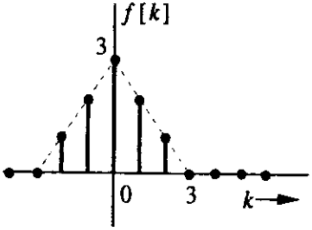
Sistemas de Tempo Discretos

Monitoria de Sinais e Sistemas Lineares

23/09/09

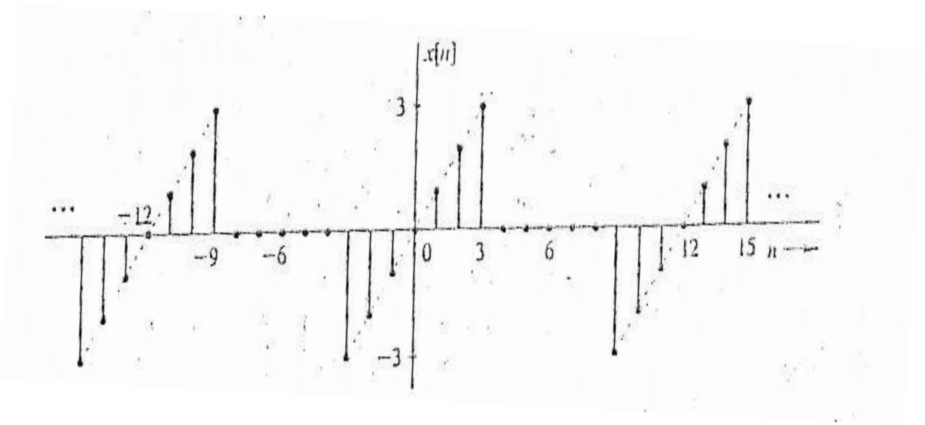
Tamanho de um Sinal



(a)

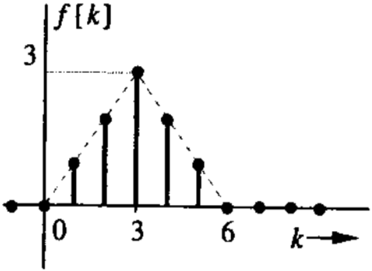
Calcule a energia ou a potência.

Tamanho de um Sinal



Calcule a energia ou a potência.

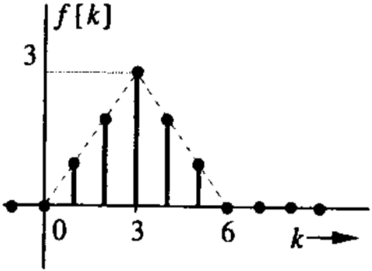
Operações



Calcule:

1. $f[-k]$ $\quad x_d[n] = x[n-1]$

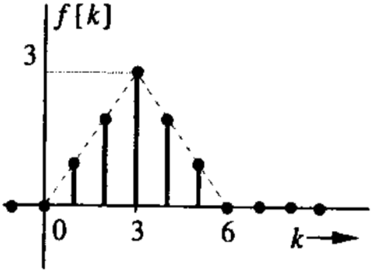
Operações



Calcule:

1. $f[-k]$ $\qquad x_d[n] = x[n-1]$
2. $f[k+6]$ $\qquad x_d[n] = x[n-m]$

Operações



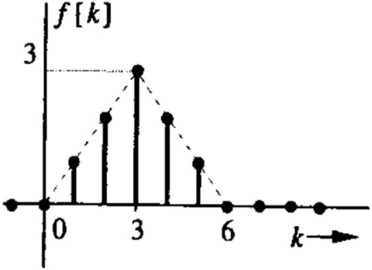
Calcule:

1. $f[-k]$
2. $f[k+6]$
3. $f[k-6]$

$$x_d[n] = x[n-1]$$

$$x_d[n] = x[n-m]$$

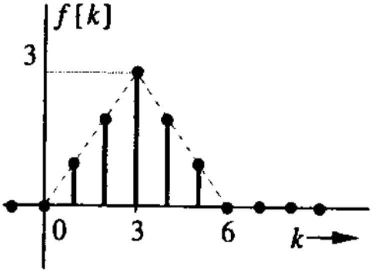
Operações



Calcule:

1. $f[-k]$ $\qquad x_d[n] = x[n-1]$
2. $f[k+6]$ $\qquad x_d[n] = x[n-m]$
3. $f[k-6]$
4. $f[3k]$ $\qquad x_d[n] = x[Mn]$

Operações



Calcule:

1. $f[-k]$ $\qquad x_d[n] = x[n-1]$
2. $f[k+6]$ $\qquad x_d[n] = x[n-m]$
3. $f[k-6]$
4. $f[3k]$ $\qquad x_d[n] = x[Mn]$
5. $f[\frac{k}{3}]$

Classificação dos Sistemas

1. Um sistema discreto é dado por

$$y[n+1] = \frac{x[n]}{x[n+1]}$$

   1. O sistema é BIBO?

Classificação dos Sistemas

1. Um sistema discreto é dado por

$$y[n+1] = \frac{x[n]}{x[n+1]}$$

   1. O sistema é BIBO?
   2. O sistema é sem memória?

Classificação dos Sistemas

1. Um sistema discreto é dado por

$$y[n+1] = \frac{x[n]}{x[n+1]}$$

   1. O sistema é BIBO?
   2. O sistema é sem memória?
   3. O sistema é causal?

Classificação dos Sistemas - Visão Geral

As mesmas definições dos sistemas contínuos

- Linearidade

$$x_1 -> y_1 \qquad x_2 -> y_2$$

$$k.x_1 + k.x_2 -> k.y_1 + k.y_2$$

Classificação dos Sistemas - Visão Geral

As mesmas definições dos sistemas contínuos

- Linearidade

$$x_1 -> y_1 \qquad x_2 -> y_2$$

$$k.x_1 + k.x_2 -> k.y_1 + k.y_2$$

- Causalidade
  Causal - valor atual e passado — Não-causal - valor futuro

Classificação dos Sistemas - Visão Geral

As mesmas definições dos sistemas contínuos

- Linearidade

$$x_1 -> y_1 \qquad x_2 -> y_2$$

$$k.x_1 + k.x_2 -> k.y_1 + k.y_2$$

- Causalidade
  Causal - valor atual e passado — Não-causal - valor futuro
- Invariância
  variante - parâmetros variam com o tempo — Invariantes - parâmetros não variam com o tempo

Classificação dos Sistemas - Visão Geral

As mesmas definições dos sistemas contínuos

- Linearidade

$$x_1 -> y_1 \qquad x_2 -> y_2$$

$$k.x_1 + k.x_2 -> k.y_1 + k.y_2$$

- Causalidade
  Causal - valor atual e passado — Não-causal - valor futuro
- Invariância
  variante - parâmetros variam com o tempo — Invariantes - parâmetros não variam com o tempo
- Inversibilidade
  Inversível - as entradas podem ser determinadas pelas saídas — Não-inversíveis - as entradas não podem ser determinadas pelas saídas

Classificação dos Sistemas - Visão Geral

- Estabilidade
  Estável - entrada limitada gera saída limitada — Instável - entrada limitada gera saída ilimitada

Classificação dos Sistemas - Visão Geral

- Estabilidade
  Estável - entrada limitada gera saída limitada — Instável - entrada limitada gera saída ilimitada
- Memória
  Sem memória (instantâneos) - resposta n depende da entrada n — Com memória (dinâmicos) - resposta n depende de entradas passadas, presentes e futuras

Equações Diferença

Sobre a equação:

$$y[n] - 0,5y[n-1] = x[n]$$

1. Mostre as formas como a equação pode ser representada

Equação Diferença

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \ldots + a_{n-1} y[n+1] + a_n y[n] =$$
$$b_{N-M} x[n+M] + \ldots + b_n x[n]$$

Condição de Causalidade

Para que a equação diferença seja causal $M \leq N$, pois quando aplicado na equação em um instante n + M a saída não dependerá de entradas futuras.

Equações Diferença

Sobre a equação:

$$y[n] - 0,5y[n-1] = x[n]$$

1. Mostre as formas como a equação pode ser representada
2. Resolva iterativamente usando a condição inicial $y[-1] = 16$ e a entrada causal $x[n] = n^2$ (començando do zero).

Equação Diferença

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \ldots + a_{n-1} y[n+1] + a_n y[n] =$$

$$b_{N-M} x[n+M] + \ldots + b_n x[n]$$

Condição de Causalidade

Para que a equação diferença seja causal $M \leq N$, pois quando aplicado na equação em um instante n + M a saída não dependerá de entradas futuras.

Notação Operacional

1. Coloque a equação na notação operacional:

$$y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$$

Para tornar os calculos mais simples, foi criado a notação operacional, que relaciona os termos da equação da seguinte forma:

$$E \equiv 1$$
$$Ex[n] \equiv x[n+1]$$
$$E^2x[n] \equiv x[n+2]$$
$$\vdots$$
$$E^m x[x] \equiv x[n+m]$$

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico
2. A equação característica

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico
2. A equação característica
3. As raízes características

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico
2. A equação característica
3. As raízes características
4. A resposta de entrada nula para as condições iniciais: $y[-1] = 0, y[-2] = \frac{25}{4}$

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico
2. A equação característica
3. As raízes características
4. A resposta de entrada nula para as condições iniciais: $y[-1] = 0, y[-2] = \frac{25}{4}$

Resposta de Entrada Nula

O sistema não recebe entrada, portanto responde como as suas "características" interna (modos característicos).

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico
2. A equação característica
3. As raízes características
4. A resposta de entrada nula para as condições iniciais: $y[-1] = 0, y[-2] = \frac{25}{4}$

Resposta de Entrada Nula

O sistema não recebe entrada, portanto responde como as suas "características" interna (modos característicos).

1. Polinômio Característico: $Q[\gamma]$

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico
2. A equação característica
3. As raízes características
4. A resposta de entrada nula para as condições iniciais: $y[-1] = 0, y[-2] = \frac{25}{4}$

Resposta de Entrada Nula

O sistema não recebe entrada, portanto responde como as suas "características" interna (modos característicos).

1. Polinômio Característico: $Q[\gamma]$
2. Equação Característica: $Q[\gamma] = 0$

Resposta de Entrada Nula

Sobre a equação $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ responda:

1. O polinômio caracteristico
2. A equação característica
3. As raízes características
4. A resposta de entrada nula para as condições iniciais: $y[-1] = 0, y[-2] = \frac{25}{4}$

Resposta de Entrada Nula

O sistema não recebe entrada, portanto responde como as suas "características" interna (modos característicos).

1. Polinômio Característico: $Q[\gamma]$
2. Equação Característica: $Q[\gamma] = 0$
3. Raízes Características ou valores característicos: raizes obtidas da equação característica

Forma da Resposta de Entrada Nula

Lembrando que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ são as raízes características do sistema.

Raízes Reais Não Repetidas

$y_0[n] = C_1\gamma_1^n + C_2\gamma_2^n + \ldots + C_N\gamma_N^n$

Forma da Resposta de Entrada Nula

Lembrando que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ são as raízes características do sistema.

Raízes Reais Não Repetidas

$$y_0[n] = C_1\gamma_1^n + C_2\gamma_2^n + \ldots + C_N\gamma_N^n$$

Raízes Reais Repetidas

$$y_0[n] = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_r n^{r-1})\gamma_1^n + (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_r n^{r-1})\gamma_2^n + \ldots + (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_r n^{r-1})\gamma_N^n$$

Forma da Resposta de Entrada Nula

Lembrando que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ são as raízes características do sistema.

Raízes Reais Não Repetidas

$$y_0[n] = C_1\gamma_1^n + C_2\gamma_2^n + \ldots + C_N\gamma_N^n$$

Raízes Reais Repetidas

$$y_0[n] = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_r n^{r-1})\gamma_1^n + (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_r n^{r-1})\gamma_2^n + \ldots + (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_r n^{r-1})\gamma_N^n$$

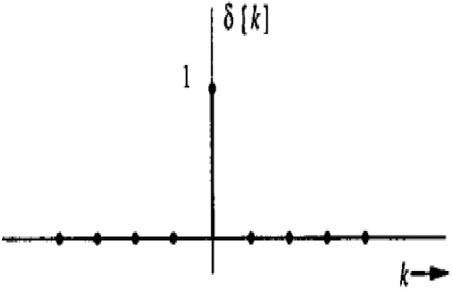
Raízes Complexas

$$y_0[n] = C_1|\gamma|^n e^{j\beta n} + C_2|\gamma|^n e^{-j\beta n} \quad y_0[n] = C|\gamma|^n \cos(\beta n + \theta)$$

Resposta ao Impulso Unitário

Sobre a equação $y[n] - 0,6y[n-1] - 0,16y[n-2] = 5x[n]$, responda:

1. Qual a resposta ao impulso deste sistema.



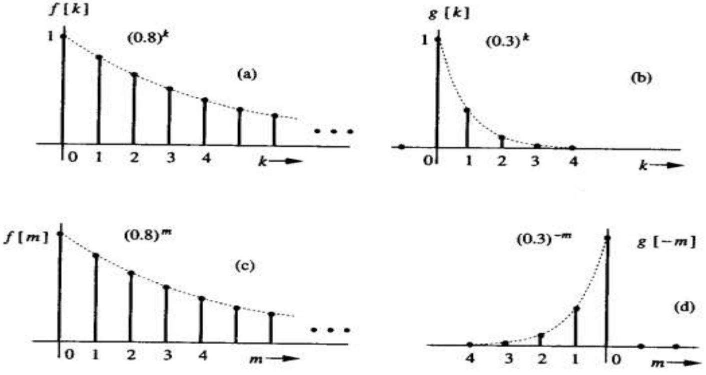
Resposta ao Impulso Unitário

Equação Resposta ao Impulso

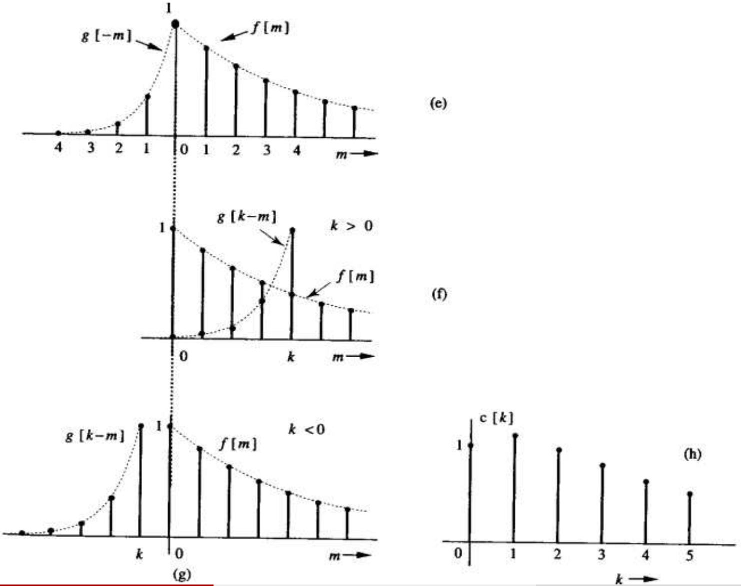
$h[n] = A_0\delta[n] + y_c[n]u[n]$ $A_0 = \frac{b_n}{a_n}$

Resposta de Estado Nulo

Determine $c[n] = x[n] * g[n]$, onde x[n] e g[n] são dados pela figura.



Resposta de Estado Nulo



Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:

Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:
   1. Comutativa:
      $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$

Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:
   1. Comutativa:
      $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
   2. Distributiva:
      $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$

Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:
   1. Comutativa:
      $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
   2. Distributiva:
      $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
   3. Associativa:
      $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$

Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:
   1. Comutativa:
      $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
   2. Distributiva:
      $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
   3. Associativa:
      $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
   4. Deslocamento:
      $x_1[n] * x_2[n] = c[n] \Rightarrow x_1[n-m] * x_2[n-p] = c[n-m-p]$

Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:
   1. Comutativa:
      $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
   2. Distributiva:
      $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
   3. Associativa:
      $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
   4. Deslocamento:
      $x_1[n] * x_2[n] = c[n] \Rightarrow x_1[n-m] * x_2[n-p] = c[n-m-p]$
   5. Impulso:
      $x[n] * \delta[n] = x[n]$

Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:
   1. Comutativa:
      $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
   2. Distributiva:
      $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
   3. Associativa:
      $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
   4. Deslocamento:
      $x_1[n] * x_2[n] = c[n] \Rightarrow x_1[n-m] * x_2[n-p] = c[n-m-p]$
   5. Impulso:
      $x[n] * \delta[n] = x[n]$
   6. Largura:
      $x_1[n] \longrightarrow W_1 e x_2 \longrightarrow W_2 \Rightarrow x_1[n] * x_2[n] \longrightarrow w_1 + W_2$

Resposta de Estado Nulo

Convolução Discreta

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

1. Propriedades:
   1. Comutativa:
      $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
   2. Distributiva:
      $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
   3. Associativa:
      $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
   4. Deslocamento:
      $x_1[n] * x_2[n] = c[n] \Rightarrow x_1[n-m] * x_2[n-p] = c[n-m-p]$
   5. Impulso:
      $x[n] * \delta[n] = x[n]$
   6. Largura:
      $x_1[n] \rightarrow W_1 e x_2 \rightarrow W_2 \Rightarrow x_1[n] * x_2[n] \rightarrow w_1 + W_2$
   7. Causalidade:
      $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$

Função Transferência

Determine a função transferência da seguinte equação:

$$(E^2 - 3E + 2)y[n] = (E + 2)x[n]$$

Função transferência

Função da variável complexa, representada por:

$$H[z] = \frac{\text{sinal de saída}}{\text{sinal de entrada}}$$

ou

$$H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$$

Resposta Total

Resposta Total

resposta total = entrada-nula + estado-nulo

Resposta Clássica

resposta total = resposta-natural + resposta-forçada

Resposta Natural e Forçada

Use o método clássico para resolver $(E^2 - E + 0,16)y[n] = Ex[n]$ com entrada $x[n] = (0,2)^n u[n]$ e condições auxiliares y[0] = 1 e y[1] = 2.

Resposta Natural

$$Q[E]y_{nat}[n] = 0$$

Resposta Natural e Forçada

Use o método clássico para resolver $(E^2 - E + 0,16)y[n] = Ex[n]$ com entrada $x[n] = (0,2)^n u[n]$ e condições auxiliares y[0] = 1 e y[1] = 2.

Resposta Natural

$$Q[E]y_{nat}[n] = 0$$

Resposta Forçada

$$Q[E]y_{for} = P[E]x[n]$$

Tabela - Resposta Forçada

	Input $f[k]$		Forced Response $y_\phi[k]$
1.	r^k	$r \neq \gamma_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$	cr^k
2.	r^k	$r = \gamma_i$	ckr^k
3.	$\cos(\beta k + \theta)$		$c\cos(\beta k + \phi)$
4.	$\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i k^i\right) r^k$		$\left(\sum_{i=0}^{m} c_i k^i\right) r^k$

Estabilidade

Determine a estabilidade BIBO e Assintótica dos sistemas abaixo:

1. $y[n+2] + 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = x[n+1] - 2x[n]$

Estabilidade

Determine a estabilidade BIBO e Assintótica dos sistemas abaixo:

1. $y[n+2] + 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = x[n+1] - 2x[n]$
2. $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n-1] + 2x[n-2]$

Estabilidade

Determine a estabilidade BIBO e Assintótica dos sistemas abaixo:

1. $y[n+2] + 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = x[n+1] - 2x[n]$
2. $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n-1] + 2x[n-2]$
3. $(E^2 - 1)(E^2 + 1)y[n] = x[n]$

Estabilidade

BIBO - externa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Assintótica - interna

- Estável: raízes < 1

Estabilidade

BIBO - externa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Assintótica - interna

- Estável: raízes < 1
- Instável: 2 ou $+$ raízes $= 1$ ou raízes > 1

Estabilidade

BIBO - externa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Assintótica - interna

- Estável: raízes < 1
- Instável: 2 ou $+$ raízes $= 1$ ou raízes > 1
- Marginalmente estáveis: raiz $= 1$