

ES 413 Sinais e Sistemas

Fundamentos Matemáticos

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo

Depto. of Sistemas de Computação

Centro de Informática - UFPE

Introdução

Conteúdo

- **Números Complexos**
- **Sinais Senoidais**
- **Plotagem de Sinais**
- **Expansão em Frações Parciais**
- **Vetores e Matrizes**
- **Miscelânea**

Números Complexos (i)

- **História do Sistema Numérico**

- Inicialmente considerava-se apenas números naturais (inteiros positivos) para enumerar objetos e organismos no dia a dia (e.g., crianças, pedras).
- Inclusão de frações para necessidade de medir continuamente quantidades variáveis advindas da agricultura (e.g., comprimento de um campo, peso de mercadorias). Os egípcios e os babilônicos sabiam utilizar frações.
- Pitágoras descobriu os números irracionais que só foram incluídos no sistemas de números mais tarde com Descartes.
- Os números negativos foram entendidos por hindus medievais (em meados do século 10). Foi reconhecido a existência de dois valores de raiz quadrada para um número positivo. Mais tarde, em Florença e Veneza renascentistas, o sistema bancário fez uso de números negativos para retiradas maiores que depósitos.
- Na época de Descartes e Newton os números imaginários vieram a ser incluídos no sistema numérico.
 - Em 1777 o matemático suíço Leonhard Euler introduziu notação i que depois virou j devido à notação padrão de corrente em Eng. Elétrica.

Números Complexos (ii)

- **Definição de Número Imaginário**

$$j^2 = -1$$

e

$$\sqrt{-1} = \pm j$$

Por exemplo,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \pm 2j$$

- **Origens de Números Complexos**

- Aceitos por matemáticos em passo intermediário no método para solucionar equação cúbica (Gerolamo Cardano, 1545):

$x^3 + ax + b = 0$, cuja solução é:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Para, $a = -15, b = -4$; tem-se $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$

Números Complexos (iii)

- **Utilidade de um Número Complexo**

- Problemas do mundo real devem iniciar a partir de números reais e terminar neles também, contudo, os cálculos para obter os resultados podem seguir “atalhos” quando se utiliza números complexos.

- **Álgebra de Números Complexos**

- Notação de números complexos:

$$z = a + jb, \quad \text{onde} \begin{cases} \text{parte real (abscissa)} : & \text{Re } z = a \\ \text{parte imaginária (ordenada)} : & \text{Im } z = b \end{cases}$$

Em coordenadas polares tem -se :

$$a = r \cos q$$

$$b = r \sin q; \quad \text{assim,}$$

$$z = a + jb = r \cos q + j r \sin q \therefore$$

$$z = r (\cos q + j \sin q)$$

Números Complexos (iv)

- **Álgebra de Números Complexos**

- A fórmula de Euler determina:

$$e^{jq} = \cos q + j \operatorname{sen} q,$$

Prova - se através da série de Maclaurin para expandir os termos :

$$e^{jq} = 1 + jq + \frac{(jq)^2}{2!} + \frac{(jq)^3}{3!} + \frac{(jq)^4}{4!} + \frac{(jq)^5}{5!} + \frac{(jq)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + jq - \frac{q^2}{2!} - j\frac{q^3}{3!} + \frac{q^4}{4!} + j\frac{q^5}{5!} - \frac{q^6}{6!} - \dots$$

$$\cos q = 1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \frac{q^8}{8!} - \dots$$

$$\operatorname{sen} q = q - \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} - \frac{q^7}{7!} + \dots$$

Números Complexos (iv.a)

- **Álgebra de Números Complexos**

Série de Maclaurin é a expansão da série de Taylor em torno de zero.

Esta série recebeu estenome devido ao matemático escocês MacLaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Exemplos de séries de MacLaurin

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

Números Complexos (v)

- **Álgebra de Números Complexos**

- A fórmula de Euler determina:

$$e^{jq} = \cos q + j \operatorname{sen} q,$$

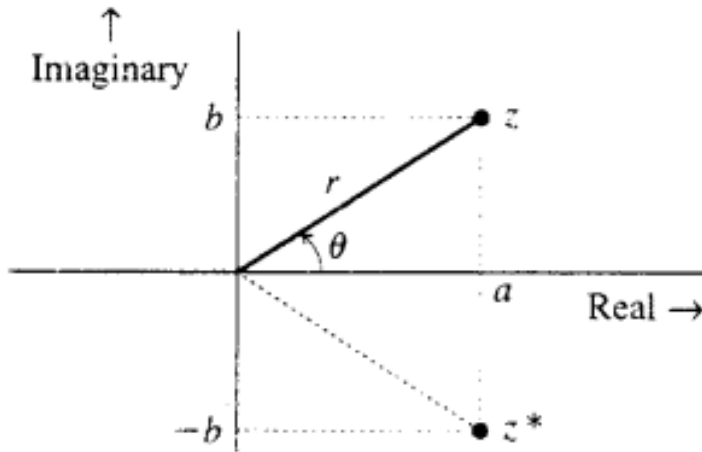


Figure B.2 Representation of a number in the complex plane.

Números Complexos (vi)

- **Álgebra de Números Complexos**

- Tem-se então as equivalências:

$$e^{jq} = \cos q + j \operatorname{sen} q,$$

$$z = a + j b \therefore z = r e^{jq}$$

Número complexo pode ser expresso em forma cartesiana ou polar :

$$a = r \cos q, \quad b = r \operatorname{sen} q;$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad q = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

- Em termos de magnitude e ângulo tem-se:

$$z = |z| e^{j\angle z}, \quad \text{onde } |z| = r, \quad \angle z = q,$$

Como consequência :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{jq}} = \frac{1}{r} e^{-jq} = \frac{1}{|z|} e^{-j\angle z}$$

Números Complexos (vii)

- **Álgebra de Números Complexos**

- Definição de conjugado de um número complexo imagem de z com respeito ao eixo horizontal):

$$z^* = a - jb = r e^{-jq} \therefore z^* = |z| r e^{-j\angle z}$$

- A soma de um número complexo e seu conjugado é um número real:

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2 \operatorname{Re} z$$

- O produto de um número complexo e seu conjugado é também um número real:

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + j ab - j ab - b^2(j)(-j) \therefore$$

$$zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Números Complexos (viii)

- **Álgebra de Números Complexos**

- No plano complexo, um número complexo é representado por um ponto distando r da origem, formando um ângulo θ com o eixo horizontal. Esta maneira é válida para representar casos particulares tais como:

$$e^{\pm jnp} = -1, \quad n \text{ é um inteiro ímpar}$$

$$e^{\pm j2np} = 1, \quad n \text{ é um inteiro}$$

$$e^{jp/2} = j,$$

$$e^{-jp/2} = -j,$$

de modo geral pode - se dizer que

$$e^{\pm jnp/2} = \begin{cases} \pm j, & \text{para } n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ \mp j, & \text{para } n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Lembrando que $a = r \cos q, b = r \sin q$

Números Complexos (ix)

- Álgebra de Números Complexos

- Gráfico dos pontos particulares:

$$e^{\pm jnp} = -1; \quad e^{\pm j2np} = 1; \quad e^{jp/2} = j; \quad e^{-jp/2} = -j$$

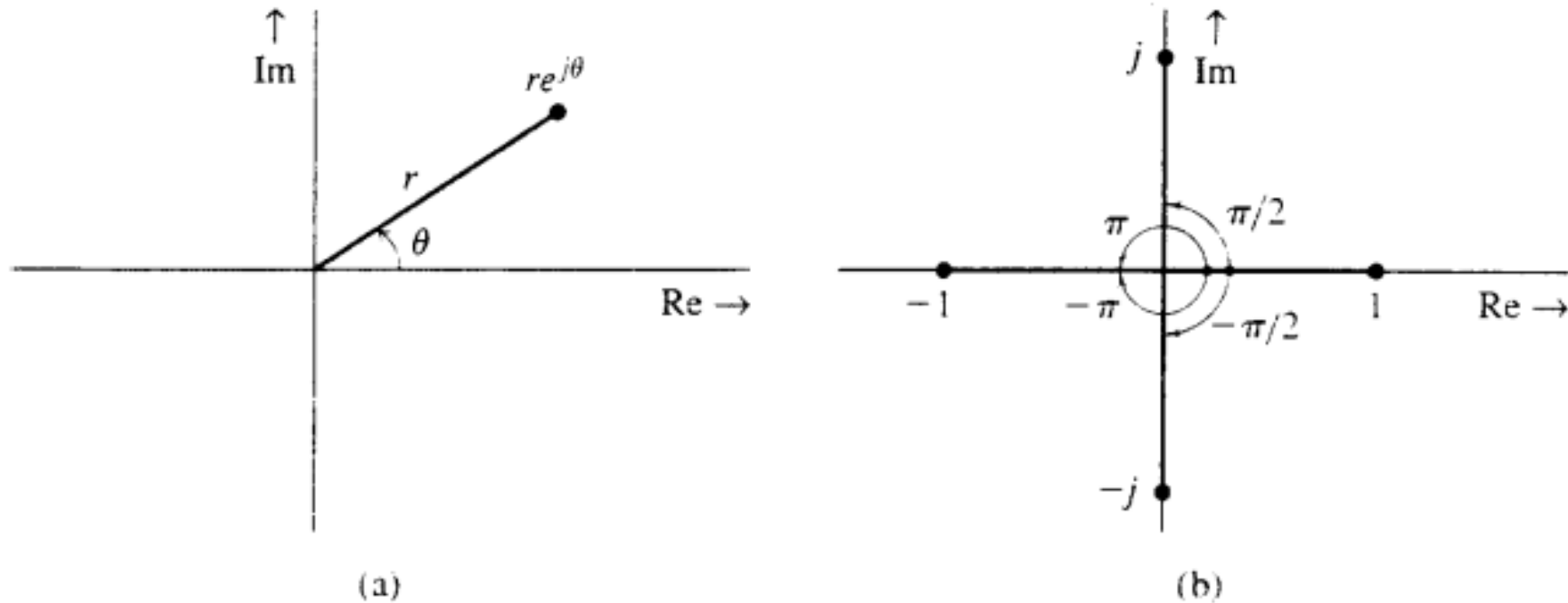


Figure B.3 Understanding some useful identities in terms of $re^{j\theta}$.

Números Complexos (x)

- **Álgebra de Números Complexos**

- Pode-se também determinar o limite abaixo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a+jw)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{at} \cdot e^{jwt}) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases}$$

$$\text{pois } |e^{jwt}| = |re^{jq}| = 1, \quad \text{para } r = 1$$

Exemplos : Encontre a outra representação para

(a) $z_1 = 2 + j3$

$$\left. \begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.605551, \\ q = \angle z &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.3^\circ \end{aligned} \right\}, z_1 = 3.605551 e^{j56.3^\circ}$$

(b) $2e^{jp/3}$

$$z_2 = r \cos q + j r \sin q = 2 \cos(p/3) + j 2 \sin(p/3) = 1 + j\sqrt{3}$$

Números Complexos (xi)

- **Álgebra de Números Complexos**

- Operações Aritméticas:

Adição e subtração devem utilizar coordenadas cartesianas

$$z_1 = 5e^{j53.1} = 3 + j4, \quad z_2 = \sqrt{13}e^{j56.3} = 2 + j3, \quad \text{então}$$

$$z_1 + z_2 = (3 + j4) + (2 + j3) = (3 + 2) + j(4 + 3) = 5 + j7$$

Multiplicação e divisão são compatíveis com ambas representações

$$z_1 = r_1 e^{jq_1}, \quad z_2 = r_2 e^{jq_2}$$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{jq_1})(r_2 e^{jq_2}) = r_1 r_2 (e^{j(q_1 + q_2)})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(r_1 e^{jq_1})}{(r_2 e^{jq_2})} = \frac{r_1}{r_2} (e^{j(q_1 - q_2)})$$

Números Complexos (xii)

- **Álgebra de Números Complexos**

- Potenciação e Radiciação:

Potenciação e radiciação são operações compatíveis com ambas representações, embora fique mais simples com representação polar :

Para $z = r e^{jq}$

$$z^n = (r e^{jq})^n = r^n \cdot e^{jnq}$$

$$z^{1/n} = (r e^{jq})^{1/n} = r^{1/n} \cdot e^{jq/n}$$

Formalmente há n valores para a radiciação acima

$$z^{1/n} = [r e^{jq}]^{1/n} = [r e^{j(q+2pk)}]^{1/n} = r^{1/n} \cdot e^{j(q+2pk)/n}$$

Números Complexos (xiii)

- **Álgebra de Números Complexos**

- Exemplos:

Para $z_1 = 3 + j4 = 5e^{j53.1^\circ}$ e $z_2 = 2 + j3 = \sqrt{13}e^{j56.3^\circ}$

Multiplicação (forma cartesiana):

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + j4)(2 + j3) = (6 + j8 + j9 - 12) = (-6 + j17)$$

Multiplicação (forma polar):

$$z_1 \cdot z_2 = (5e^{j53.1^\circ})(\sqrt{13}e^{j56.3^\circ}) = (5\sqrt{13})(e^{j53.1^\circ}e^{j56.3^\circ}) = 5\sqrt{13}e^{j109.4^\circ}$$

Divisão (forma cartesiana):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + j4)(2 - j3)}{(2 + j3)(2 - j3)} = \frac{18 - j1}{2^2 - (j)^2 \cdot 3^2} = \frac{18 - j1}{13} = \frac{18}{13} - \frac{j1}{13}$$

Divisão (forma polar):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5e^{j53.1^\circ})}{(\sqrt{13}e^{j56.3^\circ})} = \frac{5}{\sqrt{13}}(e^{j(53.1^\circ - 56.3^\circ)}) = \frac{5}{\sqrt{13}}(e^{-j3.2^\circ})$$

Números Complexos (xiv)

- **Álgebra de Números Complexos**

- Logaritmos:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

$$\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$$

$$a^{(z_1+z_2)} = a^{z_1} \times a^{z_2}$$

$$z^c = e^{c \ln z}$$

$$a^z = e^{z \ln a}$$

Se

$$z = (r e^{jq}) = r \cdot e^{j(q \pm 2kp)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Então

$$\ln z = \ln(r \cdot e^{j(q \pm 2kp)}) = \ln r \pm j(q \pm 2kp), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

O valor de $\ln z$ para $k = 0$ é chamado o valor principal de $\ln z$.

Sinais Senoidais (i)

- **Introdução**

- Apresentação:

Seja a expressão abaixo :

$$x(t) = C \cos(2p f_0 t + q)$$

O cosseno de um ângulo repete - se a cada $2p$, isto é :

$$\cos j = \cos(j + 2np) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Deste modo, o valor de $x(t)$ se repete para cada $1/f_0$ segundos, assim,

$$T_0 = \frac{1}{f_0}, \quad \begin{cases} f_0 & \text{é a freqüência (em hertz) da seinoideal;} \\ T_0 & \text{é o período (em segundos) da seinoideal.} \end{cases}$$

Sinais Senoidais (ii)

- **Introdução**

Re - escrevendo a expressão anterior :

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + q)$$

onde tem - se que $\begin{cases} C & \text{é a amplitude da senoidal;} \\ q & \text{é a fase (em radianos) da senoidal;} \\ \omega_0 = 2\pi f_0 & \text{é a freqüência em radianos da senoidal.} \end{cases}$

$$T_0 = 1/f_0 = 1/(\omega_0/2\pi) \therefore T_0 = 2\pi/\omega_0, \quad \text{ou ainda,}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \text{daqui em diante } \omega_0 \text{ pode ser chamado de freqüência.}$$

Dois casos especiais que merecem destaque :

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t), \quad q = 0;$$

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \pi/2) = C \cos(2\pi f_0 t), \quad q = -\pi/2$$

Sinais Senoidais (iii)

- **Introdução**

- Exemplo:

$$x(t) = C \cos \omega_0 t$$

$$x(t) = C \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - 60^\circ)$$

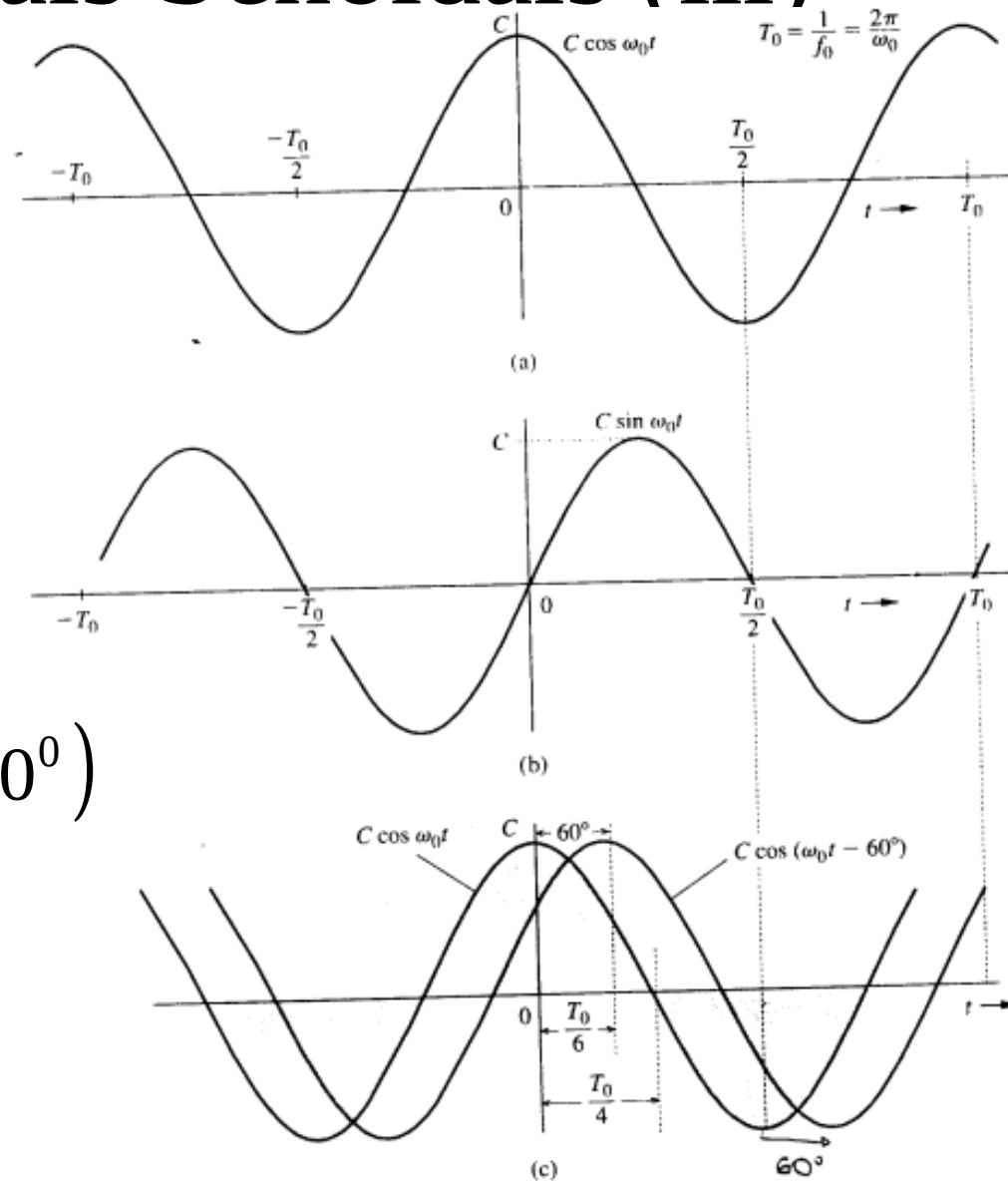


Figure B.6 Sketching a sinusoid.

Sinais Senoidais (iv)

- **Adição de Senoidais**

- Dois sinais senoidais com a mesma frequência e fases diferentes podem ser adicionados para formar uma outra senoidal com a mesma frequência.

Das relações trigonométricas, tem-se que :

$$C \cos(w_0 t + q) = C \cos q \cos w_0 t - C \sin q \sin w_0 t \therefore$$

$$C \cos(w_0 t + q) = a \cos w_0 t + b \sin w_0 t$$

onde, $a = C \cos q, \quad b = -C \sin q$

Portanto, pode-se escrever :

$$a \cos w_0 t + b \sin w_0 t = C \cos(w_0 t + q)$$

onde, $C = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad q = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)$

Sinais Senoidais (v)

- **Adição de Senoidais**

- Pode-se usar fazores para representar senoidais.

Representa - se o sinal senoidal $C \cos(\omega_0 t + q)$ por uma fasor de tamanho C e ângulo q . Logo tem - se que

$a \cos \omega_0 t$ é representado por um fasor horizontal de módulo a ($\phi = 0$).

$b \sin \omega_0 t$ é representado por um fasor vertical de módulo a ($\phi = -\pi/2$), pois $\sin \omega_0 t = \cos(\omega_0 t - \pi/2)$.

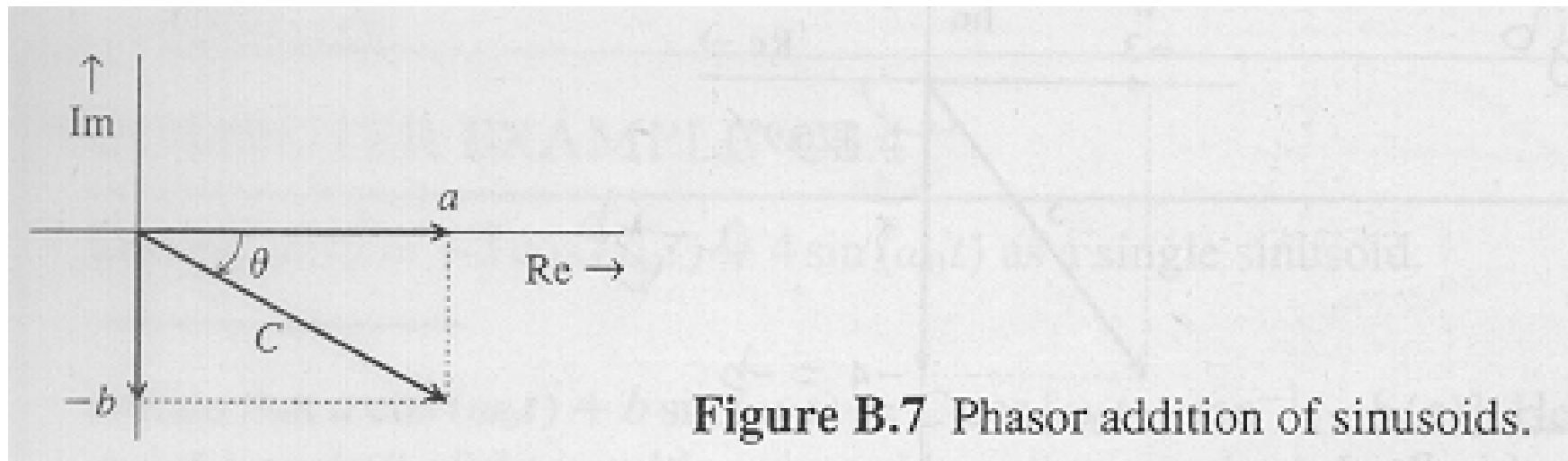


Figure B.7 Phasor addition of sinusoids.

Sinais Senoidais (vi)

- **Expressos por Exponenciais**
 - Utiliza-se a Fórmula de Euler.

$$\cos j = \frac{1}{2} (e^{jj} + e^{-jj})$$

$$\operatorname{sen} j = \frac{1}{2j} (e^{jj} - e^{-jj})$$

No sentido inverso tem-se :

$$e^{jj} = \cos j + j \operatorname{sen} j$$

$$e^{-jj} = \cos j - j \operatorname{sen} j$$

Plotagem de Sinais (i)

- **Exponenciais Monotônicas**

- Familiarizar com o traçado destes sinais comuns para sistemas:

Dois sinais que variam monotonicamente : e^{-at} , e^{at} ; $a > 0$.

Exemplo : e^{-at} ; $a = 2$, $t > 0$. Para $t_c = 1/a \Rightarrow e^{-a(1/a)} = 1/e \cong 0.37$

Constante de tempo da exponencial (t_c) para traçar gráfico (Figura 10):

- A constante de tempo é 0,5.
- A cada intervalo igual a constante de tempo, o valor de $x(t)$ cai para 37% do valor no início deste intervalo.
- Os pares formados pelos múltiplos das constantes de tempo e os valores de $x(t)$ podem ser usados para esboçar o gráfico.

Plotagem de Sinais (ii)

- **Exponenciais Monotônicas** (gráfico dos exemplos anteriores):

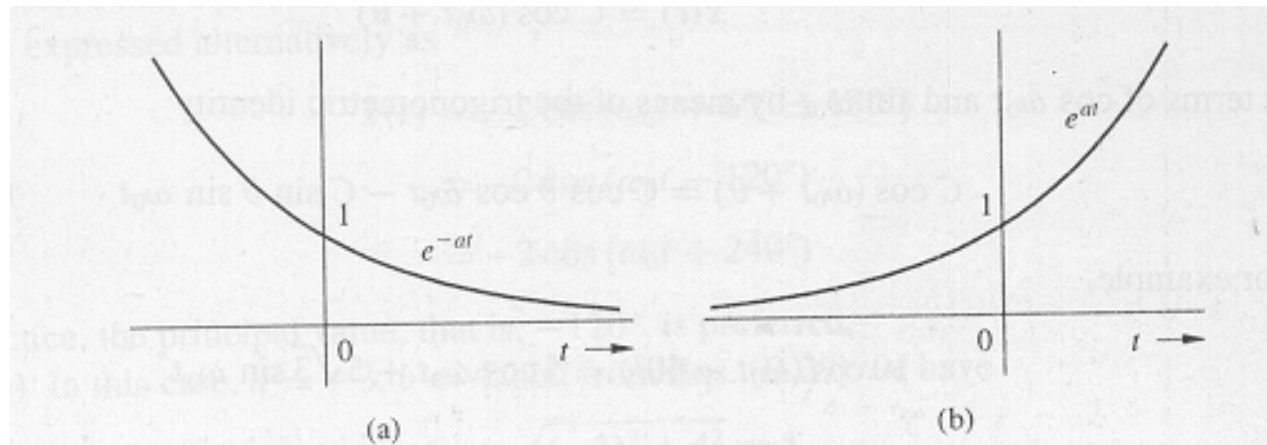


Figure B.9 Monotonic exponentials.

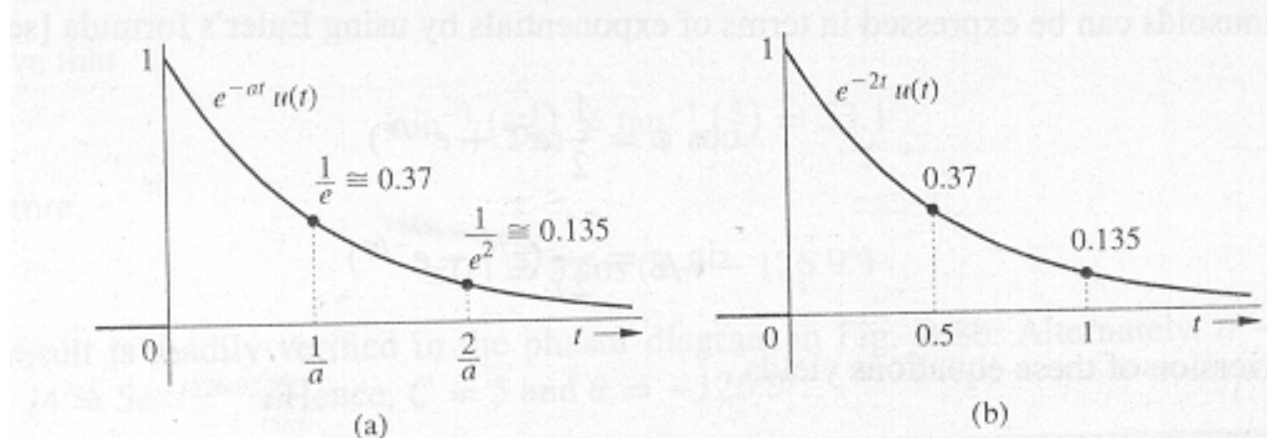


Figure B.10 (a) Sketching e^{-at} . (b) Sketching e^{-2t} .

Plotagem de Sinais (iii)

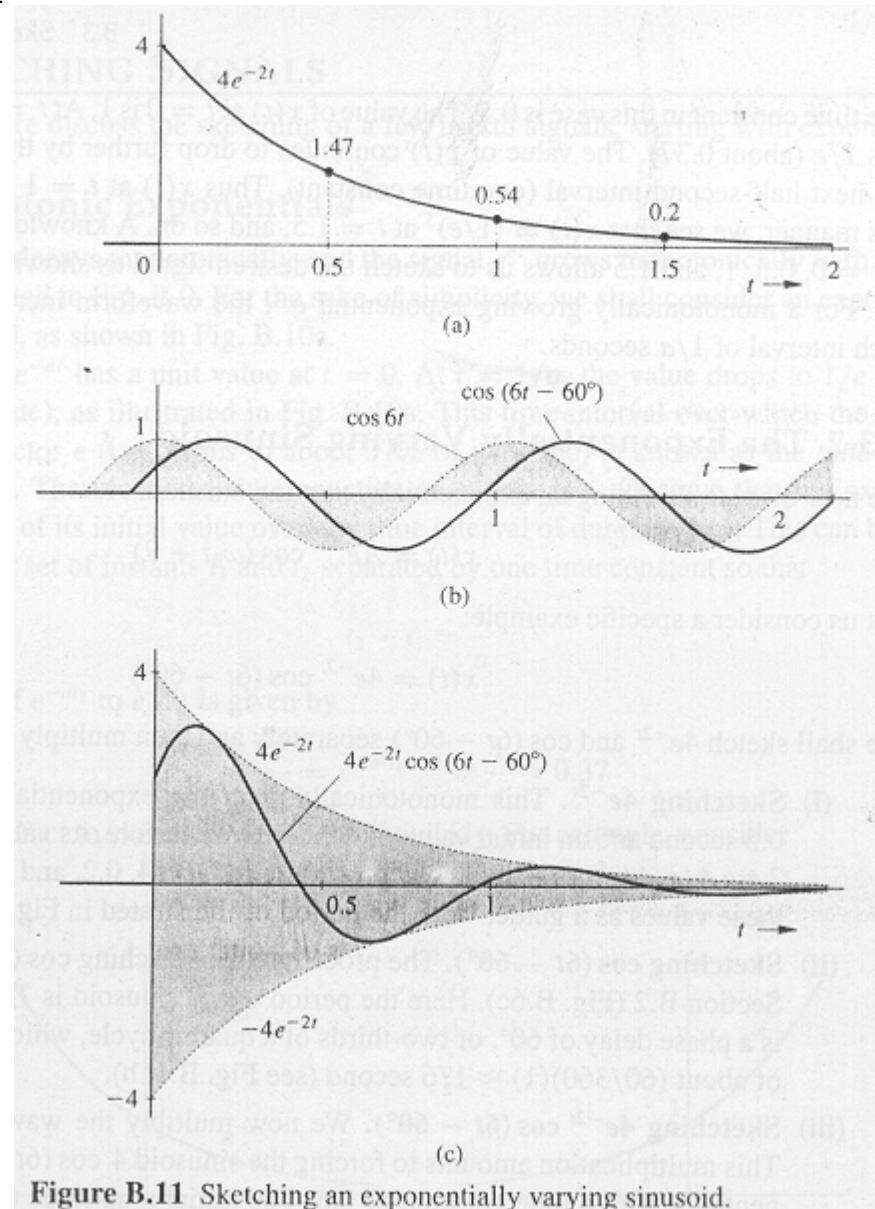
- Senoidal Variando Exponencialmente

Sinal típico :

$$x(t) = Ae^{-at} \cos(w_0 t + q).$$

Exemplo específico :

$$x(t) = 4e^{-2t} \cos(6t - \frac{p}{3}).$$



Expansão em Frações Parciais (i)

- **Principal Objetivo**

- Expandir uma função própria, ocorrendo em sistemas lineares e invariantes no tempo, em frações parciais:

- Funções, chamadas de funções racionais, são razões entre dois polinômios, expressas como:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

- A função $F(x)$ é imprópria se $m \geq n$ e própria se $m < n$.
 - Um função imprópria pode ser sempre re-escrita como a soma de um polinômio e uma função própria, por exemplo:

$$F(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 11x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 2x + 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 4x + 3}$$

Expansão em Frações Parciais (ii)

- **Método de Limpar Frações (Clearing Fractions)**
 - Função racional re-escrita como uma soma de frações parciais com coeficientes desconhecidos a serem determinados igualando-se coeficientes de potências idênticas dos dois lados.

Exemplo : Expandir a função racional :

$$F(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 6}{(x+1)(x+2)(x+3)^2} = \frac{k_1}{x+1} + \frac{k_2}{x+2} + \frac{k_3}{x+3} + \frac{k_4}{(x+3)^2}$$

multiplica - se ambos os lados pelo denominador de $F(x)$:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = k_1[(x+2)(x+3)^2] + k_2[(x+1)(x+3)^2] + k_3[(x+1)(x+2)(x+3)] + k_4[(x+1)(x+2)] \therefore$$

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = k_1(x^3 + 8x^2 + 21x + 18) + k_2(x^3 + 7x^2 + 15x + 9) + k_3(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) + k_4(x^2 + 3x + 2) \therefore$$

Expansão em Frações Parciais (iii)

- **Método de Limpar Frações (Clearing Fractions)**

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = x^3(k_1 + k_2 + k_3) + x^2(8k_1 + 7k_2 + 6k_3 + k_4) + x(21k_1 + 15k_2 + 11k_3 + 3k_4) + (18k_1 + 9k_2 + 6k_3 + 2k_4) :$$

Iguala - se os coeficientes de mesma potência :

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

$$8k_1 + 7k_2 + 6k_3 + k_4 = 3$$

$$21k_1 + 15k_2 + 11k_3 + 3k_4 = 4$$

$$18k_1 + 9k_2 + 6k_3 + 2k_4 = 6$$

Resolvendo - se o sistema de equações acima, tem - se :

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = -3, \quad \text{resultando em :}$$

$$F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}$$

Expansão em Frações Parciais (iv)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**

- Expansão para quando não há repetição dos fatores de $Q(x)$ e a função é própria ($m < n$).

Seja a função racional própria :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x_{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} \therefore$$

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x - l_1)(x - l_2) \dots (x - l_n)} = \frac{k_1}{(x - l_1)} + \dots + \frac{k_i}{(x - l_i)} + \dots + \frac{k_n}{(x - l_n)}$$

multiplica - se ambos os lados por $x - l_i$ para achar k_i :

$$(x - l_i)F(x) \Big|_{x=l_i} = \frac{k_1(x - l_i)}{(x - l_1)} + \dots + k_i + \dots + \frac{k_n(x - l_i)}{(x - l_n)} \Big|_{x=l_i} \therefore$$

$$(x - l_i)F(x) \Big|_{x=l_i} = k_i$$

Expansão em Frações Parciais (v)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**

– Exemplo: Expandir $F(x)$ em frações parciais:

$$F(x) = \frac{2x^2 + 9x - 11}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{k_1}{x+1} + \frac{k_2}{x-2} + \frac{k_3}{x+3}$$

Encobre-se o denominadores de k_1 :

$$k_1 = (x+1)F(x)\Big|_{x=-1} = (x+1)\frac{2x^2 + 9x - 11}{(x+1)(x-2)(x+3)}\Big|_{x=-1} \therefore$$

$$k_1 = \frac{2(-1)^2 + 9(-1) - 11}{((-1)-2)((-1)+3)} = \frac{-18}{-6} \therefore k_1 = 3$$

Analogamente encontra-se os demais coeficientes

$$k_2 = (x-2)F(x)\Big|_{x=2} = \therefore k_2 = 1; \quad k_3 = (x+3)F(x)\Big|_{x=-3} = \therefore k_3 = -2$$

$$\text{Assim tem-se : } F(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}$$

Expansão em Frações Parciais (vi)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**

- Fatores complexos de $Q(x)$: Segue-se o mesmo procedimento.

Exemplo : Seja a função racional própria :

$$F(x) = \frac{4x^2 + 2x + 18}{(x+1)(x+2-j3)(x+2+j3)} = \frac{k_1}{(x+1)} + \frac{k_2}{(x+2-j3)} + \frac{k_3}{(x+2+j3)}$$

multiplica - se ambos os lados por $x - l_i$ para achar k_i :

$$k_1 = (x+1)F(x)\big|_{x=-1} = \frac{4(-1)^2 + 2(-1) + 18}{((-1)^2 + 4(-1) + 13)} = \frac{20}{10} = 2$$

$$k_2 = (x+2-j3)F(x)\big|_{x=-2+j3} = \frac{4(-2+j3)^2 + 2(-2+j3) + 18}{((-2+j3)+1)((-2+j3)+2+j3)} = 1 + j2$$

$$k_3 = (x+2+j3)F(x)\big|_{x=-2-j3} = \frac{4(-2-j3)^2 + 2(-2-j3) + 18}{((-2-j3)+1)((-2-j3)+2-j3)} = 1 - j2$$

Sinais e Sistemas
Eng. da Computação

Assim $k_1 = 2$, $k_2 = \sqrt{5}e^{j63.43^\circ}$, $k_3 = \sqrt{5}e^{-j63.43^\circ}$. 1-32

Expansão em Frações Parciais (vii)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**
 - Fatores quadráticos de $Q(x)$: Combina-se dois termos vindos de fatores complexos conjugados em um fator quadrático.

Exemplo : Seja a função racional própria :

$$F(x) = \frac{4x^2 + 2x + 18}{(x+1)(x^2 + 4x + 13)} = \frac{k_1}{(x+1)} + \frac{c_1x + c_2}{(x^2 + 4x + 13)}$$

o coeficiente k_1 é encontrado pelo método de Heaviside, Portanto :

$$\frac{4x^2 + 2x + 18}{(x+1)(x^2 + 4x + 13)} = \frac{2}{(x+1)} + \frac{c_1x + c_2}{(x^2 + 4x + 13)}$$

os coeficiente c_1 e c_2 são encontrados por método de limpar frações :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2x + 18 &= 2(x^2 + 4x + 13) + (c_1x + c_2)(x+1) \\ &= (2 + c_1)x^2 + (8 + c_1 + c_2)x + (26 + c_2) \therefore \end{aligned}$$

Expansão em Frações Parciais (viii)

- **Fatores Repetidos de Q(x)**
 - Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) adaptado.

Seja a função racional própria :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-l)^r (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} \therefore$$

$$F(x) = \frac{a_0}{(x-l)^r} + \frac{a_1}{(x-l)^{r-1}} + \dots + \frac{a_{r-1}}{(x-l)} + \frac{k_1}{(x-a_1)} + \dots + \frac{k_n}{(x-a_n)} \therefore$$

os coeficientes k_i são determinados pelo método de Heaviside.

Para encontrar os coeficientes a_j (igualdade para função e derivadas),

$$a_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \left[(x-l)^r F(x) \right]_{x=l}$$

Expansão em Frações Parciais (ix)

- Fatores Repetidos de Q(x)**

Exemplo : Seja a função racional própria :

$$F(x) = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{a_0}{(x+1)^3} + \frac{a_1}{(x+1)^2} + \frac{a_2}{(x+1)} + \frac{k}{(x+2)}$$

multiplica - se ambos os lados por $x - l_i$ para achar k_i :

$$k = (x+2)F(x)\big|_{x=-2} = \frac{4(-2)^3 + 16(-2)^2 + 23(-2) + 13}{((-2)+1)^3} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_0 = (x+1)^3 F(x)\big|_{x=-1} = \frac{4(-1)^3 + 16(-1)^2 + 23(-1) + 13}{((-1)+2)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_1 = \frac{d}{dx} \left[(x+1)^3 F(x) \right]_{x=-1} = \frac{d}{dx} \left[\frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+2)} \right]_{x=-1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[(x+1)^3 F(x) \right]_{x=-1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+2)} \right]_{x=-1}$$

Expansão em Frações Parciais (x)

- **Fatores Repetidos de Q(x)**

Exemplo (continuação):

Lembrando que :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

assim tem - se que :

$$a_1 = \frac{d}{dx} \left[\frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+2)} \right]_{x=-1} \quad \therefore$$

$$a_1 = \frac{(x+2)(12x^2 + 32x + 23) - (4x^3 + 16x^2 + 23x + 13)(1)}{(x+2)^2} \bigg|_{x=-1} \quad \therefore$$

$$a_1 = \frac{((-1)+2)(12(-1)^2 + 32(-1) + 23) - (4(-1)^3 + 16(-1)^2 + 23(-1) + 13)}{((-1)+2)^2} = 1$$

Expansão em Frações Parciais (xi)

- Fatores Repetidos de Q(x)**

Exemplo (continuação) : Analogamente, tem - se que :

$$a_2 = \frac{1}{2!} \frac{d}{dx} \left[\frac{(x+2)(12x^2 + 32x + 23) - (4x^3 + 16x^2 + 23x + 13)(1)}{(x+2)^2} \right]_{x=-1} \therefore$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} \frac{d}{dx} \left[\frac{8x^3 + 40x^2 + 64x + 33}{(x+2)^2} \right]_{x=-1} \therefore$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{(x+2)^2(24x^2 + 80x + 64) - (8x^3 + 40x^2 + 64x + 33)(2(x+2))}{(x+2)^4} \Big|_{x=-1} \therefore$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{((-1)+2)^2(24(-1)^2 + 80(-1) + 64)}{((-1)+2)^4} - \frac{(8(-1)^3 + 40(-1)^2 + 64(-1) + 33)(2((-1)+2))}{((-1)+2)^4} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{8-2}{1} \right) = 3$$

Regra de Cramer (i)

- **Utilização típica:**

- Solucionar sistema de equações lineares.

Seja n equações lineares simultâneas com n incógnitas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n$$

Estas equações podem ser expressas na forma matricial :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer (ii)

- **Descrição do Procedimento:**
 - Operações para solução do sistema de equações lineares.

Considere a matriz $\mathbf{A}$ e seu determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Assim, o vetor $\mathbf{x}$ tem uma única solução dada pela fórmula de Cramer :

$$x_k = \frac{|\mathbf{D}_k|}{|\mathbf{A}|}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

onde $|\mathbf{D}_k|$ é $|\mathbf{A}|$ com a k -ésima coluna substituída por $\mathbf{y}$.

Regra de Cramer (iii)

– Exemplo:

Resolva o sistema de equações lineares simultâneas :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Em forma matricial tem-se : $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{Y} \therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix},$

O determinante de $\mathbf{A}$ é calculado como : $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Regra de Cramer (iv)

– Exemplo (continuação):

Como o determinante é diferente de zero, então a solução única é:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{D}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{|\mathbf{D}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{|\mathbf{D}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{4} = -2$$

Vetores e Matrizes (i)

- **Vetor:**

- Entidade especificada por n variáveis em uma dada ordem (n -tupla ordenada) é um vetor n -dimensional. Assim,

Um vetor $\mathbf{x}$ de dimensão n pode ser representado por :

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad (\text{vetor linha}); \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{vetor coluna})$$

Representa - se matriz (array de variáveis ordenadas) de dimensão $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vetores e Matrizes (ii)

- **Transformação Linear:**

- Um sistema de equações lineares simultâneas pode ser visto como a transformação de um vetor em outro (transformação linear de vetores).

Seja m equações lineares simultâneas com n incógnitas :

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Em forma compacta pode-se escrever $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.

a_{ij} é definido como o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna.

Vetores e Matrizes (iii)

- Definições e Propriedades:

Seja a Matriz A , $m \times n$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, define - se

Matriz diagonal : $a_{ij} = 0$, $a_{ii} \neq 0$, $\forall i, j, (n \times n)$.

Matriz identidade ou unitária($\mathbf{I}$) : $a_{ij} = 0$, $a_{ii} = 1$, $\forall i, j, (n \times n)$.

Matriz simétrica : $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j, (n \times n)$.

Matriz zero : $a_{ij} = a_{ii} = 0$, $\forall i, j, (m \times n)$.

Matrizes idênticas ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$) : $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j, (m \times n)$

Matriz transposta ($\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$) : $(b_{ji})_{n \times m} = (a_{ij})_{m \times n}$.

Vetores e Matrizes (iv)

- **Álgebra de Matrizes:**

Considere duas matrizes **A** e **B** de dimensão $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Adição de matrizes (**A** + **B**): $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \forall i, j$.

Multiplicação de matriz por escalar ($c\mathbf{A} = \mathbf{A}c$): $(ca_{ij})_{m \times n}, \forall i, j$.

Multiplicação de matrizes, para $(a_{ij})_{m \times n}, (b_{ij})_{n \times p}, \forall i, j$

(**C** = **AB**): $(c_{ij})_{m \times p} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kj})$; (**D** = **BA**) não existe.

Distributividade : **(A + B)C = AC + BC**; **C(A + B) = CA + CB**.

Vetores e Matrizes (v)

- **Álgebra de Matrizes:**

Considere o sistema em forma matricial : $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{A}(n \times n)$

Pré - multiplicando ambos os termos pela inversa $\mathbf{A}^{-1}$, tem - se

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \therefore \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} \therefore \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{Ix} \therefore \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

Pela regra de Cramer :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|\mathbf{D}_{11}|}{|\mathbf{A}|} & \frac{|\mathbf{D}_{12}|}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{|\mathbf{D}_{1n}|}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{|\mathbf{D}_{21}|}{|\mathbf{A}|} & \frac{|\mathbf{D}_{22}|}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{|\mathbf{D}_{2n}|}{|\mathbf{A}|} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{|\mathbf{D}_{n1}|}{|\mathbf{A}|} & \frac{|\mathbf{D}_{n2}|}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{|\mathbf{D}_{nn}|}{|\mathbf{A}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} |\mathbf{D}_{11}| & |\mathbf{D}_{12}| & \cdots & |\mathbf{D}_{1n}| \\ |\mathbf{D}_{21}| & |\mathbf{D}_{22}| & \cdots & |\mathbf{D}_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |\mathbf{D}_{n1}| & |\mathbf{D}_{n2}| & \cdots & |\mathbf{D}_{nn}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Conclui - se que $\mathbf{A}^{-1} = (a_{ij}^{-1} = |\mathbf{D}_{ij}| / |\mathbf{A}|)$

Vetores e Matrizes (vi)

- **Álgebra de Matrizes:**

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} |\mathbf{D}_{11}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{12}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{13}|/|\mathbf{A}| \\ |\mathbf{D}_{21}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{22}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{23}|/|\mathbf{A}| \\ |\mathbf{D}_{31}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{32}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{33}|/|\mathbf{A}| \end{bmatrix},$$

$|\mathbf{D}_{ij}| = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij}$, onde $\mathbf{M}_{ij}$ é o determinante da submatriz de $\mathbf{A}$ obtida deletando - se a linha e coluna do componente a_{ij} .

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} |\mathbf{D}_{11}| & |\mathbf{D}_{12}| & |\mathbf{D}_{13}| \\ |\mathbf{D}_{21}| & |\mathbf{D}_{22}| & |\mathbf{D}_{23}| \\ |\mathbf{D}_{31}| & |\mathbf{D}_{32}| & |\mathbf{D}_{33}| \end{bmatrix} \therefore \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vetores e Matrizes (vii)

- **Derivada e Integral de uma Matriz:**

Considere as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de dimensão $m \times n$:

Derivada de uma matriz: $\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]_{m \times n} = \dot{\mathbf{A}}, \forall i, j.$

Integral de uma matriz: $\int \mathbf{A}(t) = \left[\int a_{ij}(t) dt \right]_{m \times n}, \forall i, j.$

Identidades válidas: $\frac{d}{dt} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$

$$\frac{d}{dt} (c\mathbf{A}) = c \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}^T}{dt} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}^T$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{I}) = 0$$

Vetores e Matrizes (viii)

- **Equação Característica: Teorema de Cayley-Hamilton:**

– Toda matriz $\mathbf{A}$ satisfaz a sua equação característica, isto é, na equação característica pode se substituir $?$ por $\mathbf{A}$.

isto é, $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A}^1 + a_0\mathbf{A}^0 = 0$,

onde o polinômio característico é

$$Q(?) = |l\mathbf{I} - \mathbf{A}| = ?^n + a_{n-1}l^{n-1} + \dots + a_1l^1 + a_0l^0 = 0$$

Considerando $\mathbf{A}$ ($n \times n$) e $\mathbf{x}$ ($n \times 1$) qualquer, $\mathbf{x} \neq 0$, satisfazendo :

$\mathbf{Ax} = l\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}$ é um autovetor e l seu autovalor correspondente.

A solução destas equações existe se e só se (equação característica)

$$|\mathbf{A} - l\mathbf{I}| = |l\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0, \text{ isto é, } \begin{bmatrix} a_{11} - l & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - l & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - l \end{bmatrix} = 0$$

Vetores e Matrizes (ix)

- **Equação Característica: Teorema de Cayley-Hamilton:**

- Funções de uma matriz quadrada usando o teorema.

Função na forma uma série infinita de potências :

$$f(?) = b_0 + b_1 l^1 + b_2 l^2 + \dots + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} b_i l^i$$

l é autovalor de $\mathbf{A}$, então ele satisfaz o polinômio característico, assim

$$?^n = -a_{n-1} l^{n-1} - a_{n-2} l^{n-2} - \dots - a_1 l - a_0 l^0, \quad \times l, \text{ ambos lados, tem-se :}$$

$$?^{n+1} = -a_{n-1} l^n - a_{n-2} l^{n-1} - \dots - a_1 l^2 - a_0 l^1$$

Nesta equação pode se substituir $?^n$ por seu valor acima, assim tem-se

$$?^{n+1} = -a_{n-1} (-a_{n-1} l^{n-1} - \dots - a_1 l - a_0 l^0) - a_{n-2} l^{n-1} - \dots - a_1 l^2 - a_0 l^1$$

Estendendo raciocínio $\forall n+k$, logo a série infinita pode ser re-escrita

$$f(?) = b_0 + b_1 l + b_2 l^2 + \dots + b_{n-1} l^{n-1}$$

Vetores e Matrizes (x)

- **Equação Característica: Teorema de Cayley-Hamilton:**
 - Funções de uma matriz quadrada usando o teorema.

Para sistema com n autovalores distintos $(l_1, \dots, l_n)$, tem-se :

$$\begin{bmatrix} f(l_1) \\ f(l_2) \\ \vdots \\ f(l_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & \dots & l_1^{n-1} \\ 1 & l_2 & \dots & l_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & l_n & \dots & l_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{A}$ também satisfaz o polinômio característico, analogamente tem-se :

$$f(\mathbf{A}) = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} + b_2 \mathbf{A}^2 + \dots + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}$$

Vetores e Matrizes (xi)

- **Cálculo de Exponencial e Potência:**

- Usadas para solucionar sistemas lineares, invariantes no tempo.

Exponencial, e^{At} , definida de :

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Assim, da equação de $f(\mathbf{A})$, tem -se que :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i (\mathbf{A})^i$$

Potência, $\mathbf{A}^k$:

$$\mathbf{A}^k = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} + \dots + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}$$

Miscelânea

- **Conteúdo**

- Relação de expressões matemática, para consulta, que envolvem:
 - L'Hopital;
 - Séries de Taylor e Maclaurin;
 - Séries de potências;
 - Somatórios;
 - Números Complexos;
 - Identidades Trigonométricas;
 - Integrais indefinidas;
 - Fórmulas comuns de derivadas;
 - Constantes usuais;
 - Soluções de equações quadráticas e cúbicas.

Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
 - Todos
- **Problemas**
 - B.1, B.2, B.3, B.5, B.7, B.8, B.9, B.13, B.17, B.18, B.22, B.23, B.24, B.26, B.27, B.31 até B.37.