ES 413 Sinais e Sistemas

Sinais e Sistemas Lineares

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo

Depto. of Sistemas de Computação

Centro de Informática - UFPE

Capítulo 1

Conteúdo

- **Sinais**
  - Tamanho de um Sinal
  - Operações Úteis com Sinais
  - Classificação de Sinais
  - Modelos Úteis com Sinais
  - Funções Pares e Ímpares
- **Sistemas**
  - Definições
  - Classificação de Sistemas
  - Modelos de Sistemas

Sinais e Sistemas (i)

- **Definições**
  - Sinais (Lathi):
    - Um sinal é um conjunto de dados ou informações. Um sinal pode ser função do tempo (e.g., sinal de televisão, sinal vendas mensais de uma corporação) ou do espaço (carga elétrica distribuída em um corpo). Neste curso se tratará de sinais que são funções do tempo, embora a análise seja válida para outras variáveis independentes.
  - Sistemas (Lathi):
    - Formalmente, um sistema é uma entidade que pode processar um ou mais sinais (entrada do sistema) e produzir um ou mais sinais (saída do sistema). Sistemas podem modificar ou extrair informações adicionais de um sinal.

Sinais e Sistemas (ii)

- **Cobertura do Curso**
  - Sinais e sistemas lineares que servirão para controle, comunicação e processamento de sinais.
  - Exemplos de sistemas eletrônicos de controle:
    - Controle de processos industriais.
    - Controle de automação predial.
    - Funções automotivas: suspensão ativa, freios anti-travantes.
    - Controle de máquina elétricas: avião, geração de energia.
  - Exemplos de processamento de sinais:
    - Síntese e reconhecimento de discurso.
    - Compressão de áudio (MP3) e imagem (JPEG, JPEG 2000).
    - CDs de vídeo (MPEG 1) e áudio.
    - DVD, cabo digital e HDTV (MPEG 2).
    - Vídeo sem fio (MPEG 4/H.263).

Sinais e Sistemas (iii)

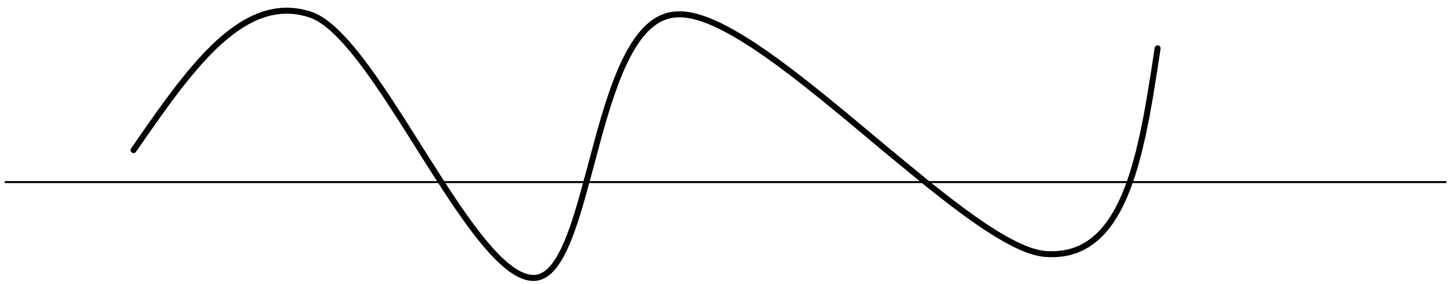
- **Cobertura do Curso**
  - Exemplos de sistemas de comunicações:
    - Modens com largura de banda para voz (56k).
    - Modens para linha de assinante digital (DSL).
    - Modens para cabo.
    - Telefones celulares.

Sinais e Sistemas (iv)

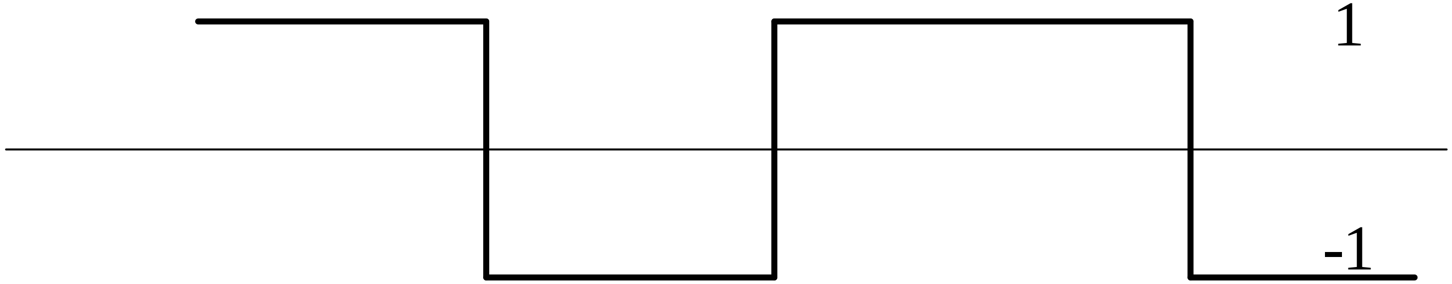
- **Tipos de Sinais**
  - Sinais contínuos são funções de um argumento real.
    - $x(t)$ é um sinal no qual t pode assumir qualquer valor real.
    - $x(t)$ pode ter valor constante ou nulo para um intervalo de valores de t.
  - Sinais discretos no tempo são funções de um argumento que só pode assumir valores discretos pertencentes a um conjunto.
    - $x[n]$ é um sinal no qual $n \in \{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$.
      - Usualmente emprega-se um índice ao invés da variável tempo quando se trata de sinais discretos.
  - Tanto para sinais contínuos como para sinais discretos, o valor de x pode ser real ou complexo.

Sinais e Sistemas (v)

- **Tipos de Sinais**
  - Sinais contínuos: Amplitude pode assumir qualquer valor real ou complexo em um instante de tempo ou para cada amostra.



  - Sinais discretos: Amplitude pode assumir qualquer valor real ou complexo pertencente a um conjunto discreto.



Sinais e Sistemas (vi)

- **Tipos de Sistemas**
  - Exemplos de sistemas contínuos no tempo com um sinal de entrada função de $x(t)$ e um sinal de saída $y(t)$:
    - $y(t) = x(t) + x(t\text{-}1)$.
    - $y(t) = x^2(t)$.

  - Exemplos de sistemas discretos no tempo com um sinal de entrada função de $x(n)$ e um sinal de saída $y(n)$:
    - $y[n] = x[n] + x[n\text{-}1]$
    - $y[n] = x^2[n]$

Tamanho de Sinais (i)

– O tamanho de um sinal deve levar em conta sua amplitude que varia ao longo do tempo, e a duração deste sinal.

- **Energia de um Sinal**

– Seja um sinal *x*(*t*) que pode assumir valores reais positivos e negativos. Define-se energia deste sinal como a integral ao longo do tempo do valor de *x*(*t*) elevado ao quadrado. Logo, elimina-se o cancelamento mútuo de partes das integrais com sinais opostos que pode avaliar erradamente o tamanho do sinal. O sinal energia pode ser definido como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt, \quad \text{para valores reais.}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt, \quad \text{para valores complexos.}$$

$$E_x \ \text{é finito se e só se } x(t) \rightarrow 0 \text{ se } |t| \rightarrow \infty.$$

Tamanho de Sinais (ii)

- **Potência de um Sinal**
  - Se a amplitude de $x(t)$ não convergir para zero com o passar do tempo, emprega-se uma medida da energia no tempo, a potência de um sinal.

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt, \quad \text{para um sinal real.}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\right|^2 dt, \quad \text{para um sinal complexo.}$$

$$\text{RMS}_\text{x} = \sqrt{P_x}$$

  - Em geral, a media de uma grandeza calculada para um longo intervalo de tempo, aproximando-se do infinito, existe se a grandeza é periódica ou tem regularidade estatística. Caso esta condição não seja verdadeira, a média pode não existir como no caso da função rampa.

Tamanho de Sinais (iii)

- **Exemplos de Sinais que têm Energia e Potência Finitos**

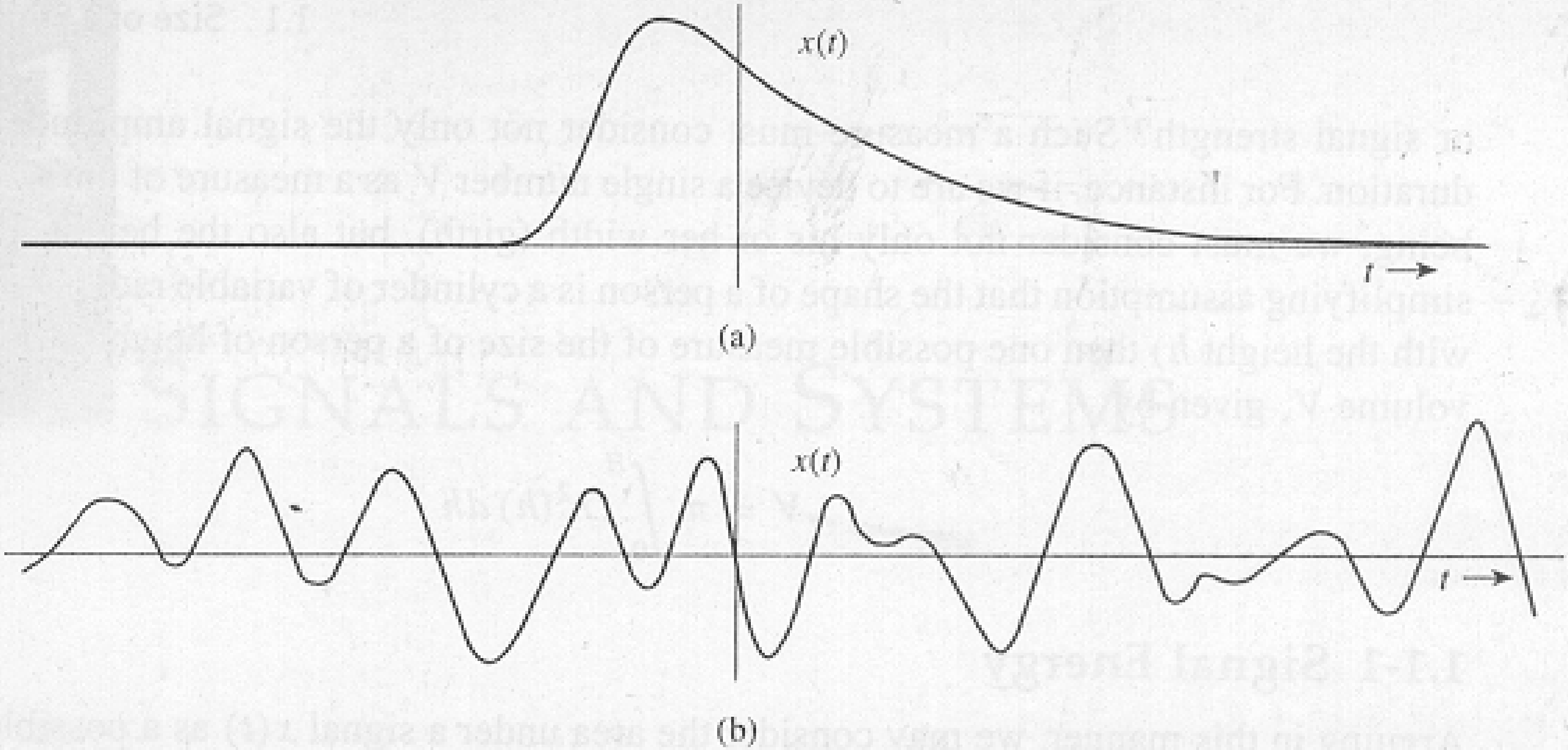


Figure 1.1 Examples of signals: **(a)** a signal with finite energy and **(b)** a signal with finite power.

Tamanho de Sinais (iv)

- **Exemplo: Cálculo de tamanho de um sinal**

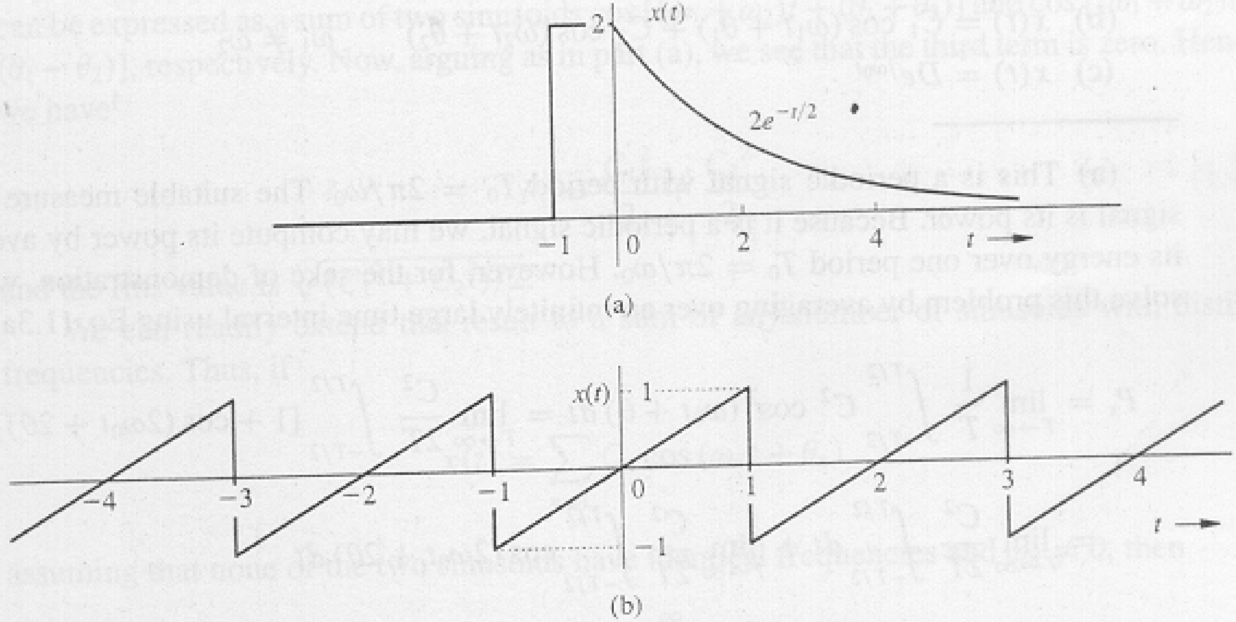


Figure 1.2

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0^2\, dt + \int_{-1}^{0} 2^2\, dt + \int_{0}^{\infty} \left(2e^{\frac{-t}{2}} \right)^2 dt = 0 + 4 + 4 = 8$$

$$P_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3},$$

Tamanho de Sinais (v)

- **Exemplo: Determine a valor da potência e o valor rms:**

$x(t) = C\cos(w_0 t + q)$

Como este é um sinal periódico ($T_0 = \dfrac{2p}{w_0}$), calcula-se a potência do sinal

tomando a energia média ao longo de um período:

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C^2\cos^2(w_0 t + q)dt \therefore$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[1+\cos(2w_0 t + 2q)\right]dt = \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} 1dt +$$

$$+\lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2w_0 t + 2q)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}t\Big|_{-T/2}^{T/2} + 0 \therefore$$

$$P_x = \frac{C^2}{2} \Rightarrow \mathrm{RMS_x} = \frac{\sqrt{2}C}{2}.$$

Lembre-se que $\cos^2 f = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos 2f\right)$

Operações com Sinais (i)

- **Deslocamento no Tempo ("Time Shifting")**
  - Seja um sinal $x(t)$ e este mesmo sinal atrasado de T segundos:

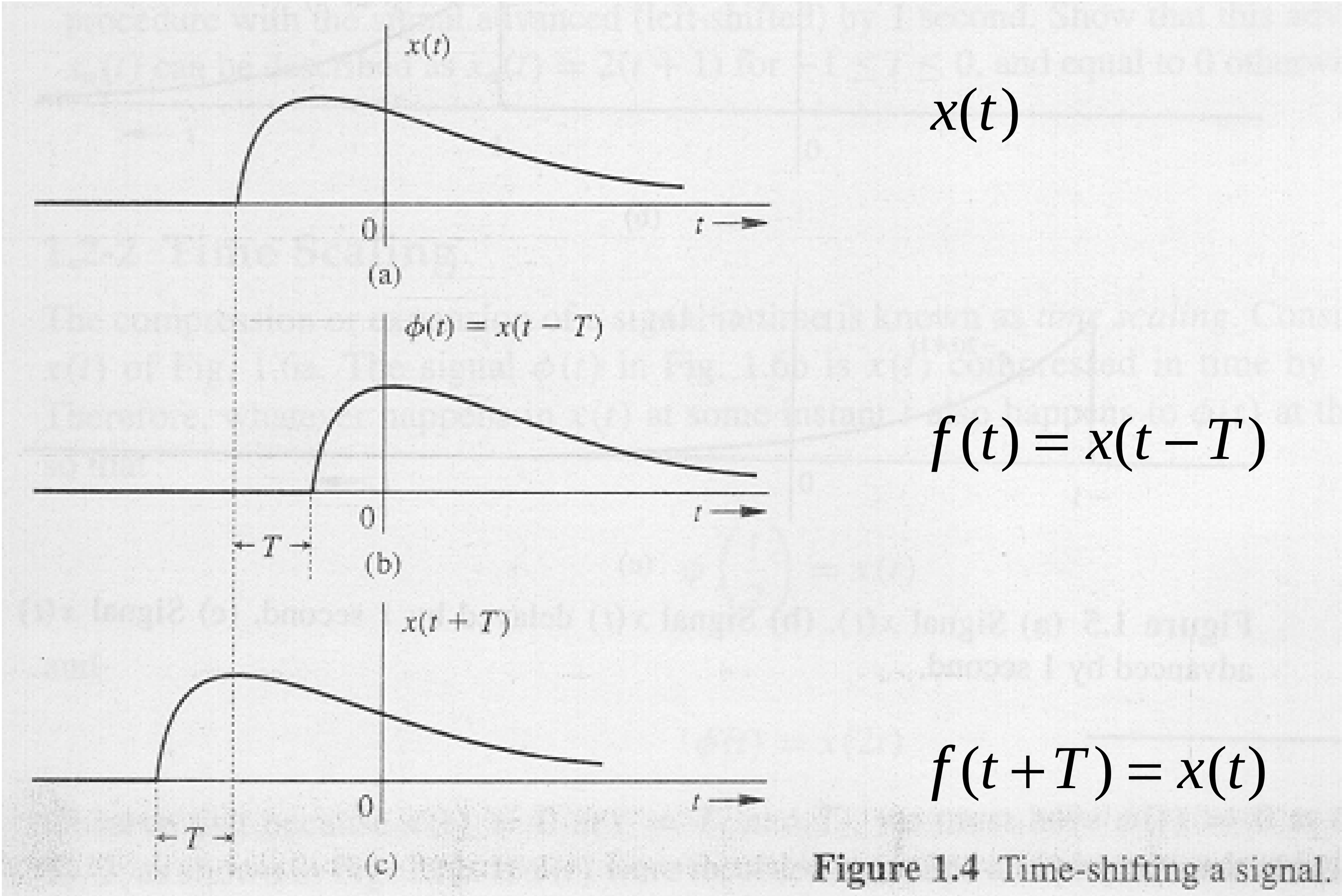


Figure 1.4 Time-shifting a signal.

$$x(t)$$

$$f(t) = x(t - T)$$

$$f(t + T) = x(t)$$

Operações com Sinais (ii)

- **Exemplo: Deslocamento no tempo**

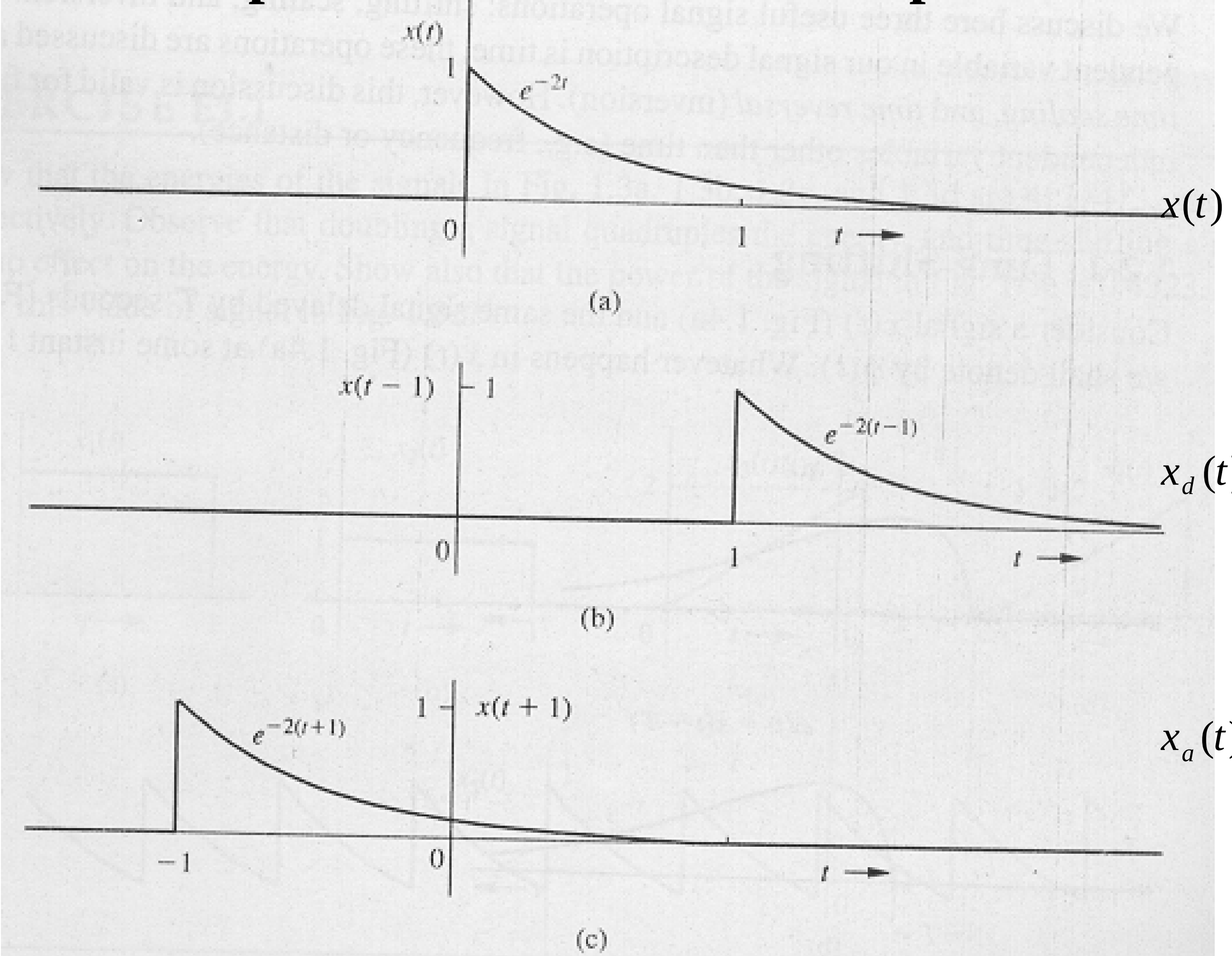


Figure 1.5 **(a)** Signal $x(t)$. **(b)** Signal $x(t)$ delayed by 1 second. **(c)** Signal $x(t)$ advanced by 1 second.

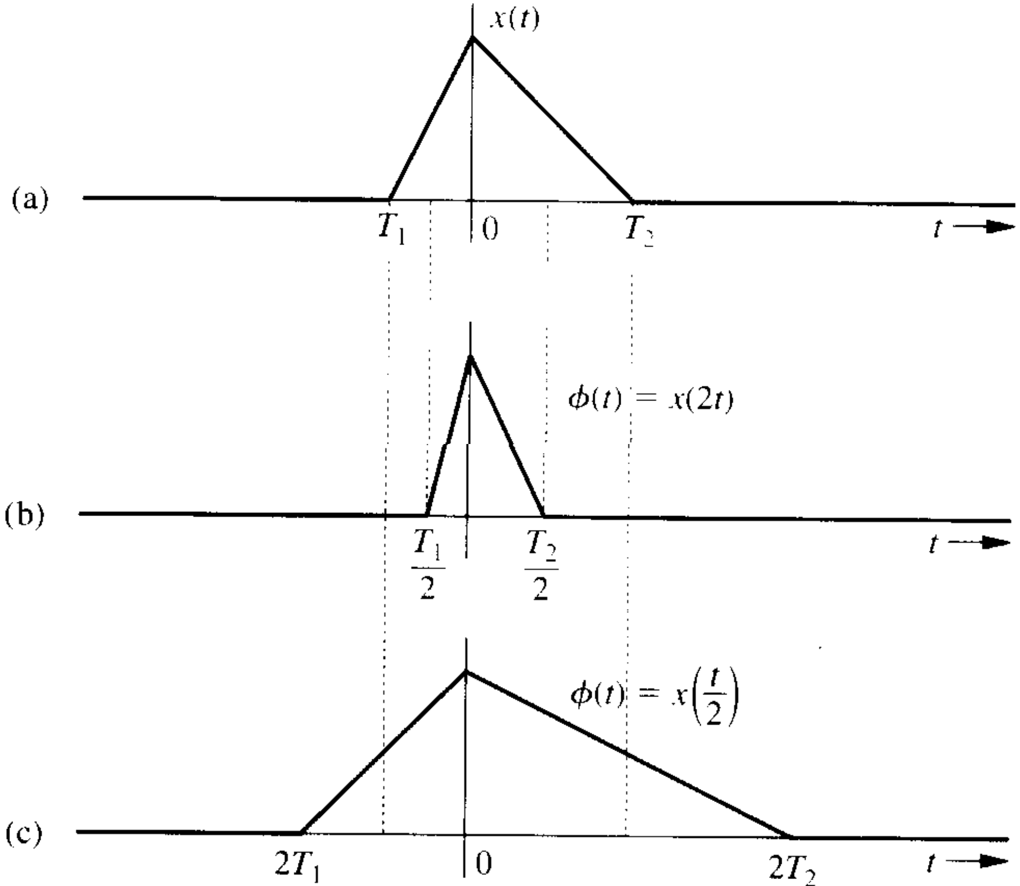
$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$x_d(t) = x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)} & t-1 \geq 0 \\ 0 & t-1 < 0 \end{cases}$$

$$x_a(t) = x(t+1) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & t+1 \geq 0 \\ 0 & t+1 < 0 \end{cases}$$

Operações com Sinais (iii)

- **Escalonamento no Tempo ("Time Scaling")**
  - Compressão ou expansão de um sinal *x*(*t*) no tempo:



$$x(t)$$

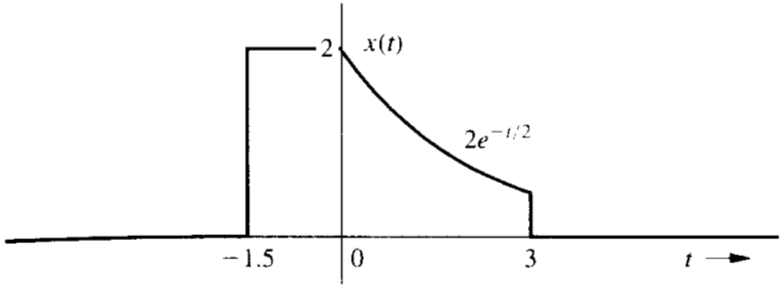
$$f(t) = x(at) = x(2t)$$

$$f(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) = x\left(\frac{t}{2}\right)$$

Figure 1.6 Time scaling a signal.

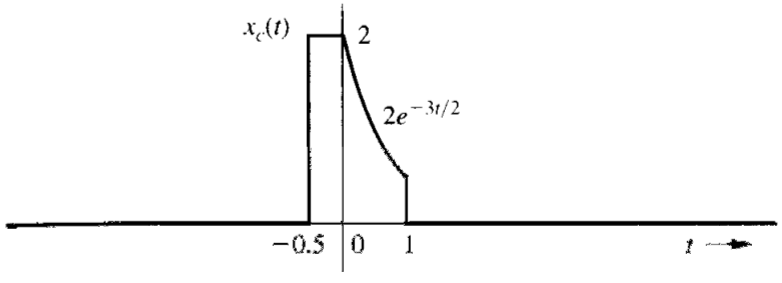
Operações com Sinais (iv)

- **Exemplo: Escalonamento no Tempo**



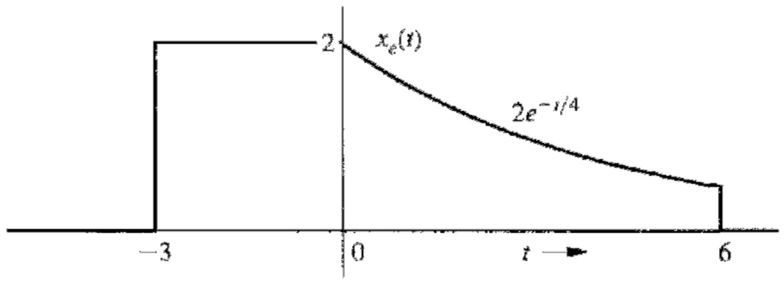
(a)

$$x(t)=\begin{cases}2 & -1{,}5\le t<0\\ 2e^{-t/2} & 0\le t<3\\ 0 & \text{de outro modo}\end{cases}$$



(b)

$$x_c(t)=x(3t)=\begin{cases}2 & -1{,}5\le 3t<0 \ \text{ ou } -0{,}5\le t<0\\ 2e^{-3t/2} & 0\le 3t<3 \ \text{ ou } \ 0\le t<1\\ 0 & \text{de outro modo}\end{cases}$$



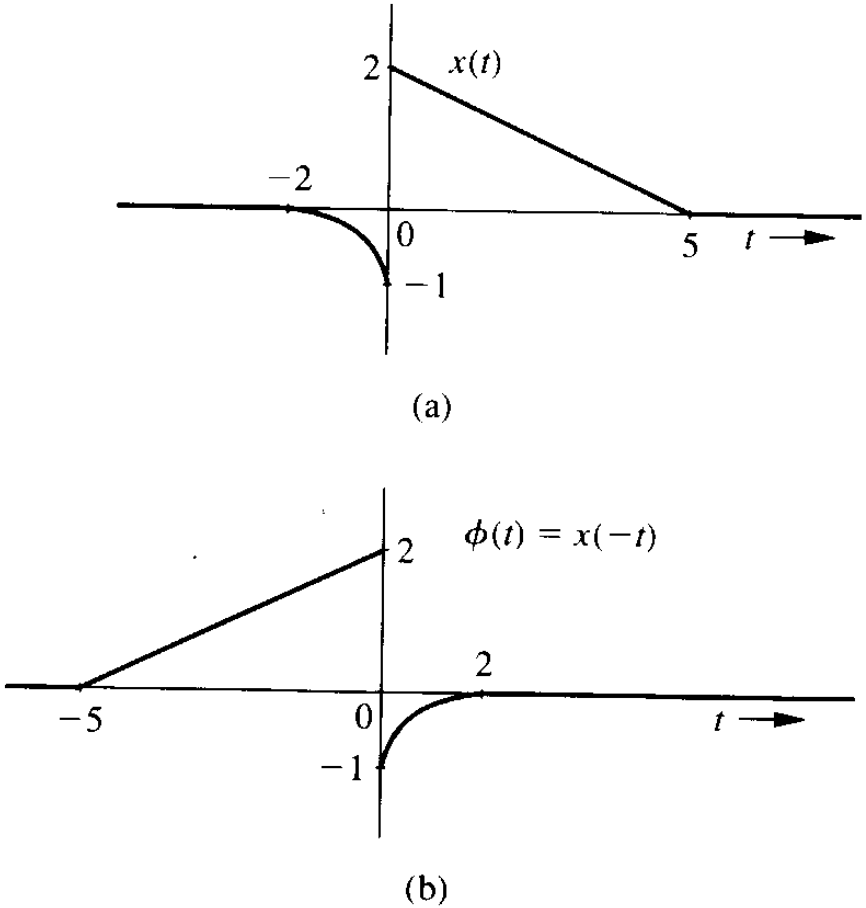
(c)

$$x_a(t)=x(t/2)=\begin{cases}2 & -1{,}5\le t/2<0 \ \text{ ou } \ -3\le t<0\\ 2e^{-t/4} & 0\le t/2<3 \ \text{ ou } \ 0\le t<6\\ 0 & \text{de outro modo}\end{cases}$$

Figure 1.7

Operações com Sinais (v)

- **Reversão no Tempo ("Time Reversal")**
  - O sinal $x(t)$ é rotacionado em 180° em torno do eixo vertical:



$$x(t)$$

$$f(t) = x(-t)$$

Figure 1.8

Operações com Sinais (vi)

- **Exemplo: Reversão no Tempo**

$$x(t) = \begin{cases} 2e^{t/2} & -5 < t \le -1 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

$$x(-t) = \begin{cases} 2e^{-t/2} & -5 < -t \le -1 \text{ ou } 1 \le t < 5 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

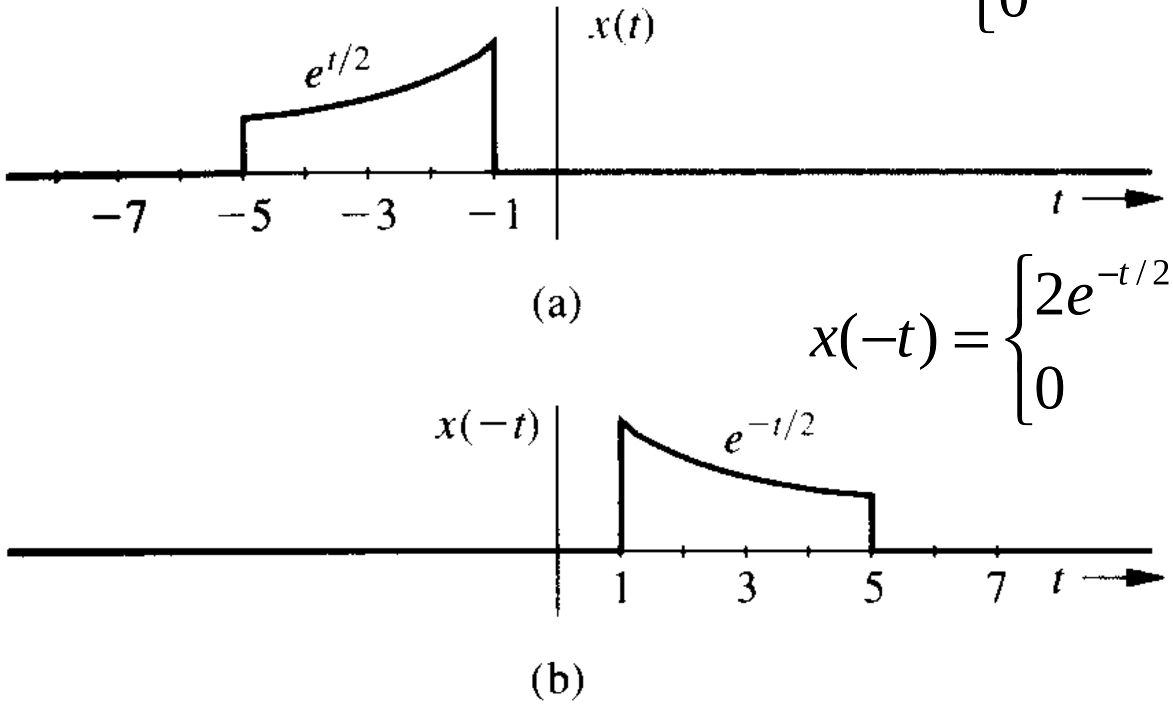


Figure 1.9

Operações com Sinais (vii)

- **Operações Combinadas**
  - Pode-se fazer uso de mais de uma das operações mostradas. A alternativa mais geral é realizar as operações, $x(at\text{-}b)$, de acordo com duas possíveis seqüências:
    - Deslocar $x(t)$ no tempo para obter $x(t\text{-}b)$. Em seguida, escalone no tempo o sinal deslocado para obter $x(at\text{-}b)$.
    - Escalone no tempo $x(t)$ para obter $x(at)$. Deslocar $x(at)$ no tempo por b/a para obter $x(at\text{-}b)$. Em ambos os casos, se a for negativo, o escalonamento no tempo envolve inversão no tempo.

Classificação de Sinais (i)

- **Sinais Contínuos e Discretos no Tempo;**
- **Sinais Analógicos e Digitais;**
- **Sinais Periódicos e Aperiódicos;**
- **Sinais de Energia e Potência;**
- **Sinais Determinísticos e Probabilísticos.**

Classificação de Sinais (ii)

- **Sinais Contínuos e Discretos no Tempo**
  - Sinais Contínuos no Tempo: são especificados continuamente no tempo;
  - Sinais Discretos no Tempo: são especificados apenas em valores discretos de tempo.
- **Sinais Analógicos e Digitais**
  - Sinais Analógicos: Amplitude pode assumir qualquer valor em um intervalo de tempo.
  - Sinais Digitais: Amplitude pode assumir apenas valores em um conjunto de possibilidades.

Classificação de Sinais (iii)

- **Sinais Contínuos e Discretos no Tempo**

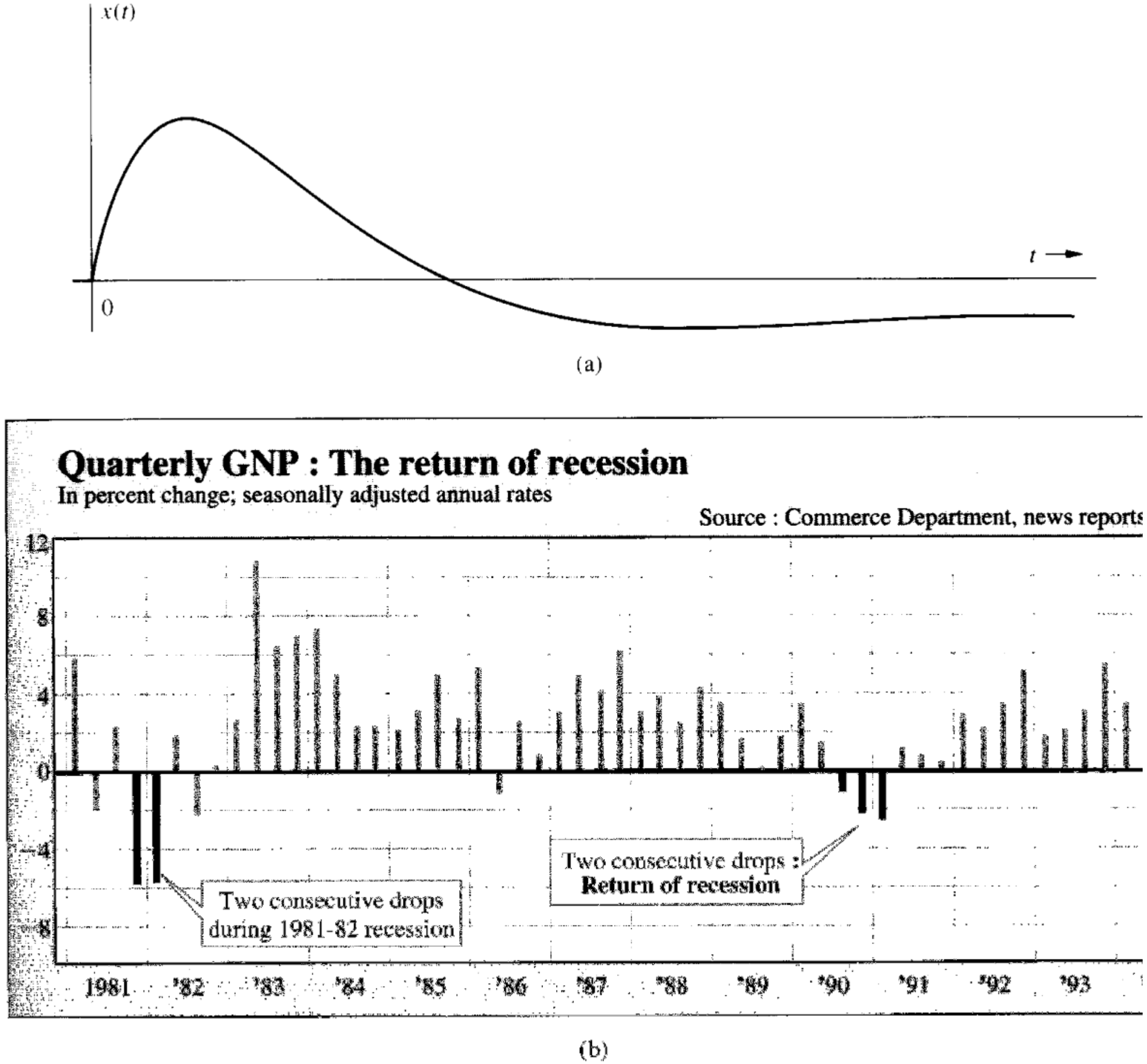


Figure 1.10 **(a)** Continuous-time and **(b)** discrete-time signals.

Classificação de Sinais (iv)

- **Sinais Analógicos e Digitais**

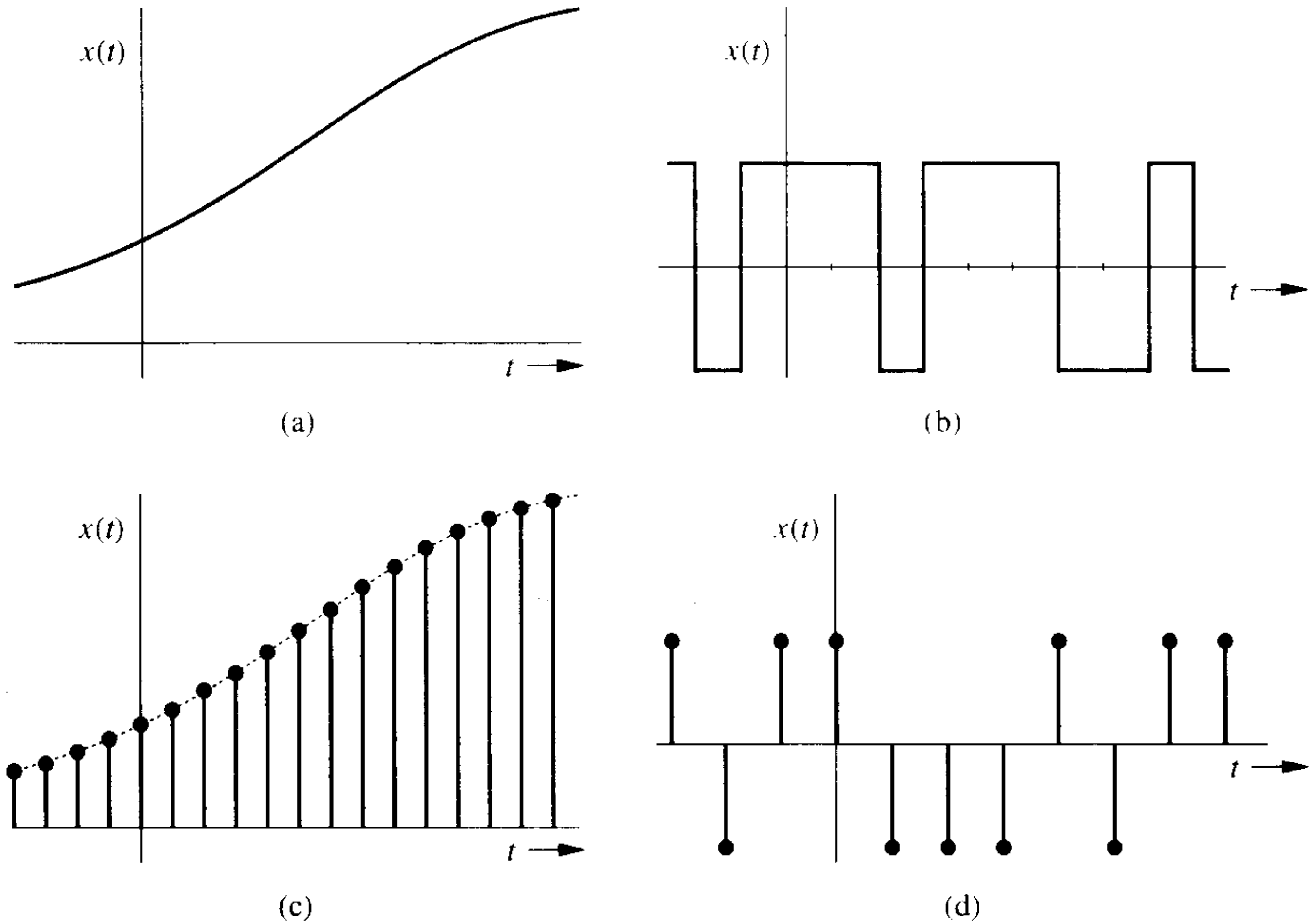


Figure 1.11 Examples of signals: **(a)** analog, continuous time, **(b)** digital, continuous time, **(c)** analog, discrete time, and **(d)** digital, discrete time.

Classificação de Sinais (v)

- **Sinais Periódicos e Aperiódicos**
  - Sinal Periódico: Um sinal $x(t)$ é periódico se para alguma constante inteira positiva o valor do sinal se repete:

    $$x(t) = x(t + T_0), \qquad \forall t$$

    - O menor valor que satisfaz a condição de periodicidade é chamado de período fundamental de $x(t)$.
    - Um valor particular de $x(t)$ pode ser gerado por extensão periódica de qualquer segmento de $x(t)$.
    - A área sob o sinal $x(t)$ para um intervalo de tempo igual a um período é a mesma.
    - O sinal $x(t)$ que não é permanente, é causal se $x(t)=0$, $t<0$.
  - Sinal Aperiódico: É todo o sinal que não é periódico.

Classificação de Sinais (vi)

- **Sinais Periódicos e Aperiódicos**

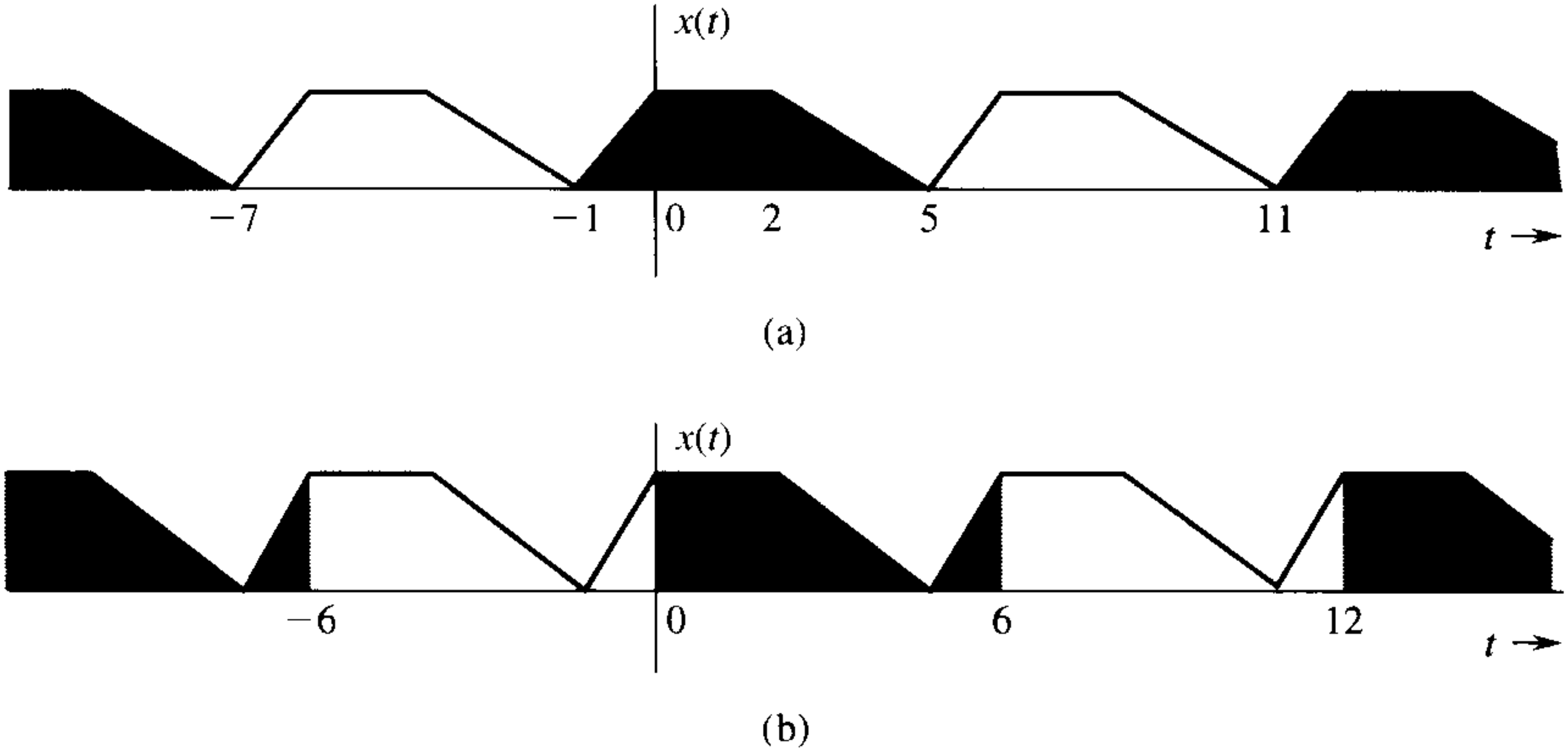


Figure 1.13 Generation of a periodic signal by periodic extension of its segment of one-period duration.

Classificação de Sinais (vii)

- **Sinais de Energia e Potência**
  - Um sinal com energia finita é um sinal de energia (Figura 1.2(a)). Um sinal com energia finita tem potência zero. Todos sinais do mundo real têm energia finitas e são sinais de energia.
  - Um sinal com potência diferente de zero e finita é um sinal de potência (Figura 1.2(b)). Um sinal com potência finita tem energia infinita. Um sinal de potência verdadeiro é impossível de ser gerado na prática pois tem energia e duração infinitas.
- **Sinais Determinísticos e Probabilísticos**
  - Sinal Determinístico: Aquele que conhece-se completamente sua descrição física (forma gráfica ou matemática).
  - Sinal Probabilístico: Aquele que não se pode prever precisamente. Possui descrição probabilística tal como valor médio.

Alguns Sinais Úteis (i)

- **Motivação:**
  - Alguns sinais particulares, expressos por funções, têm importante papel na área de sinais e sistemas. Tipicamente, eles são utilizados como padrões de testes e são empregados para representar outros sinais.
- **Funções que serão tratadas:**
  - Função Degrau Unitário;
  - Função Impulso Unitário;
  - Função Exponencial.

Alguns Sinais Úteis (ii)

- **Função Degrau Unitário**
  - Na maioria dos casos de estudo, lida-se com sinais causais (só existem a partir de *t=0*). Estes sinais podem ser descritos em termos da função degrau unitária que é definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Utilizar um sinal a partir de $t = 0$: Multiplica-se o sinal por $u(t)$. Por exemplo, forma causal da exponencial é $e^{-at}u(t)$.

  - A função degrau unitário é útil para definir em uma única expressão (válida para todo *t*) uma função com diferentes descrições matemáticas em intervalos de tempo distintos. Por exemplo, a função pulso retangular de 2 a 4: $x(t)=u(t-2)-u(t-4)$.

Alguns Sinais Úteis (iii)

- **Função Degrau Unitário**

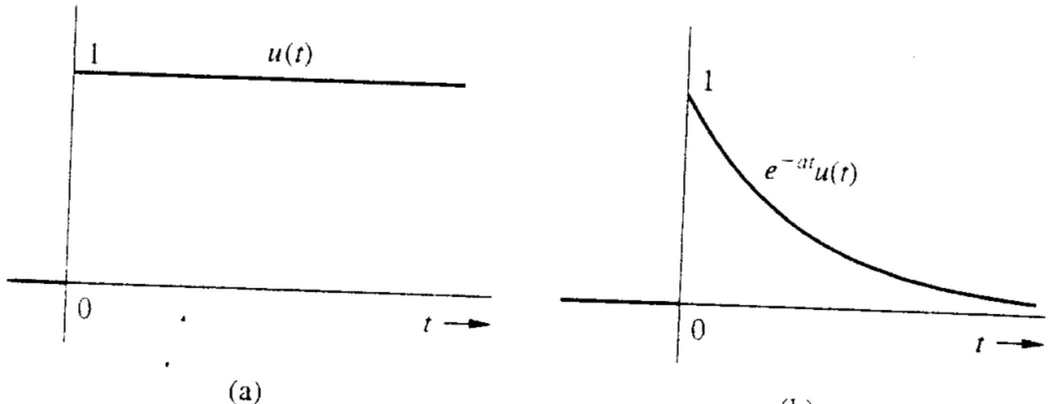


Figure 1.14 **(a)** Unit step function $u(t)$. **(b)** Exponential $e^{-at}u(t)$.

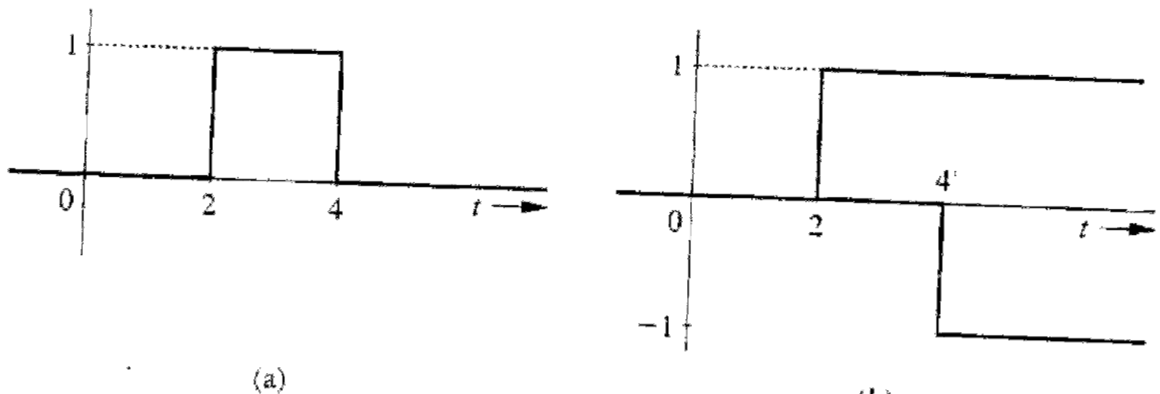


Figure 1.15 Representation of a rectangular pulse by step functions.

Alguns Sinais Úteis (iv)

- **Exemplo:** Descreva o sinal da Figura 1.16a

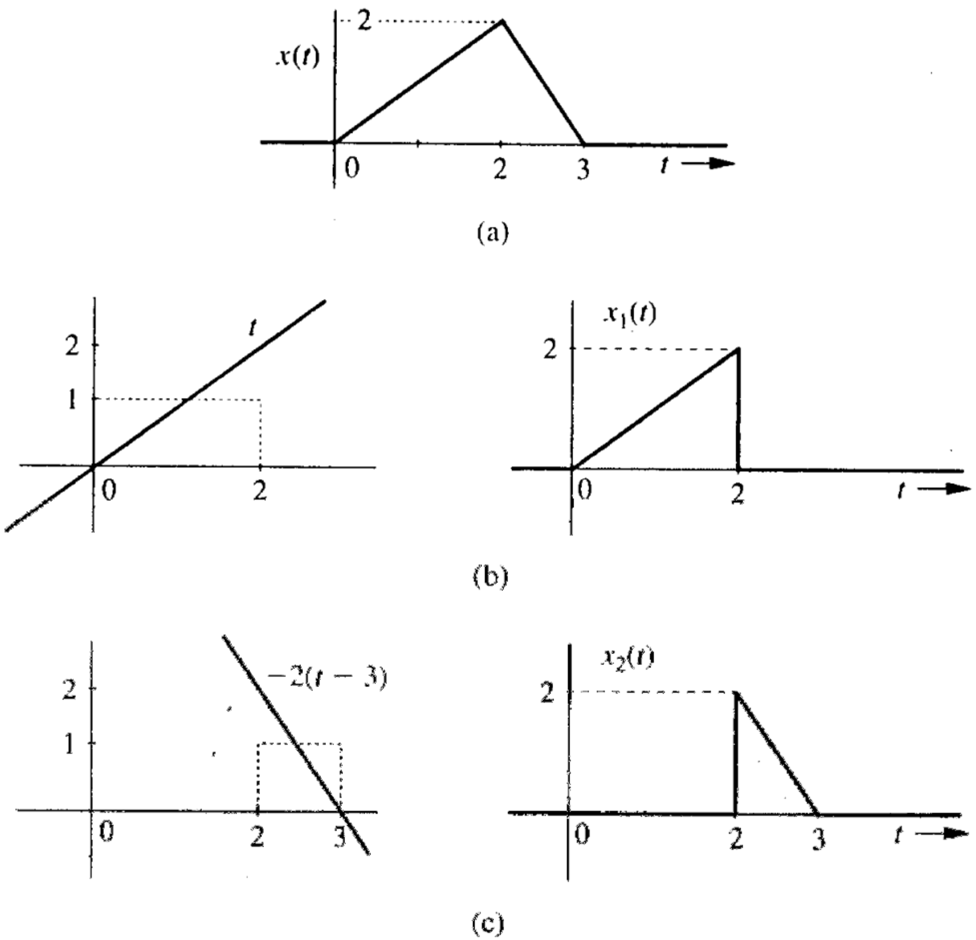


Figure 1.16 Representation of a signal defined interval by interval.

Alguns Sinais Úteis (v)

- **Exemplo:** Descrição dos sinais mostrados
  - O sinal em foco pode ser dividido em dois componentes que utilizam a função rampa.

$$x_1(t) = t\left[u(t)\text{-}u(t\text{-}2)\right]$$

$$x_2(t) = -2(t-3)\left[u(t\text{-}2) - u(t-3)\right]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= tu(t) - tu(t\text{-}2) - 2tu(t\text{-}2) + 2tu(t-3) + 6\left[u(t\text{-}2) - u(t-3)\right] \\ &= tu(t) - 3\left[t-2\right]u(t\text{-}2) + 2\left[t-3\right]u(t\text{-}3) \end{aligned}$$

Alguns Sinais Úteis (vi)

- **Função Impulso Unitário**
  - Esta função foi inicialmente definida por P. Dirac como:

$$d(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t)dt = 1$$

O impulso pode ser definido como um pulso retangular com largura e e altura $1/e$, no qual $e \to 0 \Rightarrow 1/e \to \infty$.

O impulso é representado por uma seta.

Outros pulsos tais como exponencial, triangular ou Gaussiana, podem ser usados para gerar a função impulso unitária por aproximação.

Alguns Sinais Úteis (vii)

- **Função Impulso Unitário**

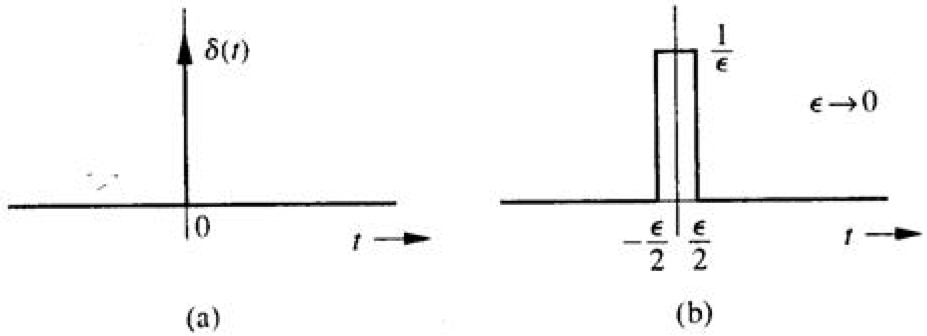


Figure 1.19 A unit impulse and its approximation.

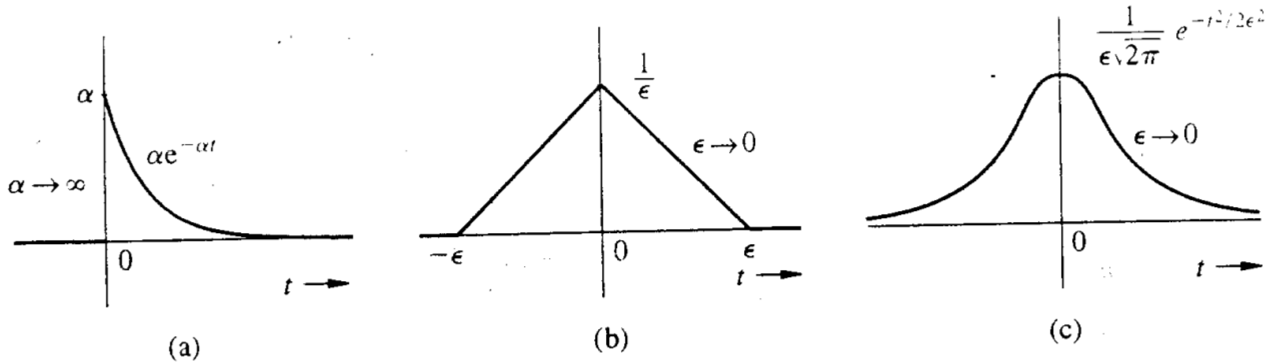


Figure 1.20 Other possible approximations to a unit impulse.

Alguns Sinais Úteis (viii)

- **Função Impulso Unitário:**
  - Produto de um Impulso Unitário por uma outra função contínua em *t=0*. Logo tem-se que

    $f(t)d(t) = f(0)d(t)$, este produto resulta em um impulso localizado em $t = 0$, com valor igual àquele da função no instante do impulso $(f(0))$. Analogamente, generaliza-se:

    $f(t)d(t-T) = f(T)d(t-T)$
  - Propriedade de amostragem de $d(t)$: A área sob o produto de uma função com $d(t)$ é igual ao valor da função no instante de ocorrência do impulso.

    $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d(t-T)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(T)d(t-T)dt = f(T)\int_{-\infty}^{\infty} d(t-T)dt = f(T)$$

Alguns Sinais Úteis (ix)

- **Função Impulso Unitário:**
  - Impulso Unitário como uma Função Generalizada: A definição de Dirac não é matematicamente rigorosa pois:
    - A função impulso não define uma única função. Por exemplo, $d(t) + dd(t)/dt$ satisfaz a definição.
    - $d(t)$ não é uma função pois não é definida para $t=0$.
    - Assim, ao invés de definir $d(t)$ como uma função ordinária (definida por seu valor em qualquer instante de tempo), define-se como uma função generalizada (definida como seus efeitos sobre outras funções).
  - A função impulso é definida pela propriedade de amostragem:
    - Note que a propriedade de amostragem é conseqüência da definição clássica de $d(t)$.

Alguns Sinais Úteis (x)

- **Função Impulso Unitário:**
  - Impulso Unitário como uma Função Generalizada:
    - A derivada de *u*(*t*) não existe, no sentido ordinário, em *t=0*, contudo ela existe no sentido generalizado e é igual a *d*(*t*).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dt} f(t)dt = u(t)f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\dot{f}(t)dt =$$

$$f(\infty) - 0 - \int_{0}^{\infty} \dot{f}(t)dt = f(\infty) - f(t)\Big|_{0}^{\infty} = f(0)$$

Assim du/dt satisfaz a propriedade de amostragem de $d(t)$, logo

$$\frac{du}{dt} = d(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} d(t)\,dt = u(t)$$

Alguns Sinais Úteis (xi)

- **Função Exponencial:** Seja *s* um número complexo: *s=s +j?* :

$$e^{st} = e^{(s+jw)t} = e^{st}e^{jwt} = e^{st}(\cos wt + j\,\mathrm{sen}\,wt)$$

Para o conjugado de s^* ($s^* = s - j?$), tem-se:

$$e^{s^*t} = e^{(s-jw)t} = e^{st}e^{-jwt} = e^{st}(\cos wt - j\,\mathrm{sen}\,wt)$$

e tem-se que $e^{st}\cos wt = 1/2\left(e^{st} + e^{s^*t}\right)$

Fómula de Euler ($e^{jq} = \cos q + j\,\mathrm{sen}\,q$) $\Rightarrow e^{st}$ generaliza e^{jwt}.

para s: freqüência complexa. Casos especiais envolvendo e^{st}:

Constante $k = ke^{st}, \quad s = 0;$

Função exponencial monotônica $e^{st} \quad (? = 0, s = s);$

Senoidal $\cos wt \quad (s = 0, s = \pm j?);$

Exponencial variando senoidalmente $e^{st}\cos wt \quad (s = s \pm j?).$

Alguns Sinais Úteis (xii)

- **Função Exponencial:** Ilustrações dos casos especiais.
  Exponencial variando senoidalmente $e^{st} \cos wt \quad (s = s \pm j?)$.

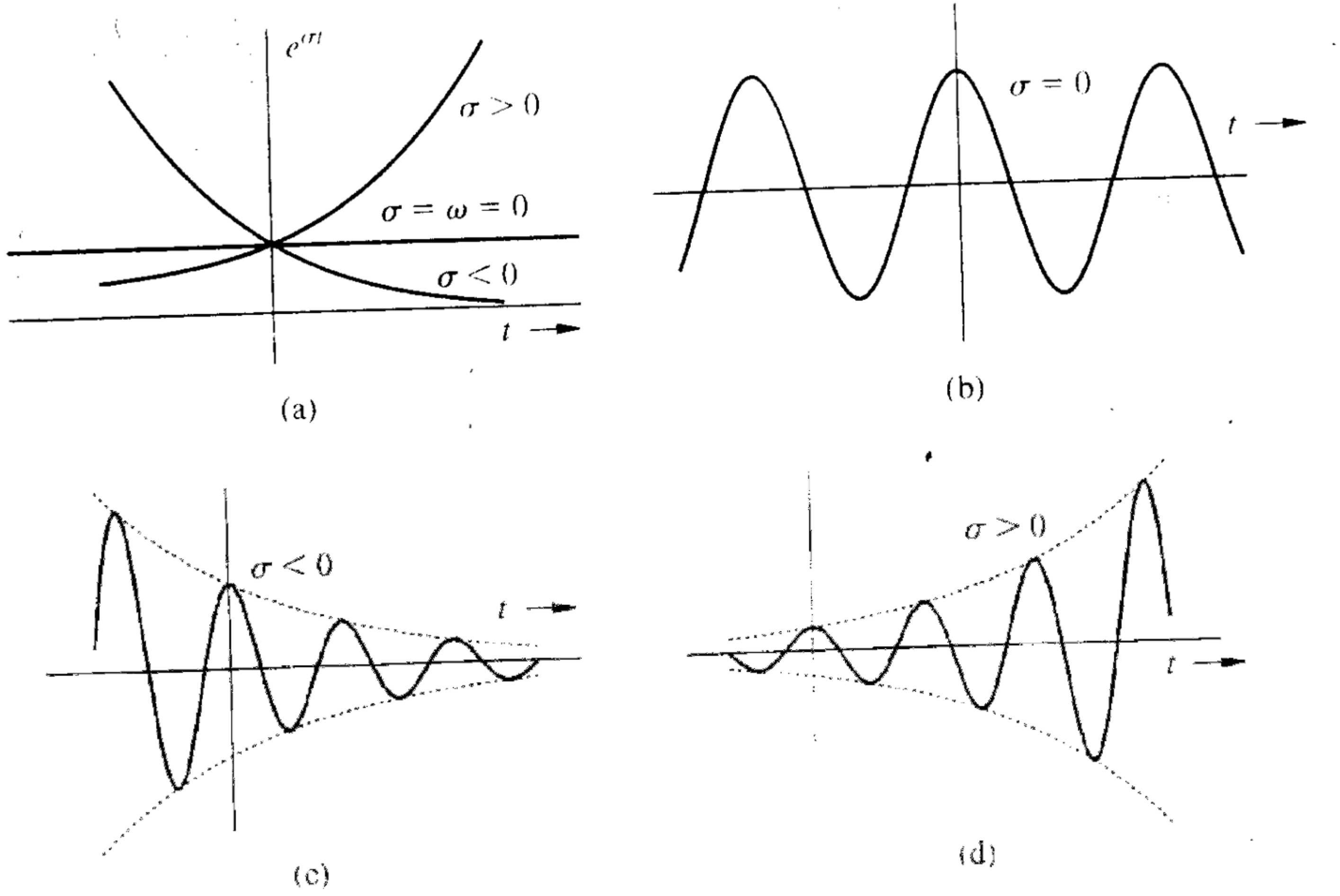


Figure 1.21 Sinusoids of complex frequency $\sigma + j\omega$.

Funções Pares e Ímpares (i)

- **Definições:**

  Uma função par é definida como $x_e(t) = x_e(-t)$

  Uma função impar é definida como $x_o(t) = -x_o(-t)$

  – Uma função par é simétrica com respeito ao eixo vertical enquanto que uma função ímpar é assimétrica.

- **Conteúdo:**
  – Propriedades de Funções Pares e Ímpares;
  – Componentes Pares e Ímpares de um sinal.

Funções Pares e Ímpares (ii)

- **Propriedades**
  - Multiplicando função par por uma ímpar tem-se função ímpar.
  - Multiplicando duas funções ímpares tem-se função par.
  - Multiplicando duas funções pares tem-se função par.
  - Área

    Para a função par: $\int_{-a}^{a} x_e(t)dt = 2\int_{0}^{a} x_e(t)dt$

    Para a função ímpar: $\int_{-a}^{a} x_o(t)dt = 0$

    - Estes resultados são válidos sob a hipótese que não há impulso ou suas derivadas na origem.

Funções Pares e Ímpares (iii)

- **Componentes**
  - Qualquer sinal $x(t)$ pode ser expresso como um somatório de funções pares e ímpares porque:

$$x(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) - \frac{1}{2}x(-t) \therefore$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] + \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right] = x_e(t) + x_o(t)$$

Expressão verdadeira se o 1^0 componente for par e o 2^0 for ímpar.

Por exemplo, seja $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right]$$

Funções Pares e Ímpares (iv)

- **Exemplo:**

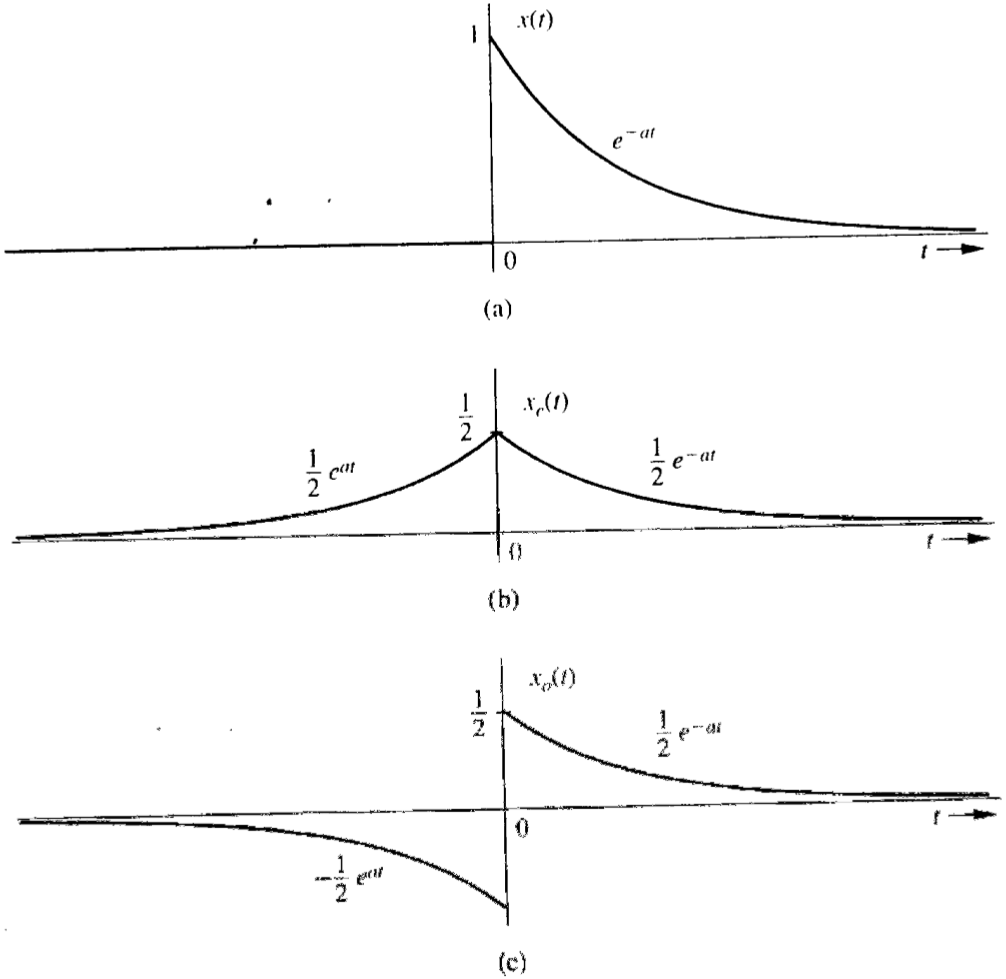


Figure 1.24 Finding even and odd components of a signal.

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right]$$

Funções Pares e Ímpares (v)

- **Exemplo:** Encontre os componentes pares e ímpares

$$x(t) = e^{jt} = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[e^{jt} + e^{-jt}\right] = \cos t$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[e^{jt} - e^{-jt}\right] = j\,\mathrm{sen}\,t$$

Sistemas (i)

- **Introdução**
  - Um sistema é usado para modificar ou extrair informações adicionais de um sinal.
    - Um sistema físico é formado por um conjunto de componentes interconectados caracterizados por suas relações terminais (relação entre entrada e saída).
    - Um sistema é regido por “leis” derivadas das interconexões (e.g., circuito elétrico).
    - O modelo matemático descreve a relação entre entrada e saída baseada nas leis mencionadas.
    - Um sistema pode ser esquematicamente representado por um retângulo com informações sobre suas entradas e saídas.
    - Áreas de estudo: modelagem, análise e projeto.

Sistemas (ii)

- **Introdução**

MASTER 6

– Exemplo de sistema:

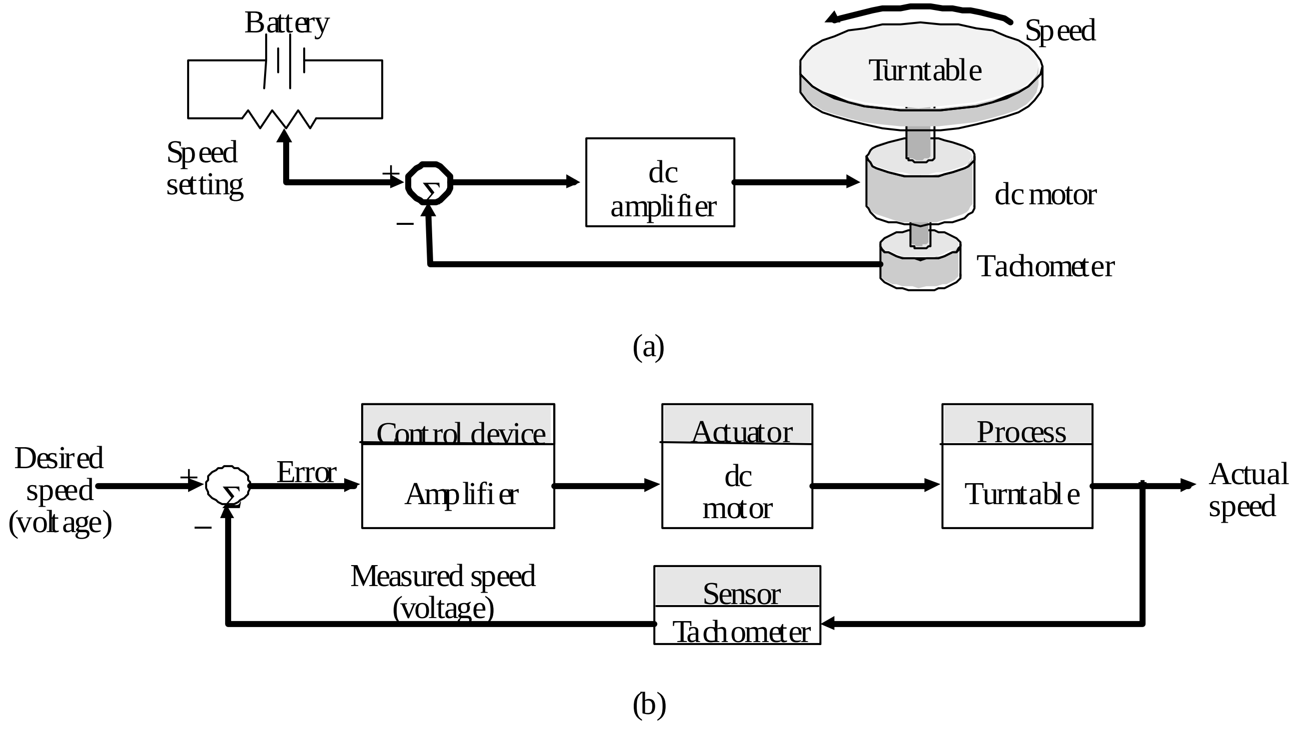


Figure 1.21 (a) Closed-loop control of the speed of a turntable (b) Block diagram model

Classificação de Sistemas (i)

- **Sistemas Lineares e não Lineares**
- **Sistemas de Parâmetros Constantes e de Parâmetros Variáveis no Tempo**
- **Sistemas Instantâneos (sem Memória) e Dinâmicos (com Memória)**
- **Sistemas Causais e não Causais**
- **Sistemas Contínuos e Discretos no Tempo**
- **Sistemas Analógicos e Digitais**
- **Sistemas Inversíveis e não Inversíveis**
- **Sistemas Estáveis e Instáveis**

Classificação de Sistemas (ii)

- **Quantidade de Entradas e Saídas de um Sistema**
  - Os sistemas aqui discutidos podem ser definidos de acordo com a relação entre excitação e sua resposta, entrada e saída ou causa e efeito. Para tal, serão considerados sistemas que podem ter entradas e saídas simples ou múltiplas.
  - A relação entre o número de entradas e saídas divide os sistemas nos seguintes grupos:
    - (i) <u>SISO</u> (single-input single-output);
    - (ii) <u>MIMO</u> (multiple-input multiple-output);
    - (iii) <u>SIMO</u> (single-input multiple-output);
    - (iv) <u>MISO</u> (multiple-input single-output).
  - As próximas discussões valem para qualquer tipo de sistema embora sejam apresentadas para sistemas SISO.

Classificação de Sistemas (iii)

- **Sistemas Lineares e não Lineares**

Seja um sistema descrito por $x(t) \rightarrow y(t), \quad t \geq t_0$

Ele é linear se possui a propriedade da superposição:

$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \rightarrow k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$

onde superposição = aditividade + homogeneidade

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t), \quad t \geq t_0$

$kx(t) \rightarrow ky(t), \quad t \geq t_0$

Classificação de Sistemas (iv)

- **Sistemas Lineares e não Lineares:** Exemplo

O sistema abaixo é linear?

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

Considere duas instâncias deste sistema :

$$\frac{dy_1}{dt} + 3y_1(t) = x_1(t) \quad \text{e} \quad \frac{dy_2}{dt} + 3y_2(t) = x_2(t)$$

Multiplicando a primeira equação por k_1 e a segunda por k_2 :

$$\frac{d}{dt}\left[k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)\right] + 3\left[k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)\right] = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

Classificação de Sistemas (v)

- **Sistemas Lineares e não Lineares**
  - A conseqüência direta do princípio da superposição:

    Para entrada nula, a saída do sistema é resposta de entrada zero

    $$x(t_0) = 0 \Rightarrow y(t) = y_{ez}(t)$$

    Para estado inicial nulo, tem-se resposta de estado-zero

    $$\text{condições iniciais} = 0 \Rightarrow y(t) = y_{ez}(t)$$

  - Na natureza a maioria dos sistemas são não–lineares. Estes podem ser aproximados por sistemas lineares para partes do seu domínio.

Classificação de Sistemas (vi)

- **Sistemas Invariante no Tempo e Variante no Tempo**

$$S:(x(t)) \rightarrow y(t); \quad \Delta(T):(y(t)) \rightarrow y_{SD}(t-T)$$

$$\Delta(T):(x(t)) \rightarrow x(t-T); \quad S:(x(t-T)) \rightarrow y_{DS}(t-T)$$

– Sistema Invariante no Tempo: É definido como aquele cujos parâmetros não variam ao longo do tempo, por isto pode ser chamado de sistema de parâmetros constantes.

  - A saída é a mesma se aplicada um atraso na entrada ou na saída do sistema (Figura 1.28).

$$y_{SD}(t-T) = y_{DS}(t-T)$$

– Sistema Variante no Tempo: Os parâmetros descritores do sistema são variantes no tempo.

$$y_{SD}(t-T) \neq y_{DS}(t-T)$$

Classificação de Sistemas (vii)

- **Sistemas Invariante e Variante no Tempo**

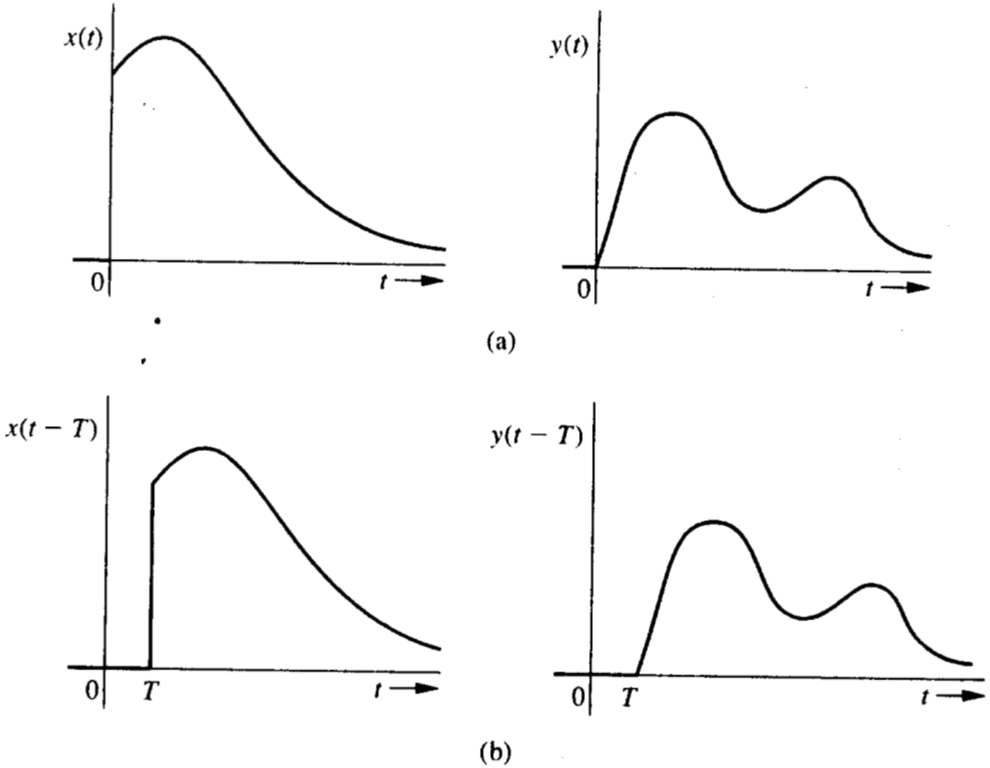
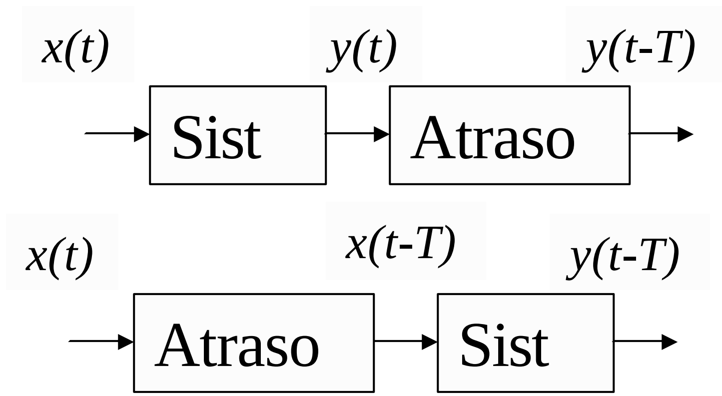


Figure 1.28 Time-invariance property.



Classificação de Sistemas (viii)

- **Sistemas Instantâneos e Dinâmicos**
  - Sistema Instantâneo: É aquele no qual a saída em qualquer instante de tempo depende apenas da entrada neste instante de tempo. Este sistema é chamado de sistema sem memória.
    - Sistema sem memória; Condições iniciais sempre nulas.
  - Sistema Dinâmico: É aquele que a saída depende da entrada atual e da história do sistema (sistema com memória).
    - Sistema com memória: Condições iniciais pode ser diferentes de zero.
    - Um sistema cuja saída depende de informações dos últimos T instantes de tempo é chamado sistema de memória finita.

Classificação de Sistemas (ix)

- **Sistemas Causal e Não-causal**
  - Sistema Causal: Um sistema é causal se a saída em algum instante *to* depende apenas da entrada para o tempo anterior a *to*. Chama-se sistema físico ou não-antecipativo. Logo, a saída depende apenas dos valores de entrada presentes e passados.
    - Qualquer sistema do mundo real que opere em tempo real, tem que ser causal.
  - Sistema Não-causal: É um sistema que viola a condição de causalidade. Pode-se chamar sistema antecipativo.
    - Usabilidade de sistemas Não-causais:
      - Sistemas com variáveis independentes diferentes do tempo (e.g., espaço);
      - Alguns sistemas em processamento de sinais (e.g., sinais de fala têm todos os dados de entrada pré-gravados.

Classificação de Sistemas (x)

- **Sistemas Causal e Não-causal** - Exemplo
  - Entrada: $x(t) = u(t)$

    Saída Não-causal: $y(t) = x(t\text{-}2)+x(t+2)$ – fisicamente impossível

    Realização do sistema Não-causal : $y(t) = y(t\text{-}2)=x(t)+x(t\text{-}4)$

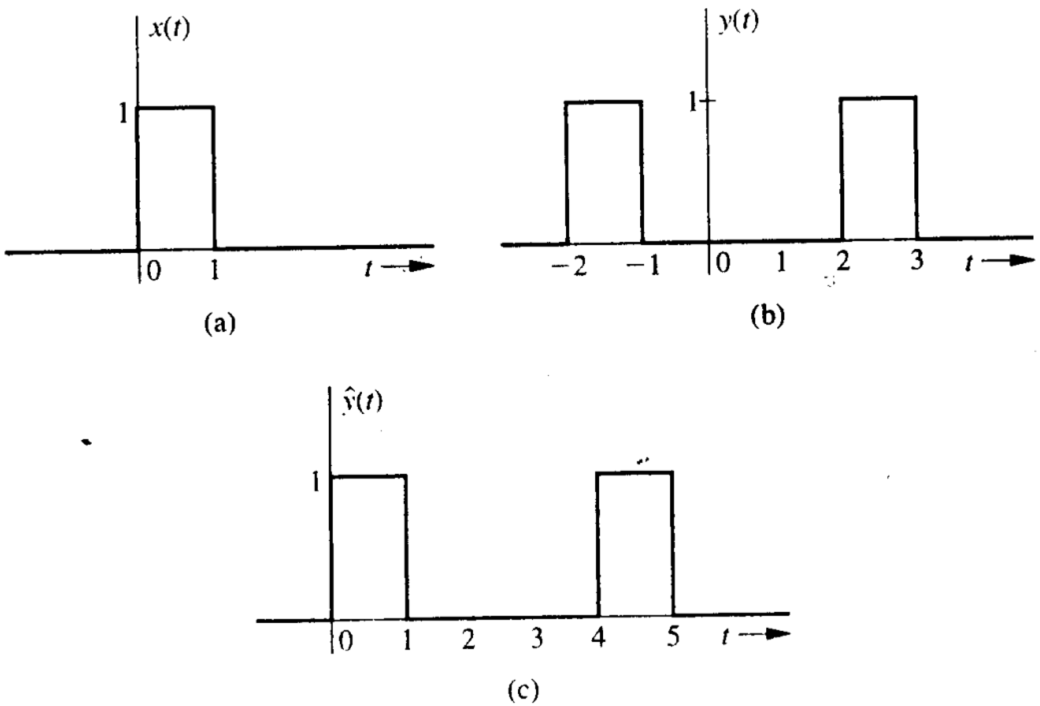


Figure 1.30 A noncausal system and its realization by a delayed causal system.

Classificação de Sistemas (xi)

- **Sistemas Contínuo no Tempo e Discreto no Tempo**
  - Sistema Contínuo no Tempo: É aquele cujos sinais de entrada e saída são contínuos no tempo (definidos ou especificados para um intervalo contínuo de tempo).
    - Exemplo: O controle de um elevador.
  - Sistema Discreto no Tempo: É aquele cujos sinais de entrada e saída são discretos no tempo (definidos ou especificados para instantes discretos de tempo).
    - Exemplo: Um computador digital.
    - São exemplos de sinais discretos: estudos populacionais, problemas de amortização, modelos de renda nacional, rastreamento por radar, sinais contínuos amostrados.

Classificação de Sistemas (xii)

- **Sistemas Contínuo no Tempo e Discreto no Tempo** - Exemplo

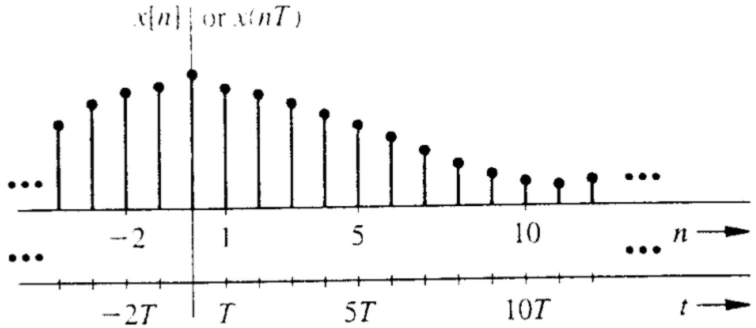


Figure 1.31 A discrete-time signal.

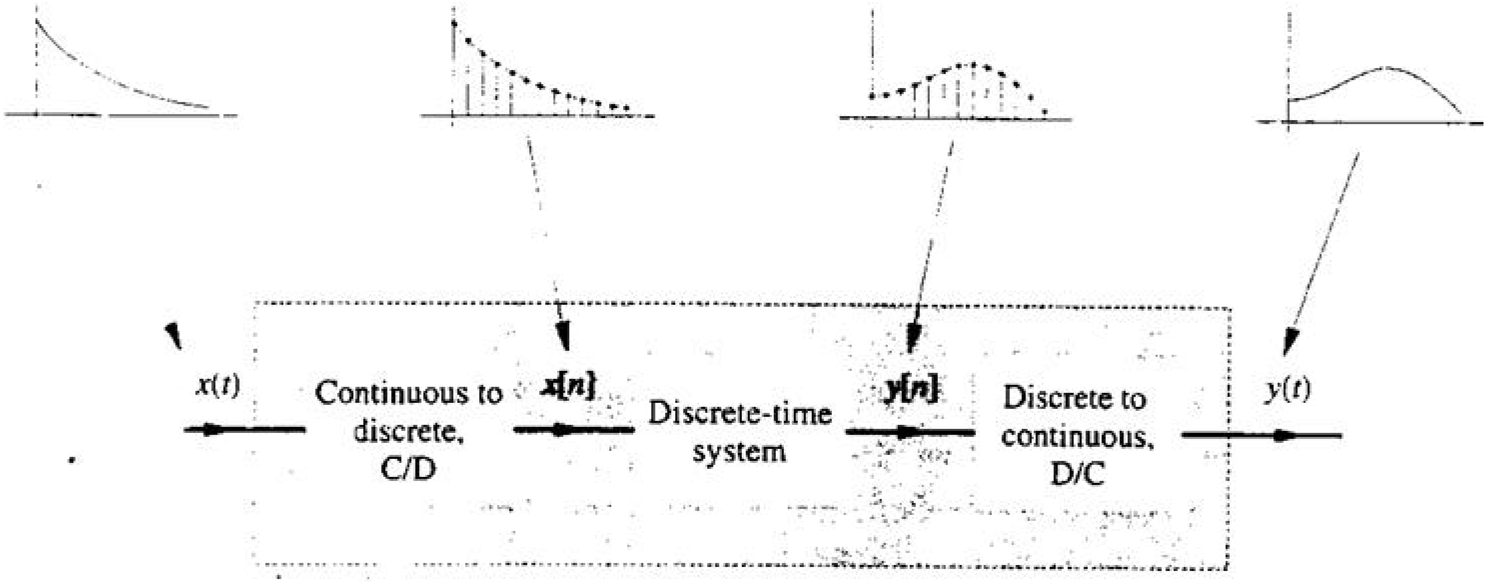


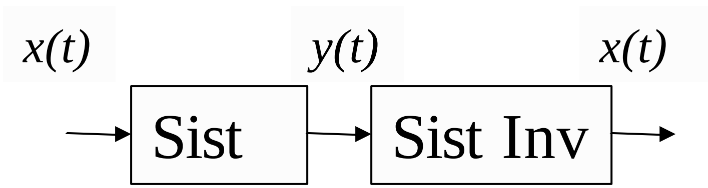
Figure 1.32 Processing continuous-time signals by discrete-time systems.

Classificação de Sistemas (xiii)

- **Sistemas Analógico e Digital**
  - Sistema Analógico: É aquele em que seus sinais de entrada e saída são analógicos.
  - Sistema Digital: É aquele em que seus sinais de entrada e saída são digitais.
- **Sistemas Estável e Instável**
  - Estabilidade é definida como interna ou externa, assim tem-se:
    - Estabilidade Externa (BIBO): Se toda entrada limitada no sistema resulta em uma saída também limitada.
    - Estabilidade Interna: Relacionada a variáveis internas ao sistema que devem possuir valore limitados e convergentes.
  - Um sistema é dito instável se a condição de estabilidade não for atendida.

Classificação de Sistemas (xiv)

- **Sistemas Inversível e Não-inversível**
  - Sistema Inversível: É aquele em que se pode obter a entrada a partir de sua saída.
    - Demanda relação entrada-saída biunívoca.
    - A operação inversa é obtida pelo sistema inverso. É útil quando sinais são distorcidos durante processamento.
      - Exemplo: um integrador ideal e um derivador ideal.



  - Sistema Não-inversível: É aquele em não é possível obter a entrada a partir de sua saída.
    - Exemplo: Algumas entradas diferentes que resultam em uma mesma saída como ocorre em um retificador.

Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (i)

– Descrição em termos de medições da entrada e da saída nos seus terminais. Apresenta-se expressões para alguns tipos de sistemas.

- **Sistemas Elétricos**

– Em geral, usa-se as relações tensão-corrente de cada elemento do sistema com restrições e propriedades advindas da interconexão de vários componentes do sistema (Leis de Kirchhof).

$$\text{Notação compacta}: \frac{d^i y(t)}{dt^i} = D^i y(t);$$

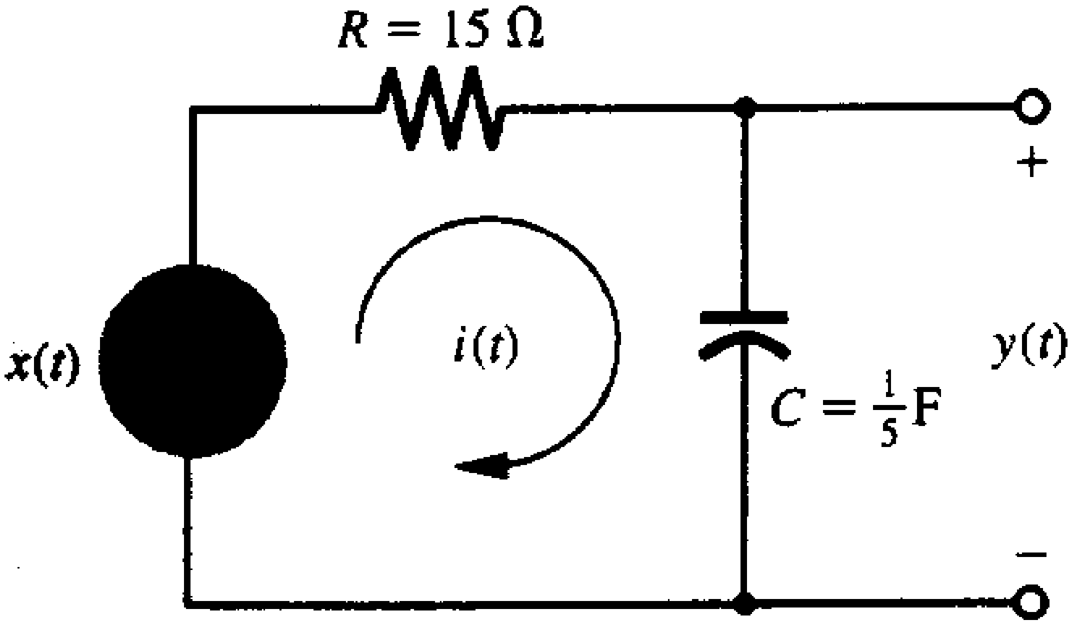
$$\text{Exemplo}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \therefore \left(D^2 + 3D + 2\right)y(t) = Dx(t)$$

$$\text{Operador diferencial é o inverso do operador integral}: \int_{-\infty}^{t} y(t)\,dt = \frac{1}{D}y(t),$$

recomenda-se usar equações diferenciais pois D e $1/D$ não são comutáveis.

Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (ii)

- **Sistemas Elétricos**: Exemplo
  - Encontre equação descrevendo o sistema *RC*:



Lei de Kirchhoff de tensões :

$$\sum_i v_i(t) = 0, \text{ em um loop.}$$

$$x(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t\,)dt = 0 \therefore$$

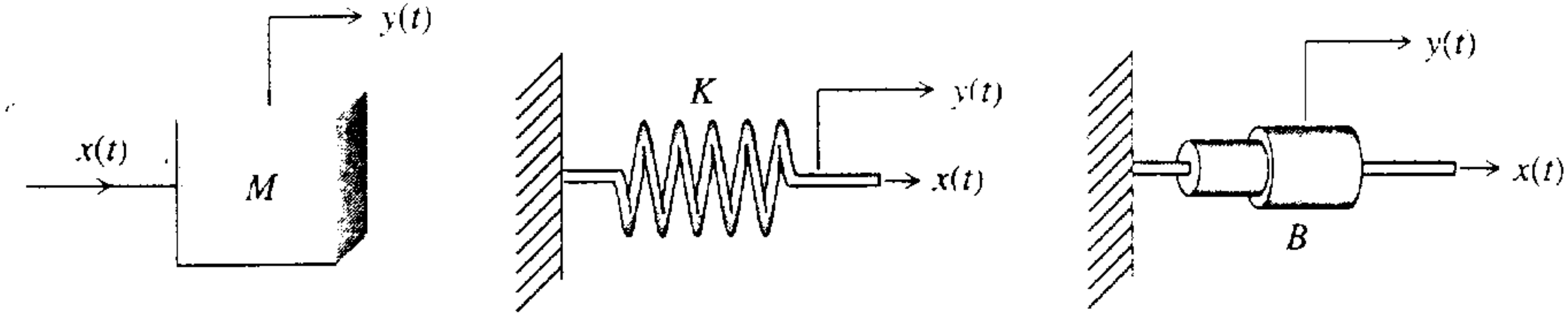
$$x(t) = 15i(t) + 5\int_{-\infty}^{t} i(t\,)dt \therefore$$

$$x(t) = 15i(t) + \frac{5}{D}i(t) = x(t) \therefore$$

$$Dx(t) = 15(D+5)i(t)$$

Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (iii)

- **Sistemas Mecânicos**: Comportamento (movimento) em 1D.
  - Sistemas Translacionais: Elementos básicos:



(a) (b) (c)

Para massa M : $x(t) = M\ddot{y}(t) = M\left(d^2 y(t)\big/dt^2\right) = MD^2 y(t);$

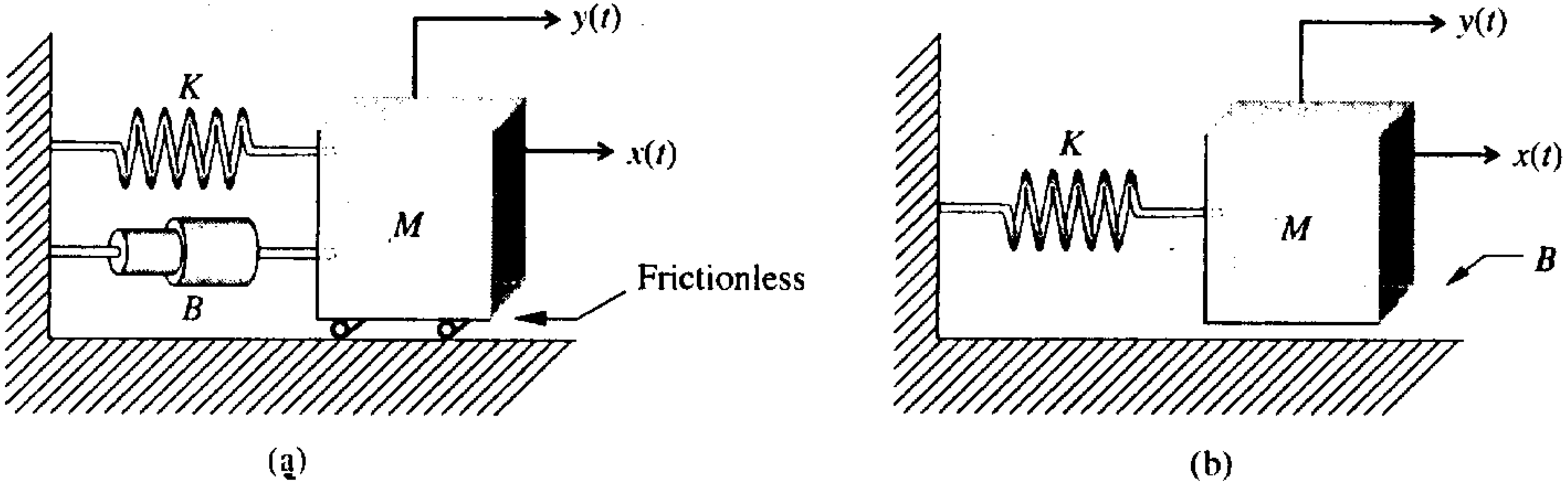
Para força $x(t)$: $x(t) = Ky(t);$

Para freio amortecedor B: $x(t) = B\dot{y}(t) = B\left(dy(t)\big/dt\right) = BDy(t)$

onde M, K, e B são respectivamente a massa, o coeficiente de rigidez da mola e o coeficiente de amortecimento.

Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (iv)

- **Sistemas Mecânicos**: Exemplo de Sistema Translacional:
  - Encontre equação descrevendo a relação entrada-saída *RC*:



Os sistemas equivalentes das figurs (a) e (b):

$M\ddot{y}(t) = -B\dot{y}(t) - Ky(t) + x(t),$ ou,

$\left(MD^2 + BD + K\right)y(t) = x(t),$

Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (v)

- **Sistemas Mecânicos**: Comportamento (movimento) em 1D.
  - Sistemas Rotacionais: Movimento do corpo em torno de um dado eixo. As variáveis são posição e velocidade angular, e torque. Os elementos do sistema são massa rotacional (ou momento de inércia), molas rotacionais e freio amortecedor rotacional.

O torque (t) pode ser escrito de diferentes maneiras:

$$t(t) = J\ddot{q}(t) = J\left(d^2 q(t) \big/ dt^2\right) = JD^2 q(t);$$

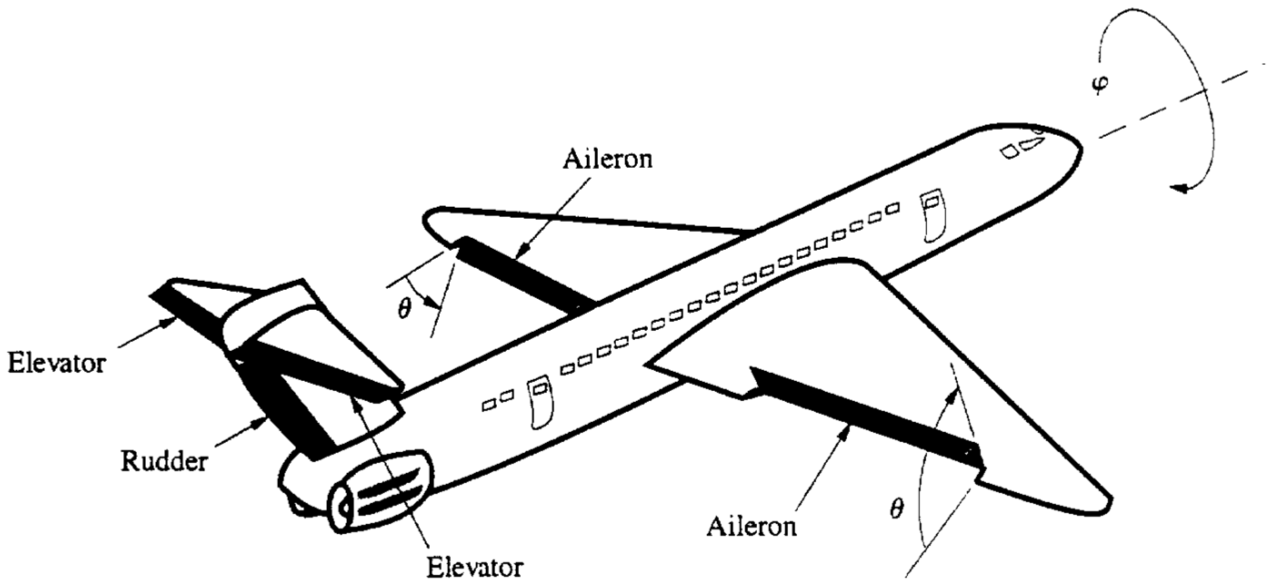
$$t(t) = Kq(t);$$

$$t(t) = B\dot{q}(t) = BDq(t)$$

onde J, K, e B são respectivamente massa (momento de inércia), coeficientes rotacionais de rigidez da mola e de amortecimento.

Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (vi)

- **Sistemas Mecânicos**: Controle de altitude (elevadores, leme e *ailerons*).



O ângulo de giro j é função das deflexões q nos "ailerons":

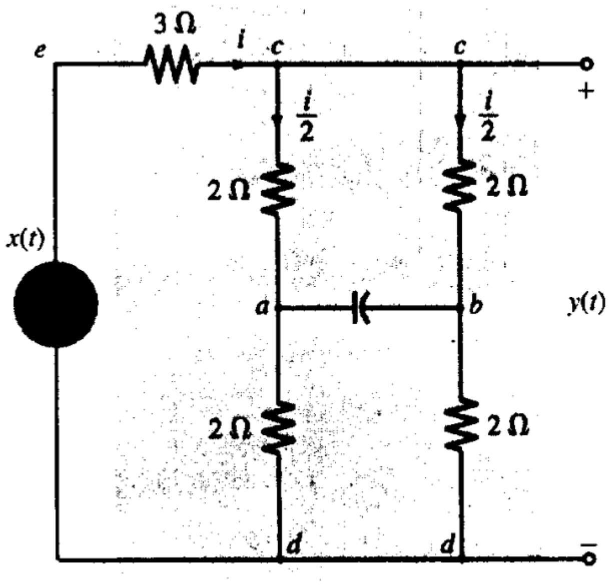
$$J\ddot{j}(t) = cq(t) - B\dot{j}(t) \qquad \text{ou} \qquad \left(JD^2 + BD\right)j(t) = cq(t),$$

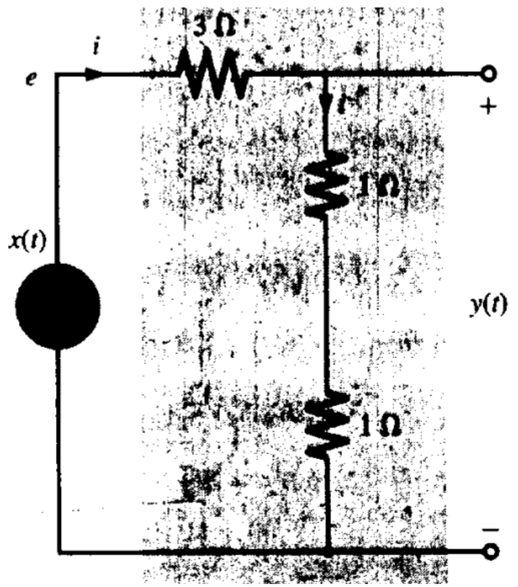
re - escrevendo - se em função da velocidade angular $\dot{j}(t) = w(t)$:

$$J\dot{w}(t) + Bw(t) = cq(t) \qquad \text{ou} \qquad \left(JD + B\right)w(t) = cq(t),$$

Descrição Interna e Externa de Sistemas (i)

- **Descrição Externa de um Sistema**:
  - É aquela obtida a partir de medidas nos terminais externos deste sistema. Descrição entrada-saída é uma descrição deste tipo.
- **Descrição Interna de um Sistema** :
  - É aquela capaz de prover informação sobre todos os sinais no sistema. Descrição por variáveis de estado é um exemplo.
  - Exemplo: Não encontra saída correta para capacitor com carga inicial e entrada nula (pois a ddp é nula).





Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 1.1-1 até 1.1-6, 1.1-9.
  - 1.2-1 até 1.2-6.
  - 1.3-1 até 1.3-3, 1.3-5 até 1.3-6.
  - 1.4-1, 1.4-2, 1.4-4 até 1.4-6, 1.4-10.
  - 1.5-1, 1.5-2, 1.5-7, 1.5-8, 1.5-11.
  - 1.7-1 até 1.7-3, 1.7-7 até 1.7-9, 1.7-11, 1.7-12.
  - 1.8-1, 1.8-3 até 1.8-6.