

Transformada Z

Monitoria de Sinais e Sistemas Lineares

04/11/09

Transformadas

Transformada Z

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Transformada Inversa Z

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X[z]z^{n-1}$$

Exemplo: 5.1

Exemplo: 5.3

Transformadas

Transformada Z

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Transformada Inversa Z

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X[z]z^{n-1}$$

Exemplo: 5.1

1 Determine a transformada Z do sinal:

$$X[Z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n u[n]z^{-n}$$

Exemplo: 5.3

Transformadas

Transformada Z

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Transformada Inversa Z

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X[z]z^{n-1}$$

Exemplo: 5.1

- 1 Determine a transformada Z do sinal:

$$X[Z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n u[n]z^{-n}$$

Exemplo: 5.3

- 1 Determine a transformada inversa de $\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$

Propriedades

Linearidade

$$x_1[n] \iff X_1[n] \quad \text{e} \quad x_2[n] \iff X_2[n] \implies \\ a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \iff a_1 X_1[n] + a_2 X_2[n]$$

Propriedades

Linearidade

$$x_1[n] \iff X_1[n] \quad \text{e} \quad x_2[n] \iff X_2[n] \implies \\ a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \iff a_1 X_1[n] + a_2 X_2[n]$$

Causalidade

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Mais Propriedades

Deslocamento para Direita

$$x[n]u[n] \iff X[z]$$

$$x[n-m]u[n-m] \iff \frac{1}{z^m}X[z]$$

$$x[n-m]u[n] \iff z^{-m}X[z] + z^{-m} \sum_{n=1}^m x[-n]z^n$$

Mais Propriedades

Deslocamento para Direita

$$x[n]u[n] \iff X[z]$$

$$x[n-m]u[n-m] \iff \frac{1}{z^m}X[z]$$

$$x[n-m]u[n] \iff z^{-m}X[z] + z^{-m} \sum_{n=1}^m x[-n]z^n$$

Deslocamento para Esquerda

$$x[n]u[n] \iff X[z]$$

$$x[n+m]u[n] \iff z^mX[z] - z^m \sum_{n=0}^{m-1} x[n]z^{-n}$$

Mais Propriedades

Convolução no Tempo

$$x_1[n] \iff X_1[z]$$

$$x_2[n] \iff X_2[z]$$

$$x_1[n] * x_2[n] \iff X_1[z]X_2[z]$$

Mais Propriedades

Convolução no Tempo

$$x_1[n] \iff X_1[z]$$

$$x_2[n] \iff X_2[z]$$

$$x_1[n] * x_2[n] \iff X_1[z]X_2[z]$$

Multiplicação por γ^n

$$x[n]u[n] \iff X[z]$$

$$\gamma^n x[n]u[n] \iff X\left[\frac{z}{\gamma}\right]$$

Mais Propriedades

Multiplicação por n

$$x[n]u[n] \iff X[z]$$

$$nx[n]u[n] \iff -z \frac{d}{dz} X[z]$$

Mais Propriedades

Multiplicação por n

$$x[n]u[n] \iff X[z]$$

$$nx[n]u[n] \iff -z \frac{d}{dz} X[z]$$

Reversão no Tempo

$$x[n] \iff X[z]$$

$$x[-n] \iff X \frac{1}{z}$$

Mais Propriedades

Valor Inicial

$$x[0] \iff \lim_{z \rightarrow \infty} X[z]$$

Exemplo: 5.5

Mais Propriedades

Valor Inicial

$$x[0] \iff \lim_{z \rightarrow \infty} X[z]$$

Valor Final

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x[N] \iff \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X[z]$$

Exemplo: 5.5

Mais Propriedades

Valor Inicial

$$x[0] \iff \lim_{z \rightarrow \infty} X[z]$$

Valor Final

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x[N] \iff \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X[z]$$

Exemplo: 5.5

- ① Resolva: $y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = 3x[n+1] + 5x[n]$ Se as condições iniciais forem $y[-1] = \frac{11}{6}$ e $y[-2] = \frac{37}{36}$ e a entrada for $x[n] = (2)^{-n}u[n]$

Componentes de Entrada Nula e Estado Nulo

$$\left(1 - \frac{5}{z} + \frac{6}{z^2}\right) Y[z] - \underbrace{\left(3 - \frac{11}{z}\right)}_{\text{termo das condições iniciais}} = \underbrace{\frac{3}{z - 0,5} + \frac{5}{z(z - 0,5)}}_{\text{termos em função da entrada}}$$

$$(z^2 - 5z + 6)Y[z] = \underbrace{z(3z - 11)}_{\text{termo das condições iniciais}} + \underbrace{\frac{z(3z + 5)}{z - 0,5}}_{\text{termos em função da entrada}}$$

$$Y[z] = \underbrace{\frac{z(3z - 11)}{z^2 - 5z + 6}}_{\text{resposta de entrada nula}} + \underbrace{\frac{z(3z + 5)}{(z - 0,5)(z^2 - 5z + 6)}}_{\text{resposta de estado nulo}}$$

Resposta de Estado Nulo

Resposta de Estado Nulo = Função de Transferência

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N) Y[n] = (b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \dots + b_{N-1} E + b_N) X[n]$$

$$\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_N}{z^N}\right) Y[z] = \left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_N}{z^N}\right) X[z] \quad (xz^N)$$

$$\frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_{N-1} z + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N} = \frac{P[z]}{Q[z]} = H[z]$$

$$Y[z] = X[z] H[z]$$

Exemplo: 5.6

Resposta de Estado Nulo

Resposta de Estado Nulo = Função de Transferência

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{n-1} E + a_N) Y[n] = (b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \dots + b_{N-1} E + b_N) X[n]$$

$$\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_N}{z^N}\right) Y[z] = \left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_N}{z^N}\right) X[z] \quad (xz^N)$$

$$\frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_{N-1} z + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N} = \frac{P[z]}{Q[z]} = H[z]$$

$$Y[z] = X[z]H[z]$$

Exemplo: 5.6

- 1 Determine a resposta $y[n]$ de um sistema LDIT descrito pela equação diferença: $y[n+2] + y[n+1] + 0,16y[n] = x[n+1] + 0,32x[n]$ para a entrada $x[n] = (-2)^{-n}u[n]$ e com condições iniciais nulas (sistema no estado zero)