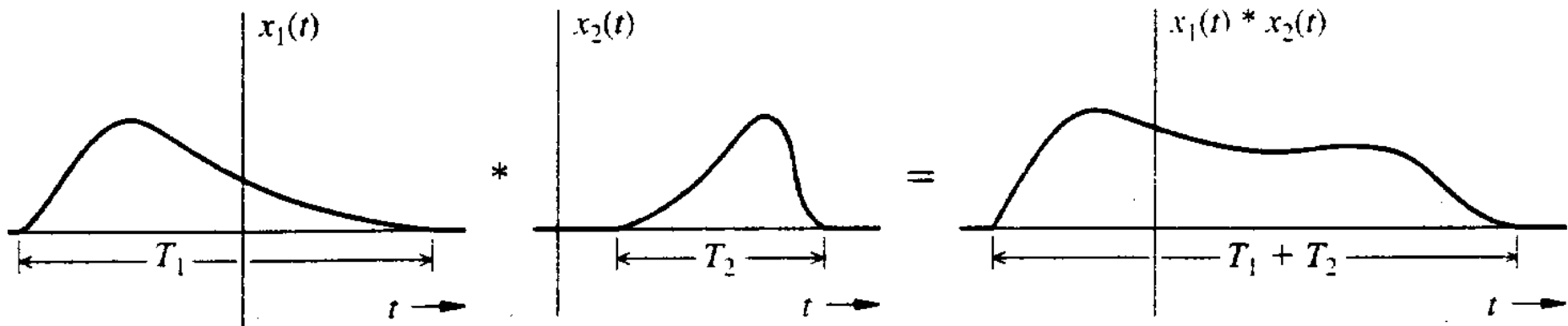


Figure 2.4 Width property of convolution.

Resposta de Estado Zero (vii)

- **Integral de Convolução**

Resposta de Estado Zero e Causalidade :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t - t) dt$$

Para sistema causal e com estado zero

- A resposta só é iniciada após o início da entrada;

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} \int_{0^-}^t x(t) h(t - t) dt = \int_{0^-}^t h(t) x(t - t) dt, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

O limite considerado será o da integral mesmo que denotato por 0.

Resposta de Estado Zero (viii)

- **Integral de Convolução**

- Exemplo: Considere um sistema LTIC cuja resposta ao impulso $h(t)$ é dada abaixo. Determine a resposta $y(t)$ para a entrada $x(t)$.

$$h(t) = e^{-2t}u(t); \quad x(t) = e^{-t}u(t)$$

Ambos os sinais são causais, logo tem-se que :

$$y(t) = \int_0^t x(t)h(t-t)dt, \quad t \geq 0, \text{ assim a integral se torna :}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-t}e^{-2(t-t)}dt, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = e^{-2t} \int_0^t e^{-t}e^{2t}dt = e^{-2t}(e^t - 1) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Lembrando que $y(t) = 0$ para $t < 0$, então $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

Resposta de Estado Zero (ix)

- Integral de Convolução

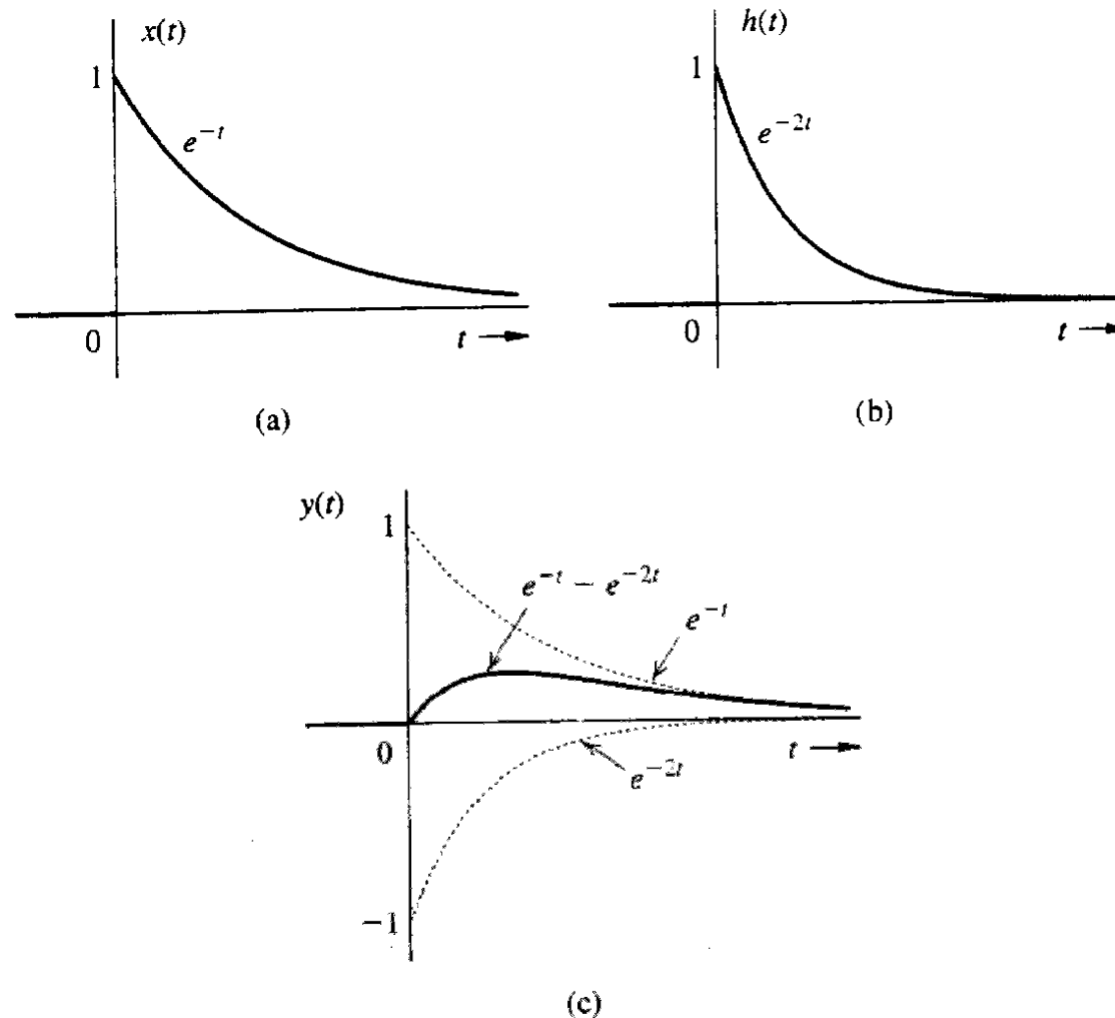


Figure 2.6 Convolution of $x(t)$ and $h(t)$.

Resposta de Estado Zero (x)

- Integral de Convolução

TABLE 2.1 Convolution Table

No.	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
1	$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
2	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$u(t)$	$\frac{1 - e^{\lambda_1 t}}{-\lambda_1} u(t)$
3	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
4	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_2 t} u(t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
5	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$te^{\lambda_1 t} u(t)$
6	$te^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$\frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} u(t)$
7	$t^N u(t)$	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$\frac{N! e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1^{N+1}} u(t) - \sum_{k=0}^N \frac{N! t^{N-k}}{\lambda_1^{k+1} (N-k)!} u(t)$
8	$t^M u(t)$	$t^N u(t)$	$\frac{M! N!}{(M+N+1)!} t^{M+N+1} u(t)$

Resposta de Estado Zero (xi)

- Integral de Convolução

$$9 \quad te^{\lambda_1 t} u(t) \quad e^{\lambda_2 t} u(t) \quad \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 - \lambda_2)te^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} u(t)$$

$$10 \quad t^M e^{\lambda_1 t} u(t) \quad t^N e^{\lambda_2 t} u(t) \quad \frac{M! N!}{(N + M + 1)!} t^{M+N+1} e^{\lambda_1 t} u(t)$$

$$11 \quad t^M e^{\lambda_1 t} u(t) \quad t^N e^{\lambda_2 t} u(t) \quad \sum_{k=0}^M \frac{(-1)^k M! (N + k)! t^{M-k} e^{\lambda_1 t}}{k! (M - k)! (\lambda_1 - \lambda_2)^{N+k+1}} u(t) \\ + \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k N! (M + k)! t^{N-k} e^{\lambda_2 t}}{k! (N - k)! (\lambda_2 - \lambda_1)^{M+k+1}} u(t)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$12 \quad e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) u(t) \quad e^{\lambda t} u(t) \quad \frac{\cos(\theta - \phi) e^{\lambda t} - e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}} u(t)$$

$$\phi = \tan^{-1}[-\beta/(\alpha + \lambda)]$$

$$13 \quad e^{\lambda_1 t} u(t) \quad e^{\lambda_2 t} u(-t) \quad \frac{e^{\lambda_1 t} u(t) + e^{\lambda_2 t} u(-t)}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{Re } \lambda_2 > \text{Re } \lambda_1$$

$$14 \quad e^{\lambda_1 t} u(-t) \quad e^{\lambda_2 t} u(-t) \quad \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} u(-t)$$

Resposta de Estado Zero (xii)

- **Integral de Convolução**

- Resposta a Entradas Complexas: Para um sistema LTIC real ($h(t)$ real) então a parte real da entrada gera uma resposta real enquanto que a parte imaginária gera uma resposta imaginária. As duas respostas são somadas para gerar a resposta completa.

$x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$, para $h(t)$ sendo real, tem-se

$$y(t) = h(t) * [x_r(t) + jx_i(t)] = h(t) * x_r(t) + h(t) * jx_i(t) \therefore$$

$$y(t) = y_r(t) + jy_i(t)$$

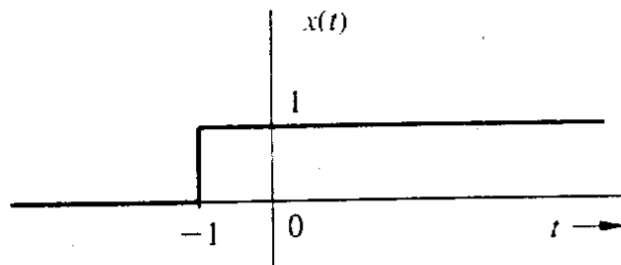
- Resposta a Entradas Múltiplas: Aplica-se o princípio da superposição. Cada entrada é considerada separadamente e a soma das saídas individuais determina a saída total dos sistema.

Resposta de Estado Zero (xiii)

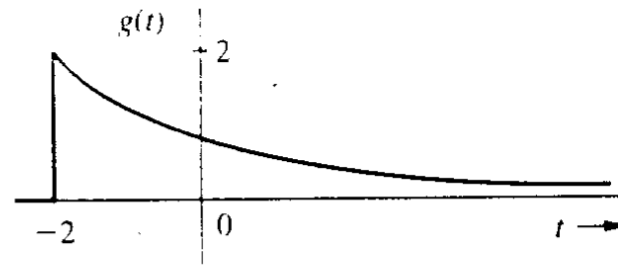
- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
 - Possibilita interpretação gráfica que é útil para avaliar a integral de convolução de sinais complexos.
 - Permite a visualização do resultado da integral, freqüentemente útil para tarefas tais como amostragem ou filtragem.
 - Viabiliza o cálculo da integral para sinais que não possuam descrição analítica, mas apenas gráfica.
 - Note que a integral não se faz com respeito a t , que é apenas um parâmetro do processo (e não a variável independente).
 - A integral de convolução só existe para o período de tempo em que a moldura móvel coexiste com o gráfico fixo.
 - Pode-se calcular graficamente $x(t)*g(t)$ ou $g(t)*x(t)$.

Resposta de Estado Zero (xiv)

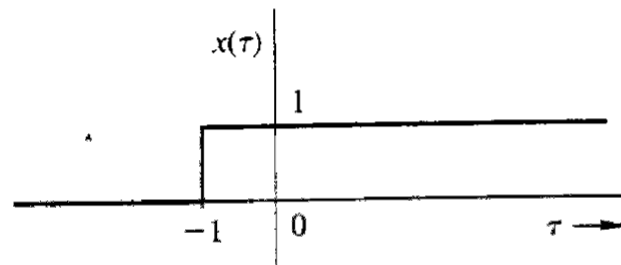
- Integral de Convolução: Solução Gráfica



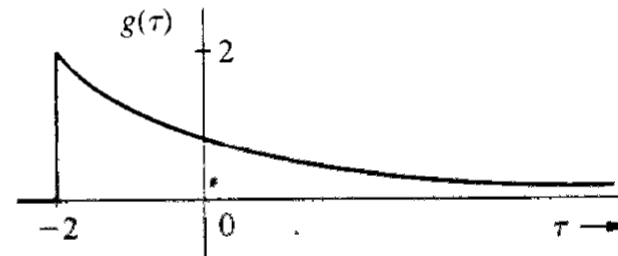
(a)



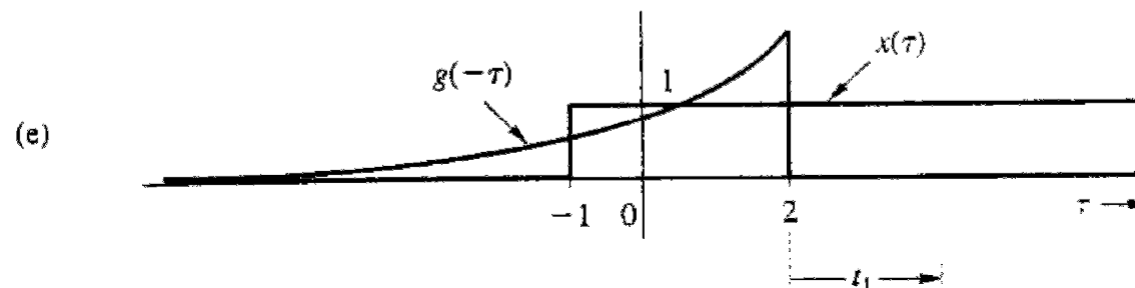
(b)



(c)



(d)



(e)

Resposta de Estado Zero (xv)

- Integral de Convolução: Solução Gráfica

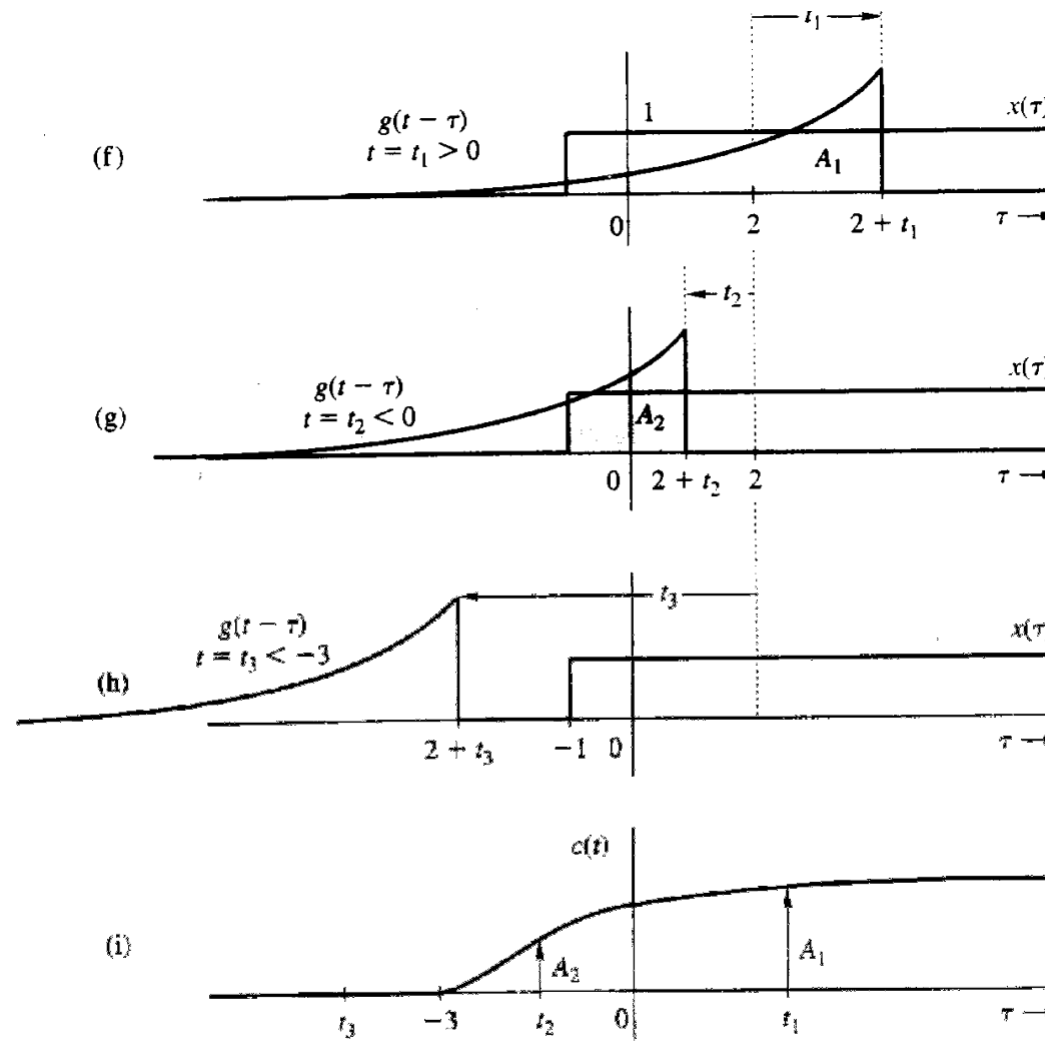


Figure 2.7 Graphical explanation of the convolution operation.

Resposta de Estado Zero (xvi)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

- Procedimento Gráfico:

1. Mantenha a função $x(t)$ fixa.
2. Visualize a função $g(t)$ como uma moldura rígida. Rotacione a moldura em torno do eixo vertical para obter $g(-t)$.
3. Desloque $g(-t)$ ao longo do eixo t por t_0 (em unidade de tempo do problema) para obter $g(t_0 - t)$.
4. A área sob o produto de $x(t)$ e $g(t_0 - t)$ é $c(t_0)$ o valor da integral de convolução para $t = t_0$.
5. Repita o procedimento, deslocando a moldura sobre o eixo t , para obter $c(t)$ para $\forall t$.

Resposta de Estado Zero (xvii)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

- Exemplo: Determine graficamente a $y(t) = x(t) * h(t)$.

$$x(t) = e^{-t}u(t), h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Como as funções a serem convoluídas só vão se sobrepor para $t > 0$:

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^t x(t)h(t-t)dt, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

As funções a convoluir : $x(t) = e^{-t}$, $h(t-t) = e^{-2(t-t)}$, logo,

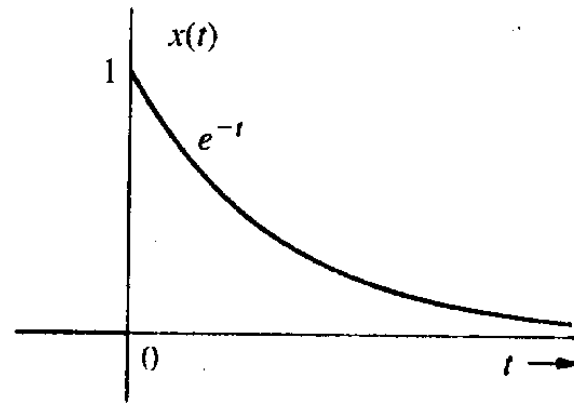
$$y(t) = \int_0^t e^{-t} e^{-2(t-t)} dt = e^{-2t} \int_0^t e^t dt = e^{-2t} (e^t - 1) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Logo, $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

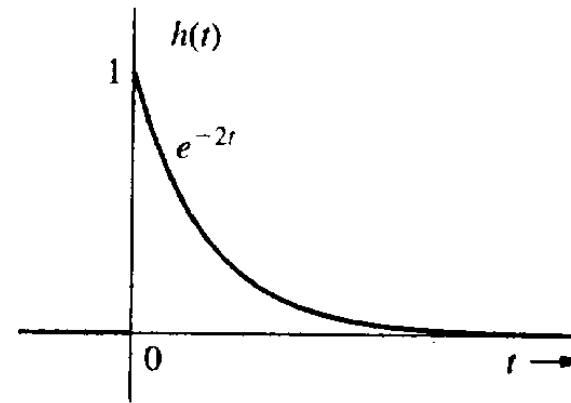
Resposta de Estado Zero (xviii)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

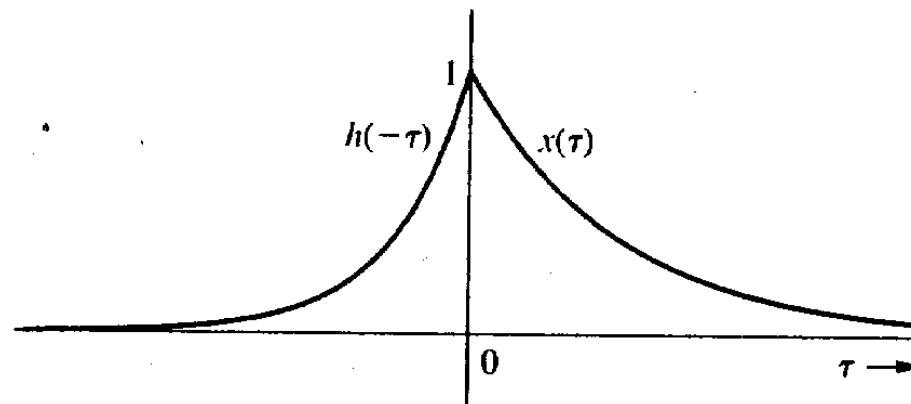
– Exemplo:



(a)



(b)

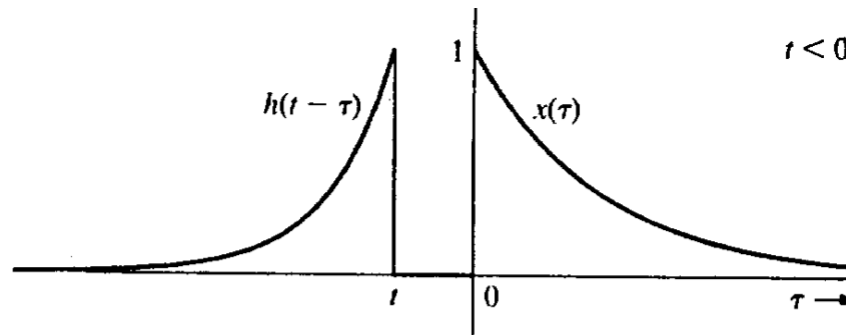


(c)

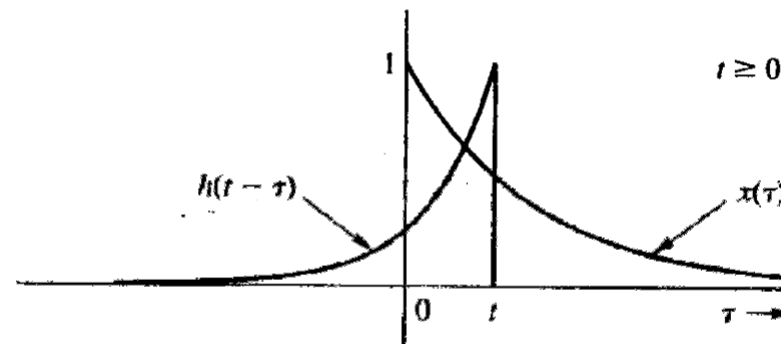
Resposta de Estado Zero (xix)

- Integral de Convolução: Solução Gráfica

- Exemplo:



(d)



(e)



(f)

Resposta de Estado Zero (xx)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

- Exemplo: Determine graficamente a $y(t) = x(t) * h(t)$.

$$x(t) = 1u(t), g(t) = \begin{cases} 2e^{-t}u(t) \\ -2e^{2t}u(-t) \end{cases} \Rightarrow g(t-t) = \begin{cases} 2e^{-(t-t)}u(t-t) \\ -2e^{2(t-t)}u(-t+t) \end{cases}$$

Cálculo para $t < 0$, a superposição ocorre para $t \geq 0$:

$$c(t) = \int_0^{\infty} x(t)g(t-t)dt = \int_0^{\infty} g(t-t)dt = \int_0^{\infty} -2e^{2(t-t)}dt = -e^{2t}$$

Cálculo para $t \geq 0$, a superposição ocorre para $t \geq 0$:

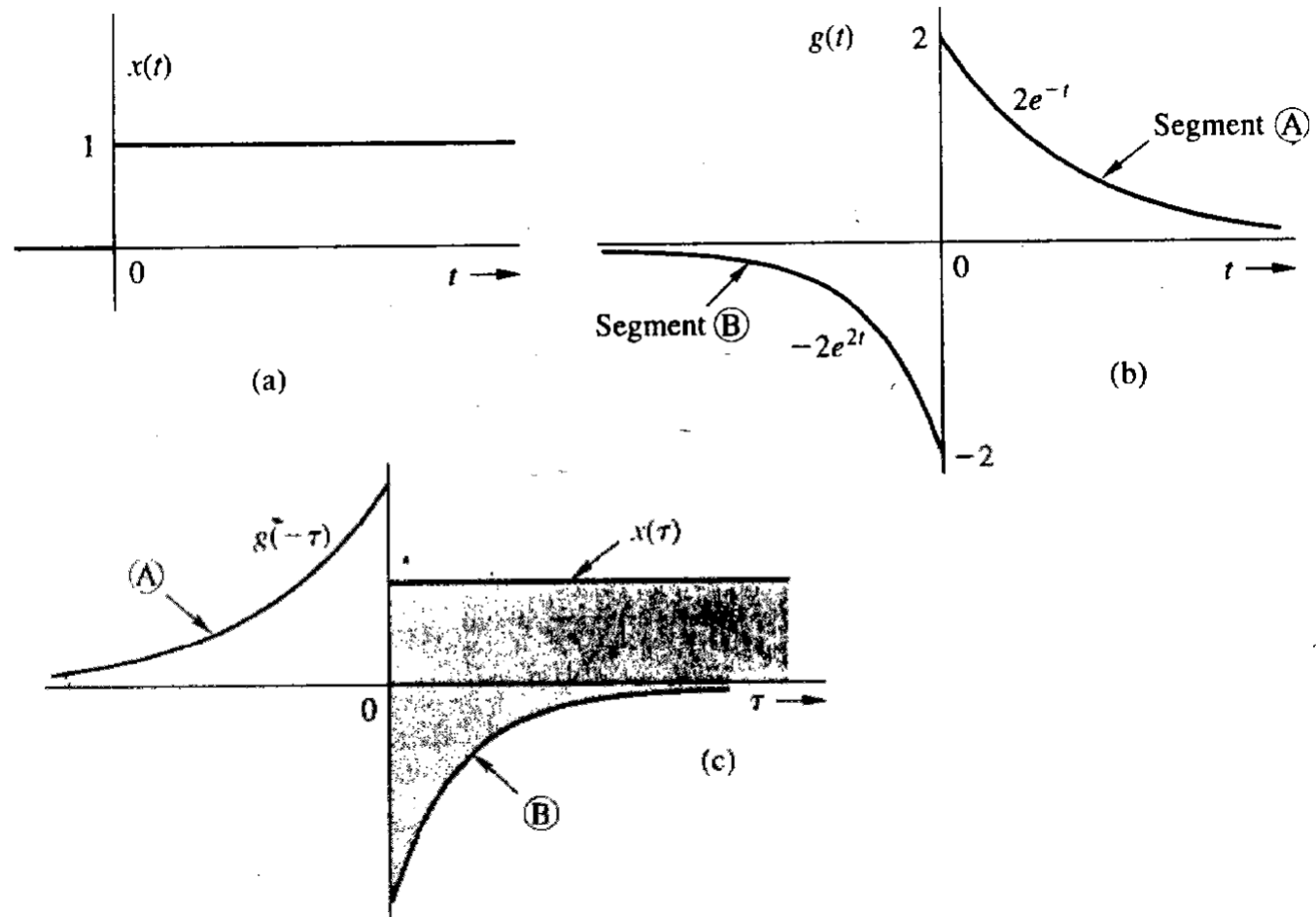
$$c(t) = \int_0^{\infty} x(t)g(t-t)dt = \int_0^t 1 \cdot 2e^{-(t-t)}dt + \int_t^{\infty} 1(-2e^{2(t-t)})dt \therefore$$

$$c(t) = 2(1 - e^{-t}) - 1 = 1 - 2e^{-t}$$

Resposta de Estado Zero (xxi)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

- Exemplo:



Resposta de Estado Zero (xxii)

- Integral de Convolução: Solução Gráfica

– Exemplo:

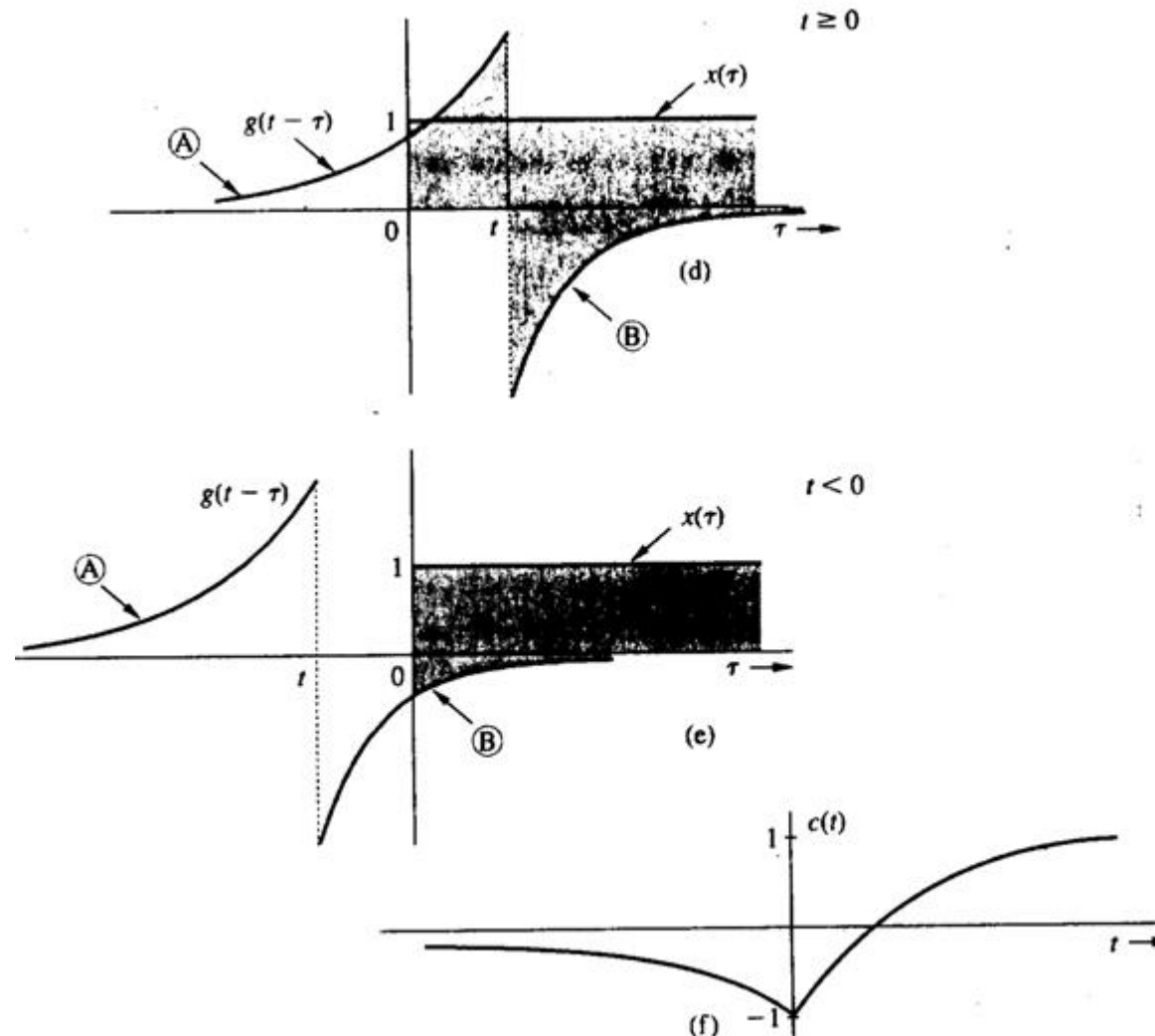
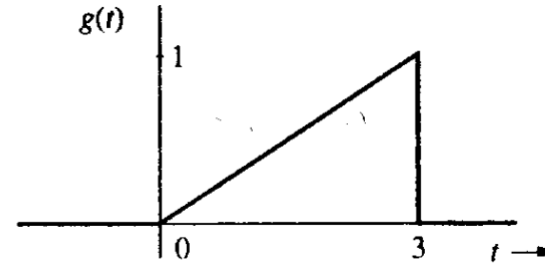
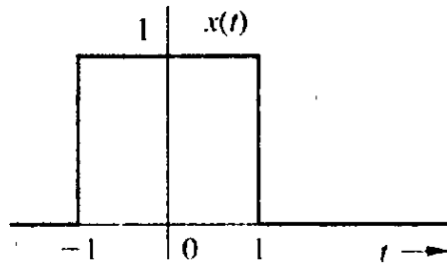


Figure 2.9 Convolution of $x(t)$ and $g(t)$.

Resposta de Estado Zero (xxiii)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

– Exemplo: Encontre a integral de convolução da figura:



As funções da figura acima são : $x(t) = 1$ e $g(t) = t/3$.

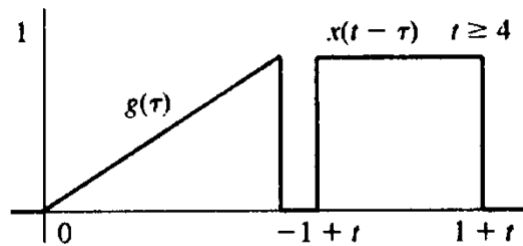
A convolução é $c(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) x(t-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t/3 \cdot 1 dt \therefore$

$$c(t) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot 1 dt + \int_0^{1+t} t/3 \cdot 1 dt + \int_{-1+t}^{1+t} t/3 \cdot 1 dt + \int_{-1+t}^3 t/3 \cdot 1 dt + \int_4^{\infty} 0 \cdot 1 dt \therefore$$

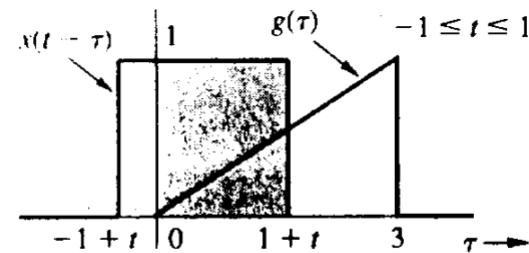
$$c(t) = \underbrace{0}_{t \leq -1} + \underbrace{\frac{1}{6}(t+1)^2}_{-1 \leq t \leq 1} + \underbrace{\frac{2}{3}t}_{1 \leq t \leq 2} - \underbrace{\frac{1}{6}(t^2 - 2t - 8)}_{2 \leq t \leq 4} + \underbrace{0}_{t \geq 4}$$

Resposta de Estado Zero (xxiv)

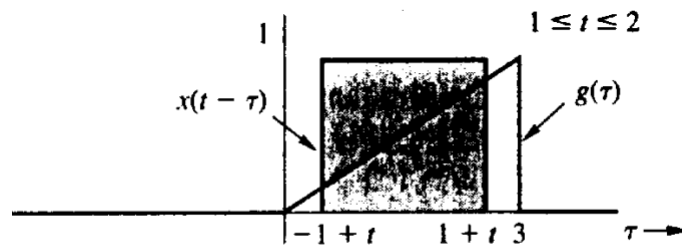
- Integral de Convolução: Solução Gráfica



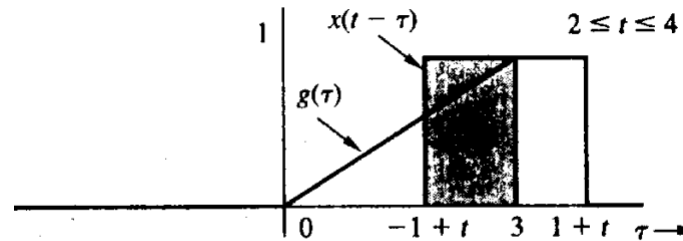
(g)



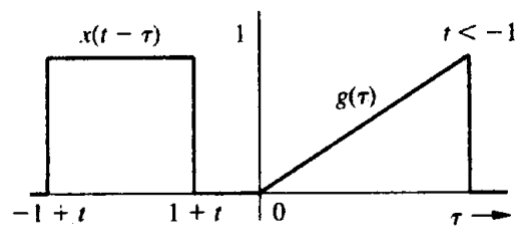
(d)



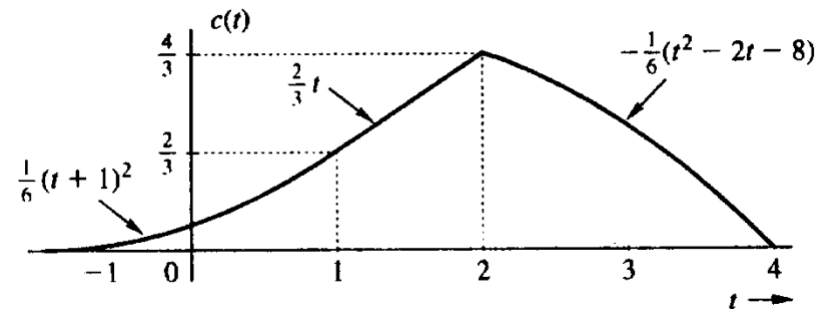
(e)



(f)



(h)



Resposta de Estado Zero (xxv)

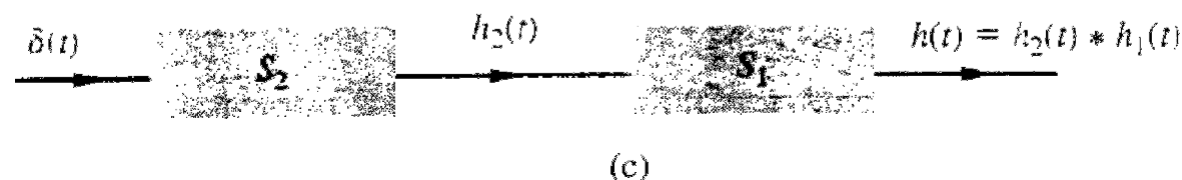
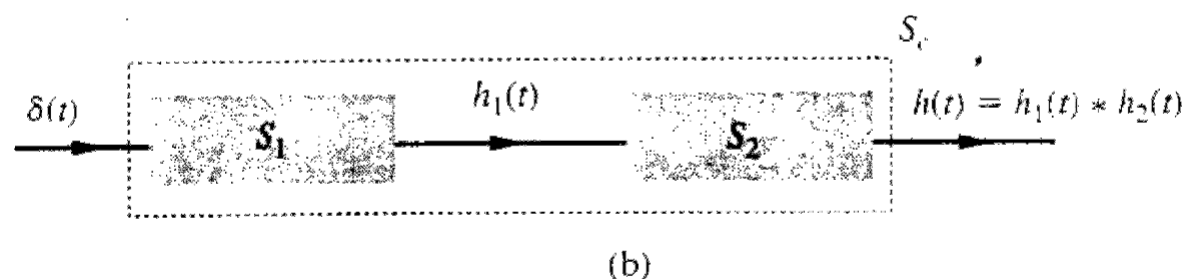
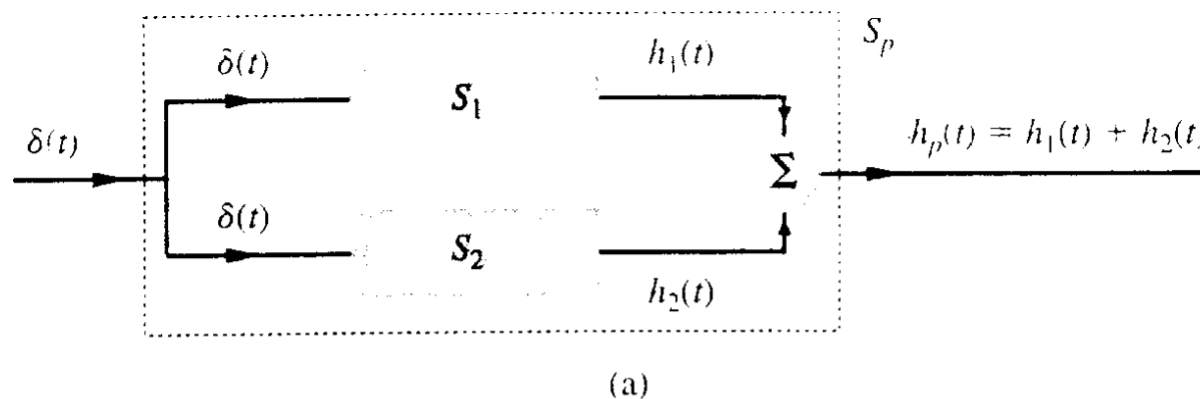
- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
 - Largura da função convolvida: O tempo (largura) que um sinal de duração T_1 leva para passar completamente por um outro sinal de duração T_2 , tempo em que estes sinais tenham alguma superposição, é dado por $T_1 + T_2$.
 - Papel de funções sem existência física: Estas, analiticamente tratáveis como a função impulso ou a função exponencial incessante, produzem conhecimento sobre o comportamento do sistema e sua resposta a entradas arbitrárias.

Resposta de Estado Zero (xxvi)

- **Integral de Convolução: Sistemas Interconectados**

- Sistema complexo composto por subsistemas mais simples e portanto mais facilmente caracterizados.

Vai-se considerar dois tipos de interconexões: cascata e paralela.



Resposta de Estado Zero (xxvii)

- **Integral de Convolução: Sistemas Interconectados**
 - Comutatividade da convolução usada com integrador ideal.
 - Diferenciador ideal e integrador ideal para produzir um sistema inversor, recuperando um dado sinal de entrada.

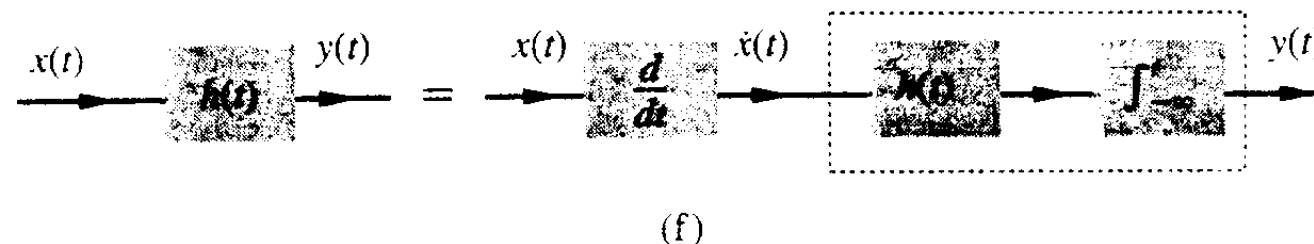
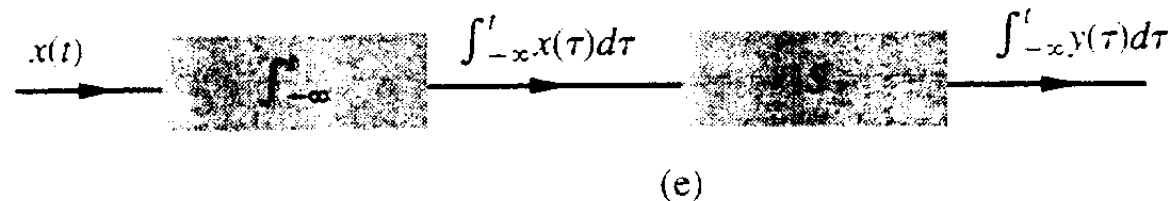
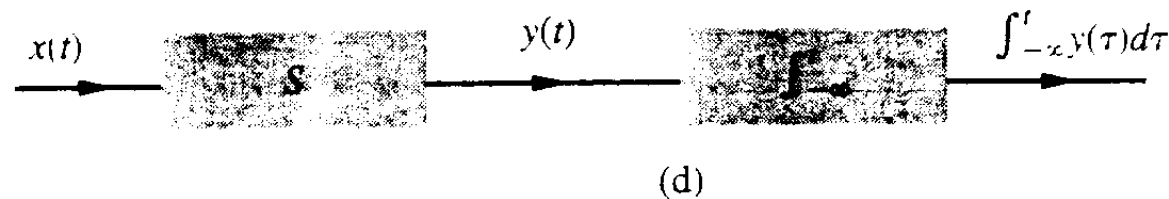


Figure 2.15 Interconnected systems.

Resposta de Estado Zero (xxviii)

- **Integral de Convolução: Função Exponencial Incessante** (e^{st})
 - Função característica: Entrada para qual um sistema responde da mesma forma, a exponencial é o único caso.

Para um sistema, sejam sua resposta ao impulso $h(t)$ e sua entrada e^{st} (s é uma variável complexa) então a resposta do sistema $y(t)$ é:

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{s(t-t')} dt' = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st'} dt' \therefore$$

$y(t) = H(s)e^{st}$, esta é uma propriedade fundamental de todo sistema LTI

onde $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$, válido para integral finita.

$H(s)$ é uma constante para um dado valor de s .

Função de transferência : $H(s) = \frac{\text{sinal de saída}}{\text{sinal de entrada}} \Big|_{\text{entrada} = \text{incessante } \exp(st)}$

Resposta de Estado Zero (xxix)

- **Integral de Convolução: Função Exponencial Incessante (e^{st})**
 - A função de transferência, em geral, só tem sentido para sistema LTIC. Tal função pode ser expressa em termos de polinômio:

Considerando-se a exponencial incessante e sua resposta, na forma de polinômio : $H(s)[Q(D)e^{st}] = P(D)e^{st}$

$$\text{Como } D^r e^{st} = \frac{d^r e^{st}}{dt^r} = s^r e^{st} \Rightarrow \begin{cases} P(D)e^{st} = P(s)e^{st} \\ Q(D)e^{st} = Q(s)e^{st} \end{cases}$$

Conclui-se que a função de transferência é $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

Resposta de Estado Zero (xxx)

- **Integral de Convolução: Resposta Total**

– Resposta total = Resposta entrada-zero + Resposta estado-zero=

$$\sum_{k=1}^R c_k t^{k-1} e^{l_k t} + \sum_{k=R+1}^N c_k e^{l_k t} + x(t) * h(t), \text{ para autovalores repetidos e distintos}$$

$$\sum_{k=1}^N c_k e^{l_k t} + x(t) * h(t), \text{ para autovalores distintos}$$

A discussão a seguir considera o caso de autovalores distintos.

Exemplo : circuito RLC : entrada é fonte de tensão, saída é a corrente,

$$L = 1H, R = 3\Omega, C = 0.5F, x(t) = 10e^{-3t}u(t)$$

$$\text{corrente total} = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{\text{entrada zero}} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{\text{estado zero}}, \quad t \geq 0$$

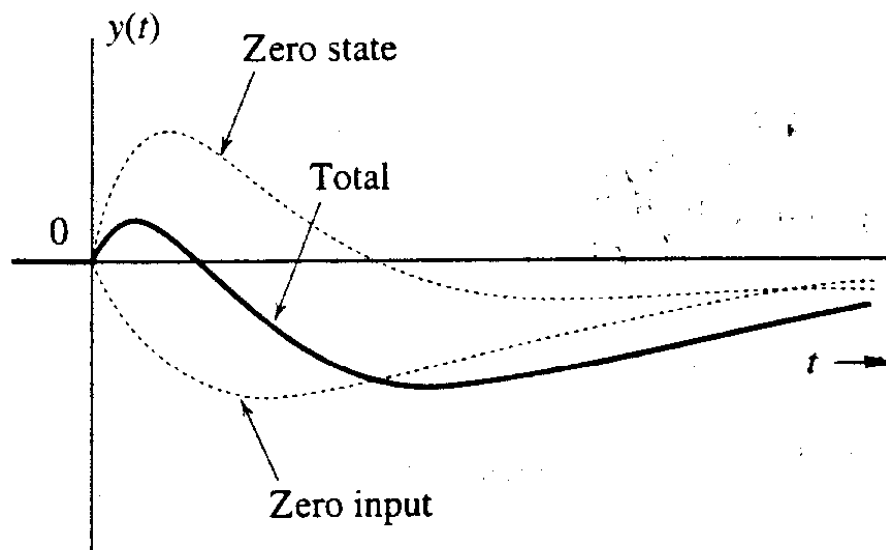
Resposta de Estado Zero (xxxi)

- Integral de Convolução: Resposta Total**

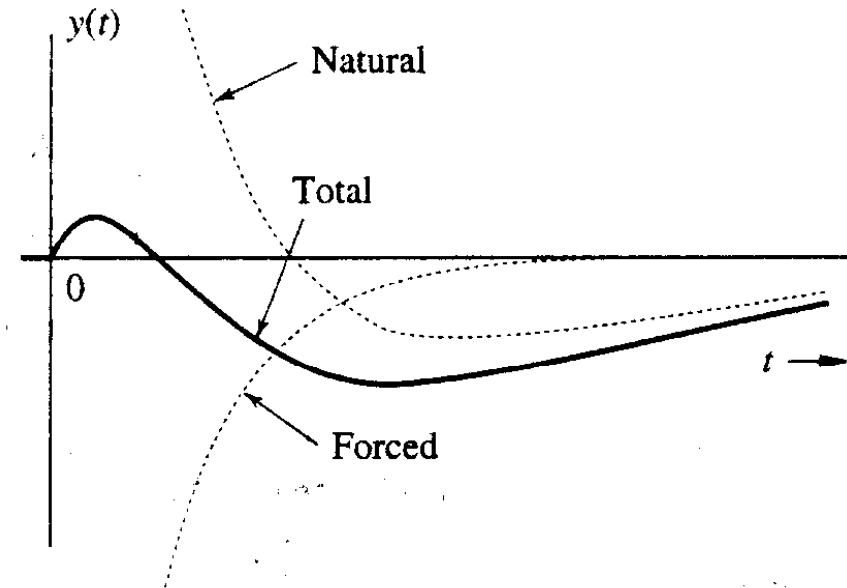
$$\text{corrente total} = (-5e^{-t} + 5e^{-2t}) + (-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}) \therefore$$

$$\text{corrente total} = (-5e^{-t} - 5e^{-t}) + (5e^{-2t} + 20e^{-2t}) - 15e^{-3t} \therefore$$

$$\text{corrente total} = \underbrace{(-10e^{-t} + 25e^{-2t})}_{\text{resposta natural } y_n(t)} + \underbrace{(-15e^{-3t})}_{\text{resposta forçada } y_f(t)}, \quad t \geq 0$$



(a)



(b)

Figure 2.16 Total response and its components.

Solução Clássica de Equações Diferenciais (i)

- **Introdução**

- Soluciona-se com componente natural e componente forçado. Para análise e síntese de sistemas este método possui perdas.

- A resposta natural do sistema (solução homogênea ou solução complementar) é formada por todos os termos envolvendo os modos característicos do sistema.
 - A resposta forçada do sistema (solução particular) compõe-se dos termos que não envolvem os modos característicos.

$$\text{resposta total} = y(t) = y_n(t) + y_f(t) \Rightarrow$$

$$Q(D)[y_n(t) + y_f(t)] = P(D)x(t) \therefore \begin{cases} Q(D)y_n(t) = 0 \\ Q(D)y_f(t) = P(D)x(t) \end{cases}$$

Solução Clássica de Equações Diferenciais (ii)

- **Resposta Forçada**

- Método dos coeficientes indeterminados

- Método simples de ser calculada para entradas que produzem número finito de derivadas independentes. Casos importantes são:
 - Função exponencial: As derivadas são da mesma tipo.
 - Polinômio em t : As derivadas são polinômios em t .
 - A resposta forçada é portanto uma combinação linear da função de entrada ($x(t)$) e suas derivadas.

$Q(D)y_f(t) = P(D)x(t)$, os coeficientes não determinados são calculados igualando - se termos dos dois lados da igualdade.

Solução Clássica de Equações Diferenciais (iii)

- **Resposta Forçada**

Método dos coeficientes indeterminados

– A tabela mostra algumas funções de entrada e a saída forçada:

Entrada

$$e^{?t}, \quad ? \neq ?_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$e^{?t}, \quad ? = ?_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$k \quad (\text{um valor constante})$$

$$\cos(wt + q)$$

$$(t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \dots + a_1t + a_0)e^{?t}$$

Saída

$$be^{?t}$$

$$$b$$$

$$b \cos(wt + q)$$

$$(b_rt^r + b_{r-1}t^{r-1} + \dots + b_1t + b_0)e^{?t}$$

Solução Clássica de Equações Diferenciais (iv)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo : Resolva a equação diferencial : $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$

para uma entrada $x(t) = t^2 + 5t + 3$, e $y(0^+) = 2$, $\dot{y}(0^+) = 3$.

Polinômio característico : $l^2 + 3l + 2 = (l + 1)(l + 2)$, assim :

$$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Para $x(t)$ acima, a resposta forçada é $y_f(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$

Para o polinômio acima tem-se : $(D^2 + 3D + 2)y_0(t) = Dx(t) \therefore$

$$\therefore 2b_2 + 3(2b_2 t + b_1) + 2(b_2 t^2 + b_1 t + b_0) = 2t + 5 \therefore$$

$$\begin{cases} 2b_2 = 0 \\ 2b_1 + 6b_2 = 2 \\ 2b_0 + 3b_1 + 2b_2 = 5 \end{cases} \therefore \begin{cases} b_2 = 0 \\ b_1 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

Solução Clássica de Equações Diferenciais (v)

- **Solução Clássica de Equações Diferenciais: Resposta Forçada**

A solução forçada é $y_f(t) = t + 1$, $t \geq 0$

A solução completa e sua derivada são :

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + t + 1 \quad t \geq 0$$

$$\dot{y}(t) = -K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-2t} + 1$$

$$\text{Para } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = K_1 + K_2 + 1 \\ 3 = -K_1 - 2K_2 + 1 \end{cases} \ddots \begin{cases} K_1 = 4 \\ K_2 = -3 \end{cases}$$

Finalmente tem - se que $y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + t + 1 \quad t \geq 0$

- Este requer condições para t imediatamente após o instante $t=0$, porque no instante imediatamente anterior a $t=0$, apenas o componente de entrada zero existe.

Solução Clássica de Equações Diferenciais (v)

- **Resposta Forçada**

- Sinal exponencial é do mesmo tipo.

$$Q(D)[be^{z^t}] = P(D)e^{z^t}, \quad \text{lembre-se que } D^r e^{z^t} = z^r e^{z^t}$$

$$\text{Consequentemente : } Q(D)e^{z^t} = Q(z)e^{z^t} \quad \text{e} \quad P(D)e^{z^t} = P(z)e^{z^t} \Rightarrow$$

$$bQ(z)e^{z^t} = P(z)e^{z^t} \therefore b = \frac{P(z)}{Q(z)} = H(z)$$

Para a entrada $x(t) = e^{z^t}u(t)$, a resposta forçada é dada por

$$y_f(t) = H(z)e^{z^t} \quad t \geq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Resposta total do sistema para } x(t) \text{ é : } y(t) = \sum_{j=1}^N K_j e^{l_j t} H(z) e^{z^t},$$

onde as constantes K_j são calculadas pelas condições auxiliares.

Solução Clássica de Equações Diferenciais (vi)

- **Resposta Forçada**

- O método clássico, por vezes, é relativamente simples quando comparado com o método para encontrar os componentes com entrada e estado zero. Contudo, o método clássico apresenta os seguintes problemas:
 - Geração de resposta completa, não permitindo a identificação de cada componente da resposta.
 - Impossibilidade de ser aplicado a qualquer classe de entradas (lembre-se da restrição com respeito às derivadas de $x(t)$).
 - As condições auxiliares são definidas para o instante imediatamente após o zero.

Estabilidade de Sistemas (i)

- **Estabilidade BIBO**

- Exemplo ilustrativo: Um cone acomodado em um de seus estados de equilíbrio (estados em que o cone pode permanecer para sempre): colocado sobre sua base circular (i), sobre seu vértice no cume (ii) e sobre sua lateral (iii). Se levemente perturbado em seu estado atual, o cone:

- O cone no estado (i) retorna à sua posição original após a perturbação: Equilíbrio estável.
 - O cone no estado (ii) move-se cada vez para mais distante de seu estado original: Equilíbrio instável.
 - O cone no estado (iii) nem move-se para mais distante de seu estado original nem volta a seu estado de equilíbrio: Equilíbrio neutro.
 - Pequenas perturbações causam resposta pequena (equilíbrio estável) ou respostas ilimitadas (equilíbrio instável).

Estabilidade de Sistemas (ii)

- **Estabilidade BIBO**

- Se toda entrada limitada produzir saída limitada no sistema, este é dito estável BIBO. Em contraste, se alguma entrada limitada resultar em resposta ilimitada o sistema é definido como instável BIBO.

Para um sistema LTIC

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) x(t - \tau) d\tau \Rightarrow |y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| |x(t - \tau)| d\tau,$$

Como $x(t)$ é limitada, logo $|x(t - \tau)| < K_1 < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| d\tau,$

Logo a condição necessária e suficiente para estabilidade BIBO é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| d\tau < \infty.$$

Se a $h(t)$ for absolutamente integrável, então o sistema é BIBO estável.

Estabilidade de Sistemas (iii)

- **Estabilidade BIBO**

- A condição $M \leq N$ é necessária mas não suficiente, pois se $M > N$ então o sistema é instável (derivação de função impulso).
- Este é um critério de estabilidade externa pois pode ser verificada a partir de medidas nos terminais externos.
- A estabilidade externa (BIBO) pode não indicar corretamente a estabilidade interna. Nem sempre o comportamento interno de um sistema pode ser verificado a partir dos terminais externos.
 - Existe equivalência entre estabilidade interna e externa para sistema que é controlável (pode-se controlar seu estado a partir de entradas externas) e observável (sabe-se o estado a partir do monitoramento da saída).
 - A estabilidade interna implica na estabilidade externa.

Estabilidade de Sistemas (iv)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

- Um sistema LTI e causal é internamente estável se ele permanecer em um dado estado (estado de equilíbrio) indefinidamente, na ausência de entrada externa.
 - Todo modo característico de um sistema estável surgido como resultado de condições iniciais diferentes de zero, deve tender a zero quando o tempo tende a infinito.
 - Se ao menos um dos modos, crescer com o passar do tempo, o sistema é rotulado como instável.
 - Se alguns modos nem decrescem a zero nem crescem indefinidamente, enquanto outros modos decrescem a zero, este é um sistema marginalmente estável.
 - A estabilidade interna é também chamada de estabilidade assintótica ou estabilidade no sentido de Lyapunov.

Estabilidade de Sistemas (v)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

Seja um sistema LTIC definido pelo polinômio : $Q(D)y(t) = P(D)x(t)$, a localização das raízes características determinam a estabilidade interna.

Para modos característicos da forma $e^{l_k t}$ e $te^{l_k t}$, tem-se que o sistema é :

- Assintoticamente estável se

modos $\rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para $\text{Re } l_k < 0, \forall l_k$.

- Instável se

modos $\rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty, \exists l_k / \text{Re } l_k > 0$.

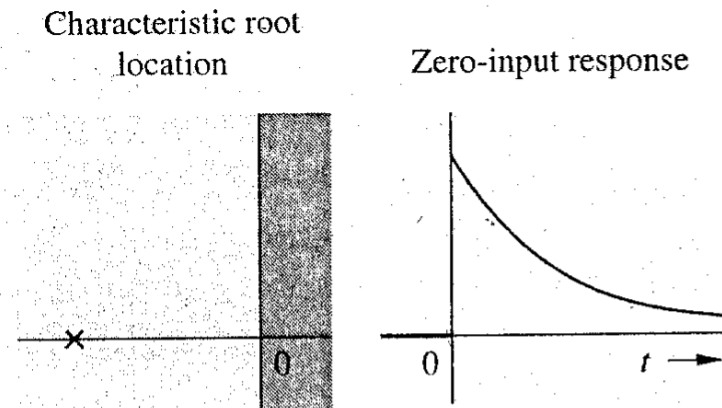
- Marginalmente estável se

modos geram senoides quando $t \rightarrow \infty$ para $\text{Re } l_k = 0, \forall l_k$.

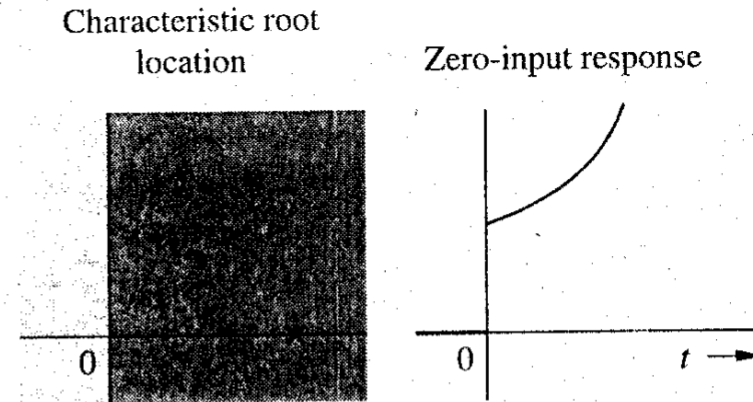
Cabe observar que raízes imaginárias repetidas tornam o sistema instável.

Estabilidade de Sistemas (vi)

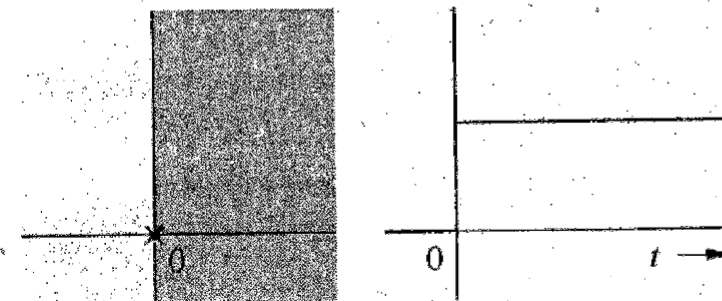
- Estabilidade Interna (Assintótica)



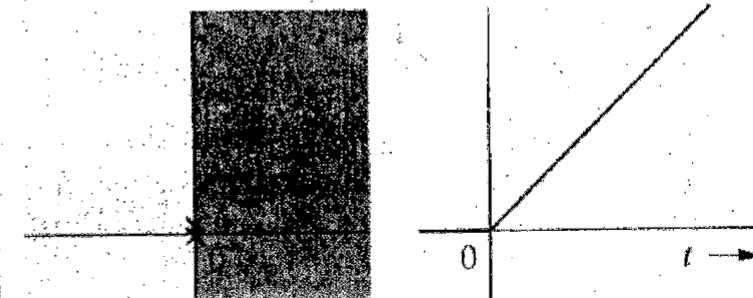
(a)



(b)



(c)



(d)

Estabilidade de Sistemas (vii)

- Estabilidade Interna (Assintótica)

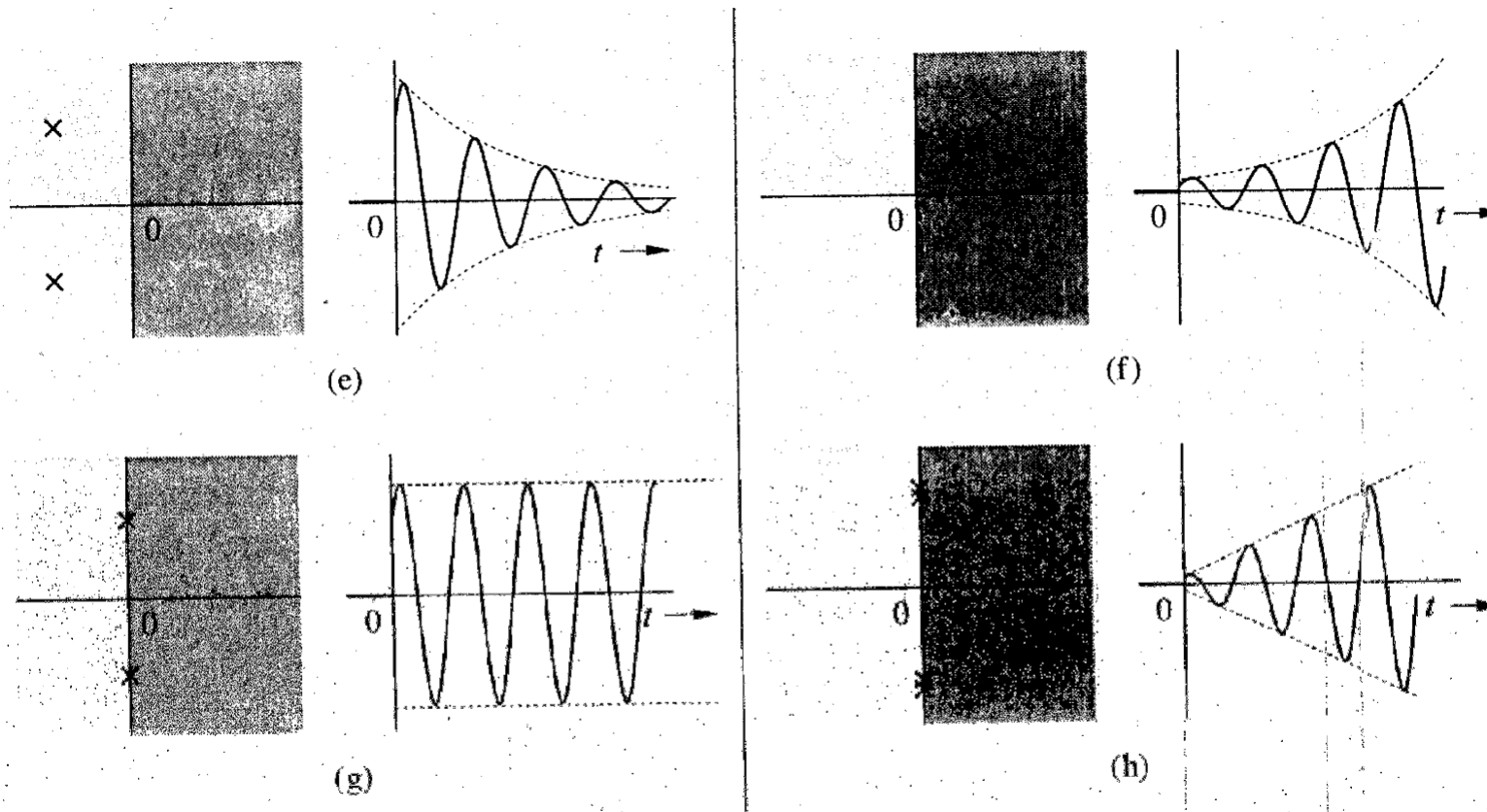


Figure 2.17 Location of characteristic roots and the corresponding characteristic modes.

Estabilidade de Sistemas (viii)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

- Sumário:

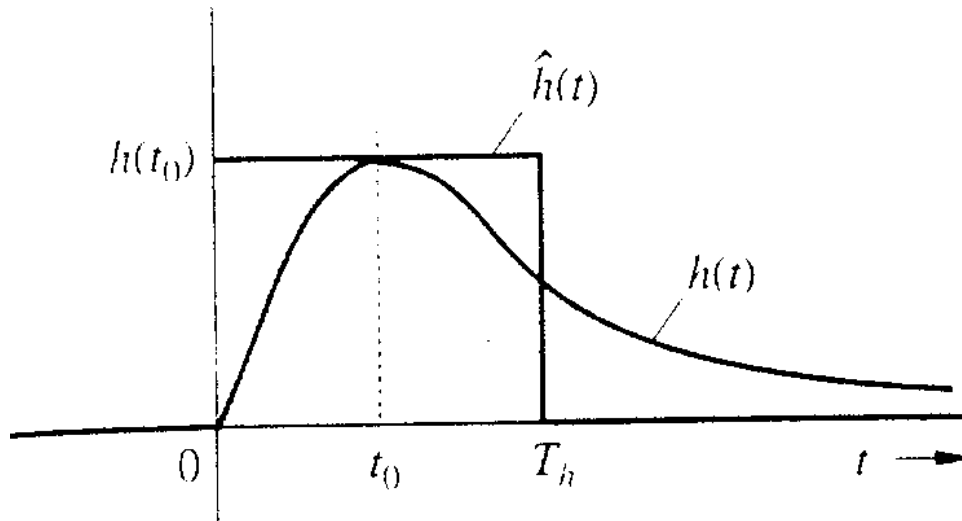
- Um sistema LTIC é assintoticamente estável, se e só se, todas suas raízes características (autovalores), distintas ou com repetição, estão no semiplano esquerdo.
 - Um sistema LTIC é instável, se e só se, uma ou ambas condições forem verdadeiras: (i) ao menos uma das raízes características estão no semiplano direito; (ii) existem raízes repetidas sobre o eixo imaginário.
 - Um sistema LTIC é marginalmente estável, se e só se, não existirem raízes características no semiplano direito e existirem raízes não repetidas sobre o eixo imaginário.

Estabilidade de Sistemas (ix)

- **Relação entre Estabilidade Interna e Externa**
 - Estabilidade interna (de entrada zero) é determinada para condições iniciais não nulas e entrada nula, enquanto que a estabilidade externa (de estado zero) é determinada com condições iniciais nulas e entrada diferente de zero.
 - Estabilidade interna assegura estabilidade externa mas o inverso não é verdadeiro.

Parâmetros e Comportamento de Sistemas (i)

- **Comportamento Depende dos Modos Característicos**
 - O comportamento do sistema depende dos modos característicos em termos de módulo, tempo e precisão.
- **Tempo de Resposta de um Sistema: A sua Constante de Tempo**
 - Uma entrada é respondida após algum tempo de sua aplicação. Tal intervalo de tempo é chamado constante de tempo do sistema.



- T_h é o tempo para responder plenamente a um impulso.
- A rapidez de um sistema é indicada por sua constante de tempo: quanto maior for a constante de tempo, mais lento é sua resposta

Parâmetros e Comportamento de Sistemas (ii)

- **Tempo de Resposta de um Sistema: A sua Constante de Tempo**

Não existe uma uma definição única de duração efetiva de um sinal para qualquer sistema. No exemplo anterior, a duração é definida pela largura de um pulso retangular $\hat{h}(t)$ em um instante de tempo adequado, no caso, o máximo valor de $h(t)$. assim,

$$T_h h(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \therefore T_h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt}{h(t_0)}$$

Para um sistema com um só modo : $h(t) = Ae^{lt}u(t)$, para l negativo e real.

$$T_h = \frac{1}{A} \int_0^{\infty} Ae^{lt} dt = -\frac{1}{l}$$

Parâmetros e Comportamento de Sistemas (iii)

- **Constante de Tempo e Tempo de Subida**
 - Tempo necessário, em um sistema, para a resposta ao degrau unitário subir de 10 % a 90% de seu valor de estado permanente.
 - A resposta $y(t)$ ao degrau de um sistema é a convolução de $u(t)$ com $h(t)$. Se esta for um pulso retangular de largura T_h . Tem-se que o tempo de subida $T_r = T_h$.

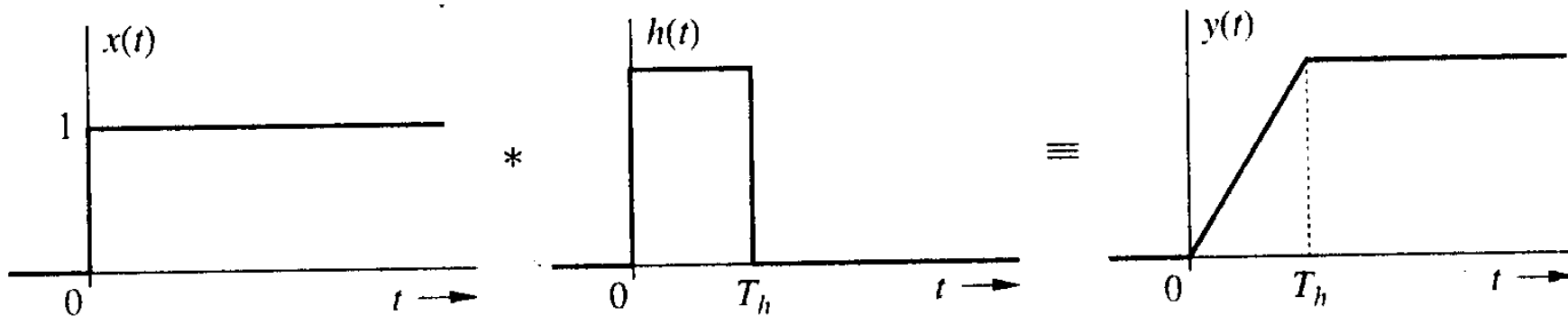
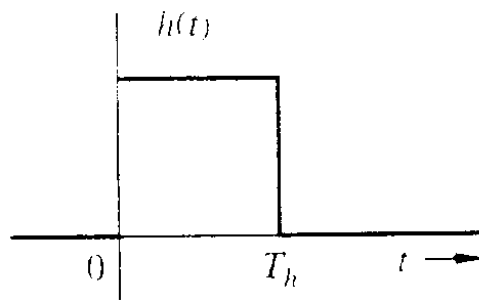


Figure 2.22 Rise time of a system.

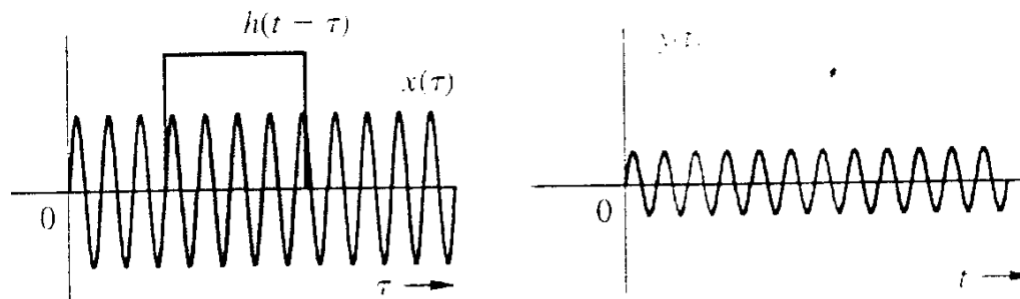
Parâmetros e Comportamento de Sistemas (iv)

- **Constante de Tempo e Filtragem**

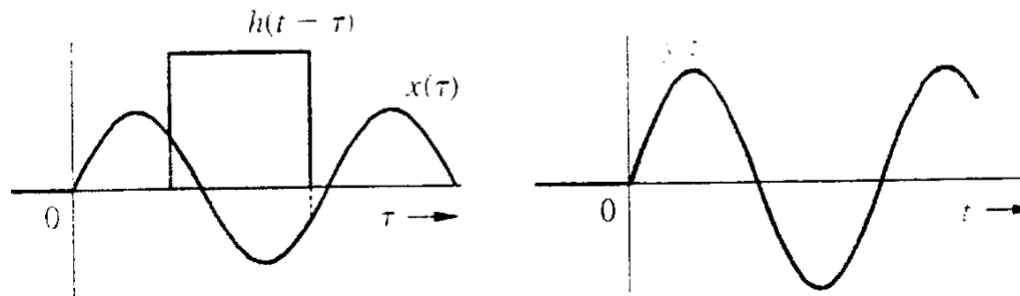
- Um sistema com uma constante de tempo T_h atua como um filtro passa-baixa com frequência de corte $f_c = 1/T_h$. Isto é, sinais de entrada com frequência superior a f_c Hertz são suprimidos. Veja resultado das convoluções com alta e baixa frequências.



(a)



(b)



(c)

Parâmetros e Comportamento de Sistemas (v)

- **Constante de Tempo e Dispersão do Pulso (Espalhamento)**

- A transmissão de um pulso por um sistema causa dispersão ou espalhamento de pulso. Isto é, o pulso de saída é mais largo que o pulso de entrada. Esta característica é importante em sistemas de comunicações nos quais as informações são transmitidas por amplitudes de pulso. Deseja-se evitar que a dispersão cause interferência ou superposição de sinais.

- Para uma entrada $x(t)$ com largura de pulso T_x tem-se uma saída cuja saída $y(t)$ tem largura T_y . Logo,

$$T_y = T_x + T_h$$

- O tempo de espalhamento é igual à constante de tempo ou ao tempo de subida do sistema.

Parâmetros e Comportamento de Sistemas (vi)

- **Constante de Tempo e Taxa de Transmissão de Informação**
 - Em sistema de comunicações por pulso, que transmitem informação por amplitude de pulso, a taxa de transmissão de informação é proporcional a taxa de transmissão de pulso. Para evitar destruição da informação devido a dispersão dos pulsos durante sua transmissão através do canal, a taxa de informação não deve exceder a largura de banda do canal de comunicação.
 - Como o pulso espalha-se por T_h segundos, então dois pulsos consecutivos devem distar T_h segundos para evitar interferência. Assim, a taxa de transmissão de pulsos não pode ultrapassar $1/T_h$ pulsos/segundo.

Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
 - Todos
- **Problemas**
 - 2.2-1 até 2.2-7.
 - 2.3-1 até 2.3-4.
 - 2.4-4 até 2.4-10, 2.4-12, 2.4-14 até 2.4-18, 2.4-22 até 2.4-25, 2.4-28 e 2.4-29, 2.4-31, 2.4-34.
 - 2.5-1 até 2.5-4.
 - 2.6-1 até 2.6-3, 2.6-5 e 2.6-6.
 - 2.7-1 até 2.7-2.