Transformada de Laplace

Monitoria de Sinais e Sistemas Lineares

04/11/09

Transformadas

Transformada de Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Transformada Inversa de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Exemplo: 4.3

1. Determine a transformada inversa de Laplace de $\frac{7s-6}{s^2-s-6}$

Propriedades das Transformadas

Linearidade

$$x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s) \qquad e \qquad x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$$

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

Sinal Causal

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Região de Convergência

Região de Convergência

Também chamada de região de existência da transformada de Laplace X(s), é o conjunto de valores de s (a região do plano complexo) para os quais a integral converge.

Exemplo: 4.1

1. Para um sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$, determine a transformada de Laplace X(s) e sua RDC.

Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

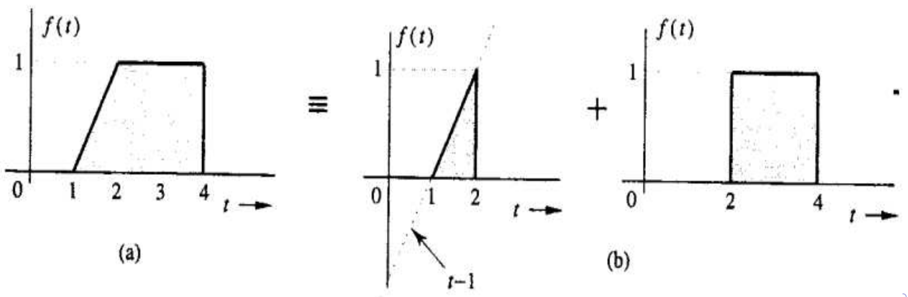
Deslocamento no Tempo

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$$

Exemplo: 4.4

1. Determine a transformada de laplace de x(t) mostrada na figura abaixo:



Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

Exemplo: 4.5

1. Determine a transformada inversa de Laplace

$$X(s) = \frac{s + 3 + 5e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

Deslocamento na Frequência

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

$$x(t)e^{s_0 t} \Leftrightarrow X(s - s_0)$$

Exemplo: 4.6

1. Obtenha o par 9a da tabela 4.1 a partir do par 8a e da propriedade de deslocamento na freqüência.

Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

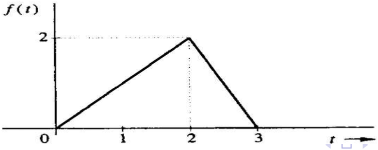
Diferenciação no Tempo

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} \Leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

Exemplo: 4.7

1. Determine a transformada de Laplace do sinal x(t) da figura usando a tabela 4.1 e as propriedades de diferenciação e deslocamento no tempo da transformada de Laplace.



Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

Integração no tempo

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

$$\int_{0^-}^{t} x(t)dt \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(t)dt}{s}$$

Escalonamento

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

Convolução no Tempo

$$x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s) \qquad e \qquad x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

Convolução na Freqüência

$$x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s) \qquad e \qquad x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$$

$$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}[X_1(s) * X_2(s)]$$

Exemplo: 4.8

1. Usando a propriedade de convolução no tempo da transformada de Laplace, determine $c(t) = e^{at}u(t) * e^{bt}u(t)$

Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

Valor Inicial

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Valor Final

$$x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Exemplo: 4.9

1. Determine os valores inicial e final de y(t) se sua transformada de Laplace for dada por:

$$Y(s) = \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}$$

1. Resolva a equação diferencial linear de segunda ordem

$$(D^2 + 5D + 6)y(t) = (D + 1)x(t)$$

para as condições iniciais $y(0^-) = 2$ e $y \circ (0^-) = 1$ e entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$

Resposta de Estado Nulo = Função Transferência

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

$$(s^N + a_1 s^N + \ldots + a_{n-1}s + a_N)Y(s) = (b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \ldots + b_{N-1}s + b_N)X(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \ldots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^N + \ldots + a_{n-1}s + a_N} X(s)$$

$$= \frac{P(s)}{Q(s)} X(s)$$

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Estabilidade

1. Assintoticamente Estável - todos os pólos de H(s) estiverem no SPE (simples ou unitários)
2. Instável -
   1. Ao menos 1 pólo de H(s) está no SPD;
   2. Pólos repetidos de H(s) no eixo imaginário
3. Marginalmente estável - não existem pólo de H(s) no SPD e alguns pólos no não repetidos no eixo imaginário
   Exemplo: 4.14
4. A fig. 4.9a mostra uma conexão em cascata de dois sistemas LCIT, o sistema S_1 seguido por S_2. As funções transferência desses sistemas são $H_1(s) = \frac{1}{(s-1)}$ e $H_2(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)}$, respectivamente. Vamos determinar a estabilidade BIBO e assintótica do sistema composto.

Geradores de Condição Inicial

Capacitores

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

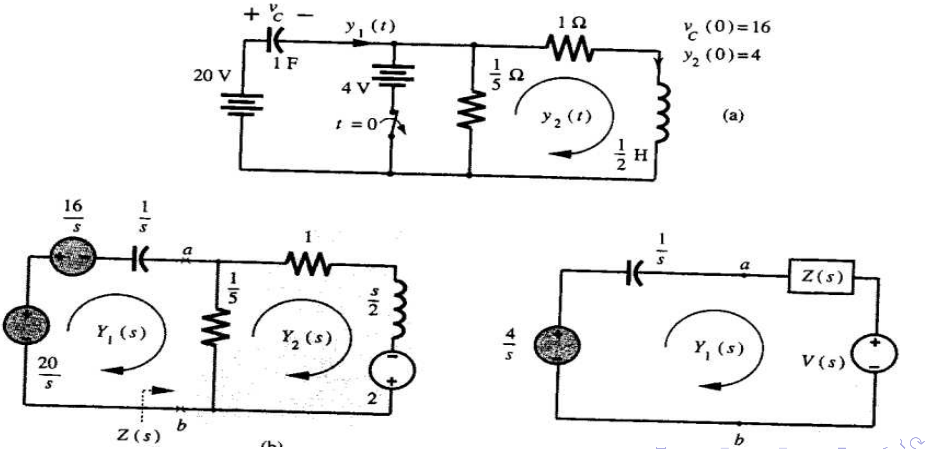
Indutores

$$V(s) = LsI(s) - Li(0^-)$$

Geradores de Condição Inicial

Exemplo: 4.16

1. A chave do circuito da figura é mantida na posição fechada por um longo período antes de t =0, quando ela é, então, aberta instantaneamente. Determine as correntes $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para $t \geq 0$.



$$H(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1} s + a_N}$$

Realização na Forma Direta I

$$H(s) = \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} + \ldots + \frac{b_n}{s^n}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} + \ldots + \frac{a_n}{s^n}}\right)$$

$$H(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + \ldots + b_n}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + \ldots + a_n} = \frac{b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \ldots + \frac{b_n}{s^n}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^n}}$$

$$H(s) = \underbrace{\left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \ldots + \frac{b_n}{s^n}\right)}_{H_1(s)} \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^n}}\right)}_{H_2(s)}$$

$$Y(s) = H_2(s) W(s)$$

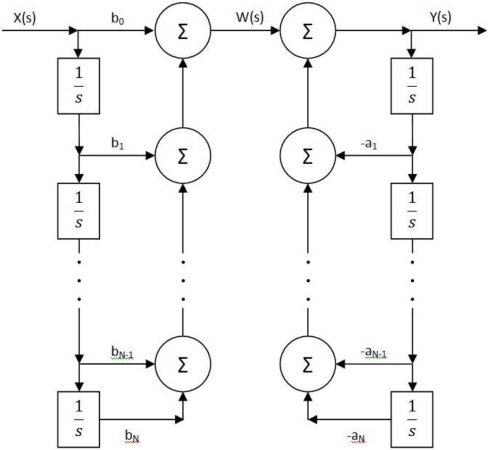
Realização de Sistemas

$$Y(s) = W(s) - \left(\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s_2} + \ldots + \frac{a_n}{s^n}\right)$$

$$W(s) = H_1(s)X(s)$$

$$W(s) = \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \ldots + \frac{b_n}{s^n}\right) X(s)$$

$$W(s) = \left(1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^n}\right) Y(s)$$

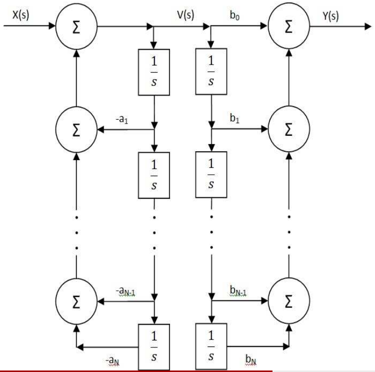


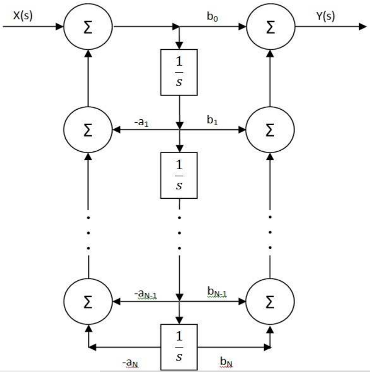
Realização de Sistemas

Realização na Forma Direta II

$$V(s) = X(s) - \left(\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \cdots + \frac{a_N}{s^N}\right) V(s)$$

$$Y(s) = \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \cdots + \frac{b_N}{s^N}\right) V(s)$$





Exemplo:4.19

1. Determine a realização na forma direta canônica para as seguintes funções de transferência:

$$\frac{5}{s+7}$$