ES 413 Sinais e Sistemas

Ponte Entre Sistemas Discretos e Contínuos

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo

Depto. of Sistemas de Computação

Centro de Informática - UFPE

Capítulo 8

Conteúdo

- Teorema da Amostragem
- Reconstrução de Sinais

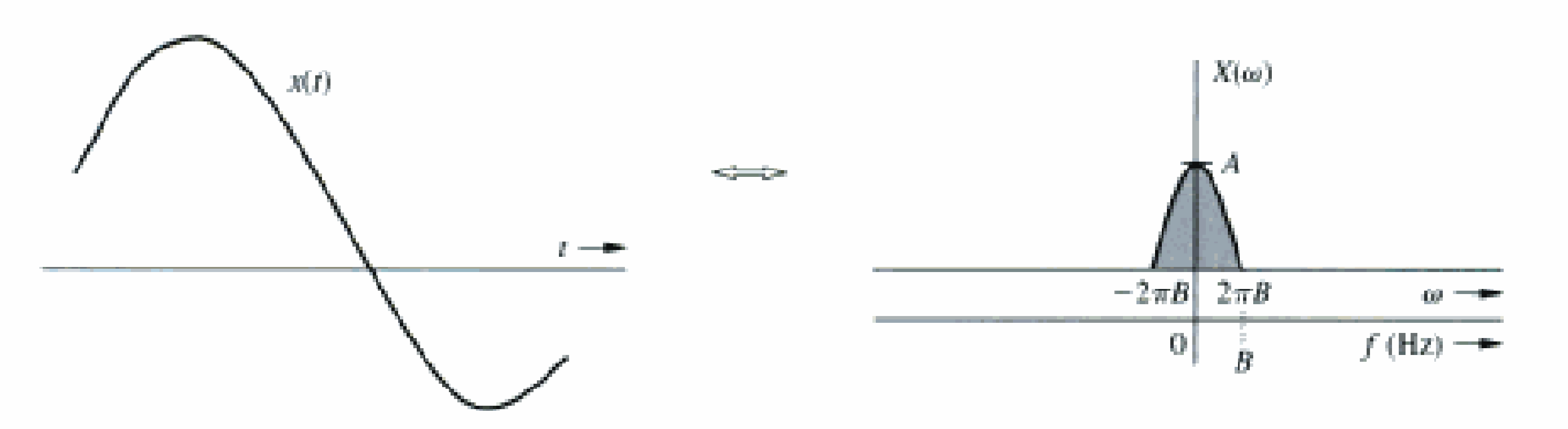
Teorema da Amostragem (i)

- Um sinal contínuo no tempo pode ser processado através de um sistema discreto no tempo se este processamento ocorrer sobre amostras do sinal original.
  - Taxa de amostragem do sinal deve ser alta o suficiente que permita a reconstrução do sinal a partir das amostras dentro de uma faixa de erro aceitável.
  - O arcabouço quantitativo necessário para amostragem adequada é provido pelo Teorema da Amostragem.
- Conceitos para análise de sinais amostrados são aplicáveis a sinais discretos no tempo pois:
  - Um sinal contínuo no tempo que esteja amostrado é constituído por uma sequência de impulsos.
  - Um sinal discreto no tempo é constituído por uma sequência de números.

Teorema da Amostragem (ii)

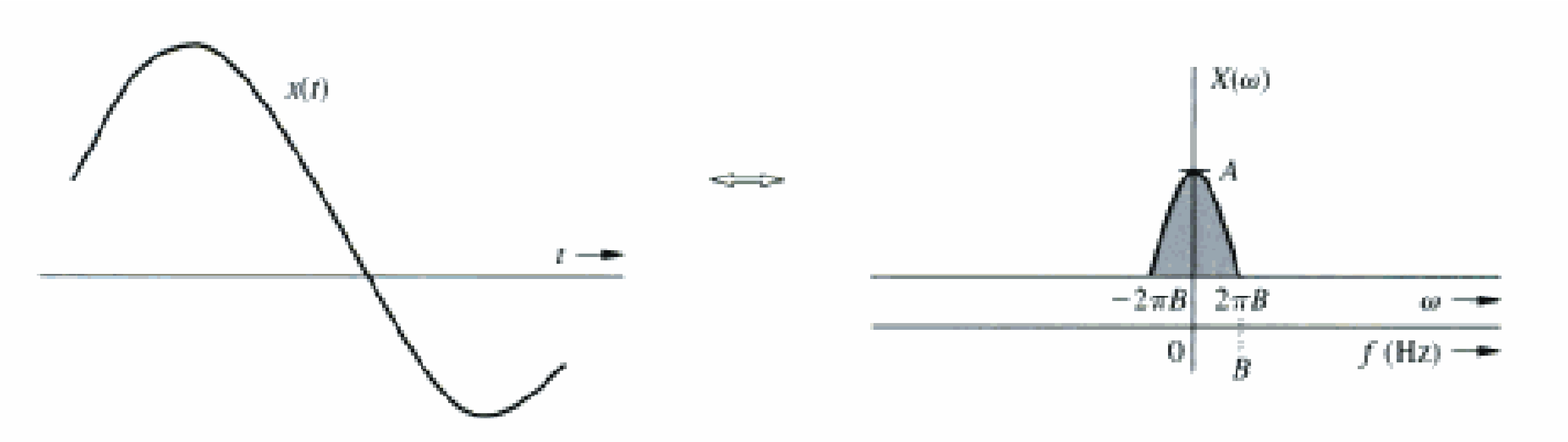
– Um sinal real $x(t)$ cujo espectro tem largura de banda B Hz, isto é, $X(\omega)$ =0 para $|\omega| > 2\pi B$ rad/s, pode ser precisamente reconstruído a partir de suas amostras $x(kT)$ se a taxa de amostragem ω_s, satisfizer a condição $\omega_s \geq 4\pi B$.

- Em termos de intervalo de amostragem: $T_s \leq 1/2B$.
- A taxa mínima de amostragem para perfeita reconstrução do sinal original é referenciada como taxa de Nyquist.



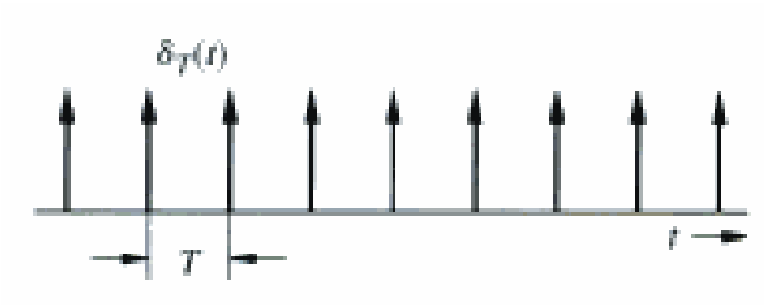
Teorema da Amostragem (i)

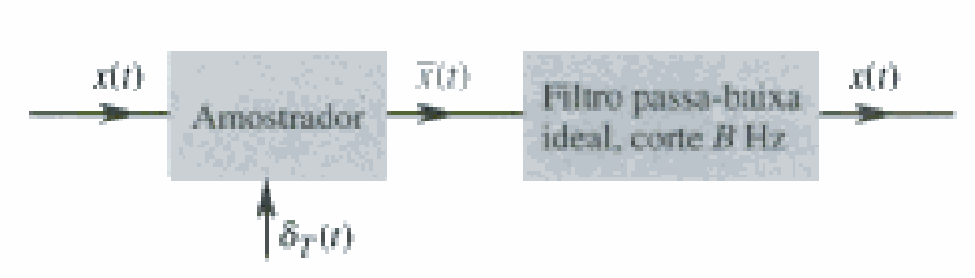
- Sinal real com espectro limitado a $B\text{Hz}\ \left[X(\omega)=0 \ \text{ para } |\omega| > 2\pi B\right]$
  Pode ser reproduzido de amostras tomadas uniformemente a uma taxa de $f_s > 2B$ Hz.



Teorema da Amostragem (ii)

- Prova:
  - Para obter uma taxa de f_s multiplica-se *x*(*t*) por um trem de impulsos unitários periodicamente repetidos em $T = \frac{1}{f_s}$ segundos



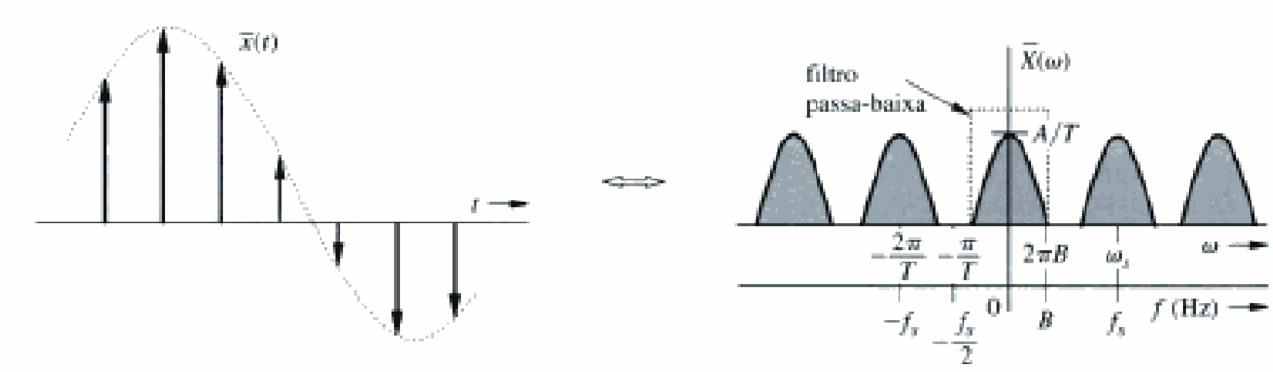


Como o n-ésimo pulso localizado em *t*=*nT* possui magnitude *x*(*nT*):

$$\overline{x}(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_n x(nT)\delta(t - nT)$$

Teorema da Amostragem (iii)

- Prova:



Como o trem de impulsos é um sinal periódico, pode ser substituído pela série trigonométrica de Fourier:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}[1 + 2\cos\omega_s t + 2\cos 2\omega_s t + 2\cos 3\omega_s t + \ldots] \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

Assim:

$$\bar{x}(t) = x(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T}[x(t) + 2x(t)\cos\omega_s t + 2x(t)\cos 2\omega_s t + 2x(t)\cos 3\omega_s t + \ldots]$$

Teorema da Amostragem (iv)

- Prova:

  É possível obter a transformada de Fourier do sinal amostrado obtendo a transformada do lado direito da equação.

  Os elementos do lado direito representam o espectro para diferentes valores de frequências, logo:

$$\overline{X}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

□

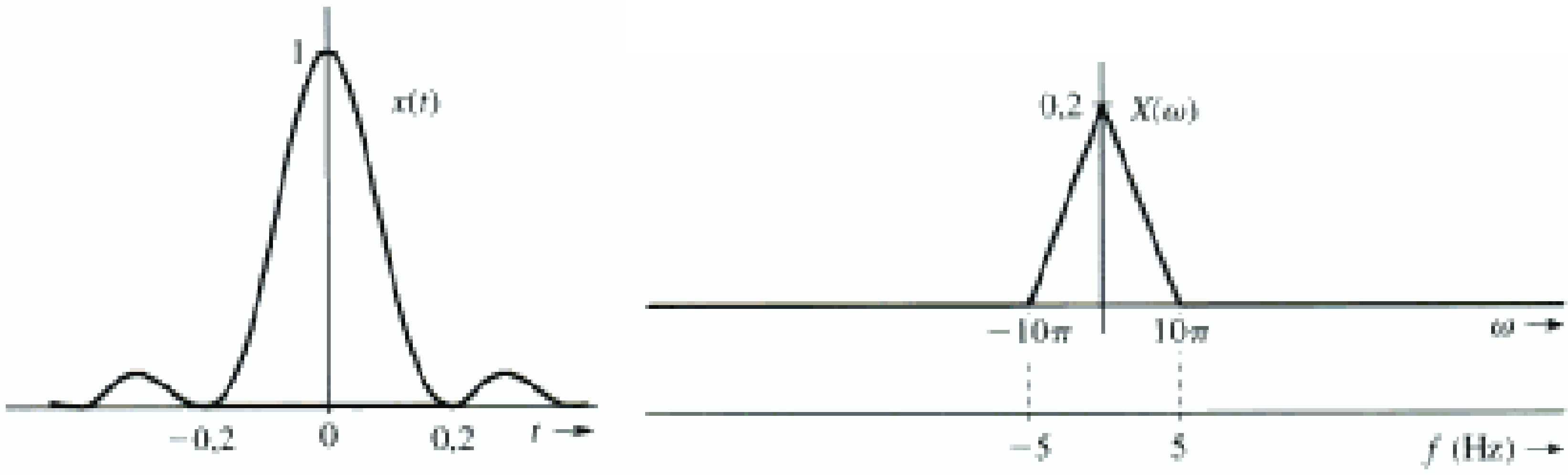
- Recuperação possível se não houver sobreposição no domínio da frequência $f_s > 2B \quad T < \frac{1}{2B}$

Teorema da Amostragem (v)

- A menor taxa de amostragem $f_s = 2B$ Hz necessária para recuperar o sinal original de suas amostras é a **taxa de Nyquist**
- O intervalo correspondente T = 1/2B é o **intervalo de Nyquist**
- Não é necessário tomar amostras em um intervalo uniforme

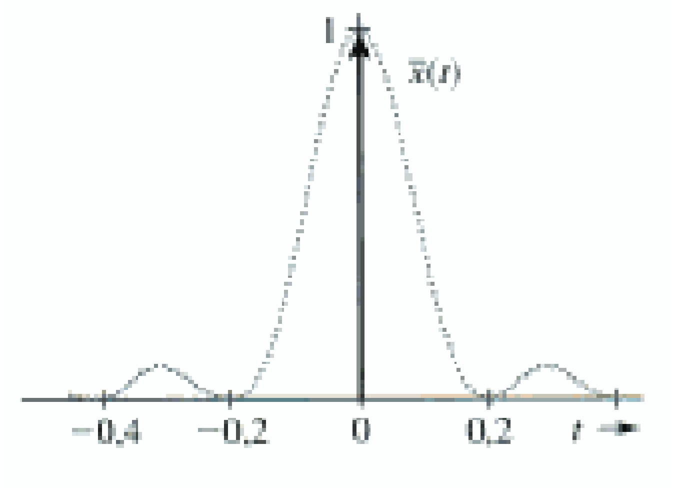
Teorema da Amostragem (vi)

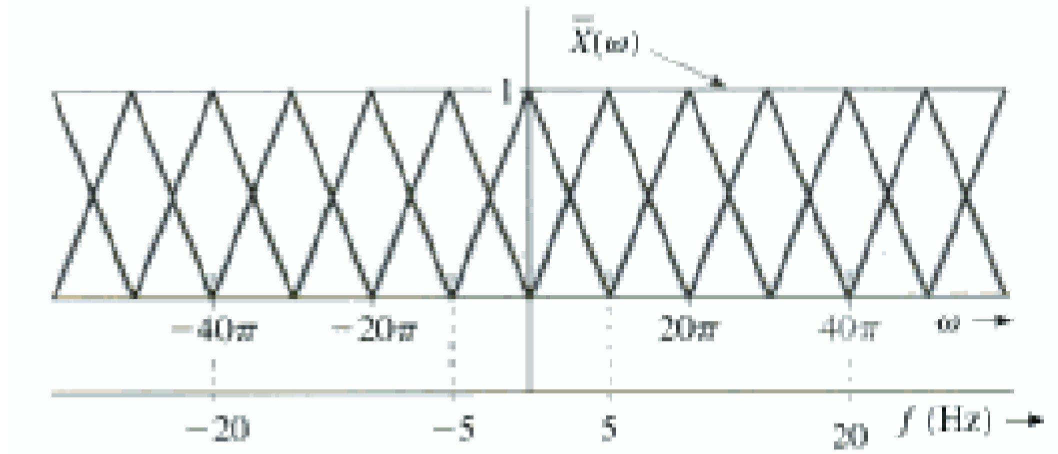
- Exemplo:
  - Considerando o sinal $x(t) = \text{sinc}^2(5\pi t)$ de largura 5Hz e taxa de Nyquist de 10Hz, ilustra-se amostrar o sinal na taxa de Nyquist, em uma taxa inferior e a uma superior a ela.



Teorema da Amostragem (vii)

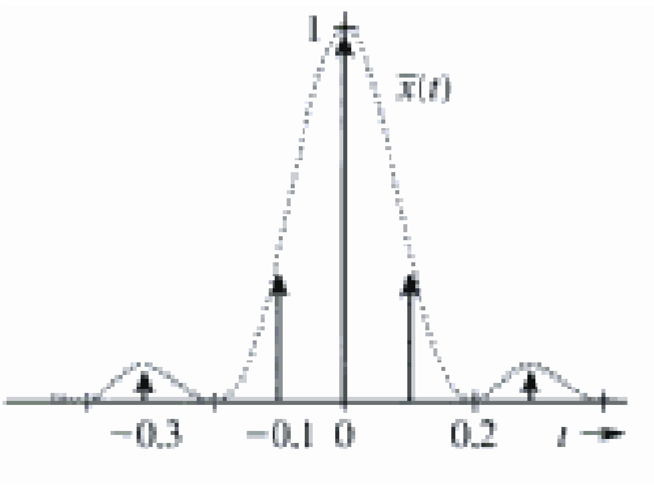
- Exemplo:
  - Subamostragem

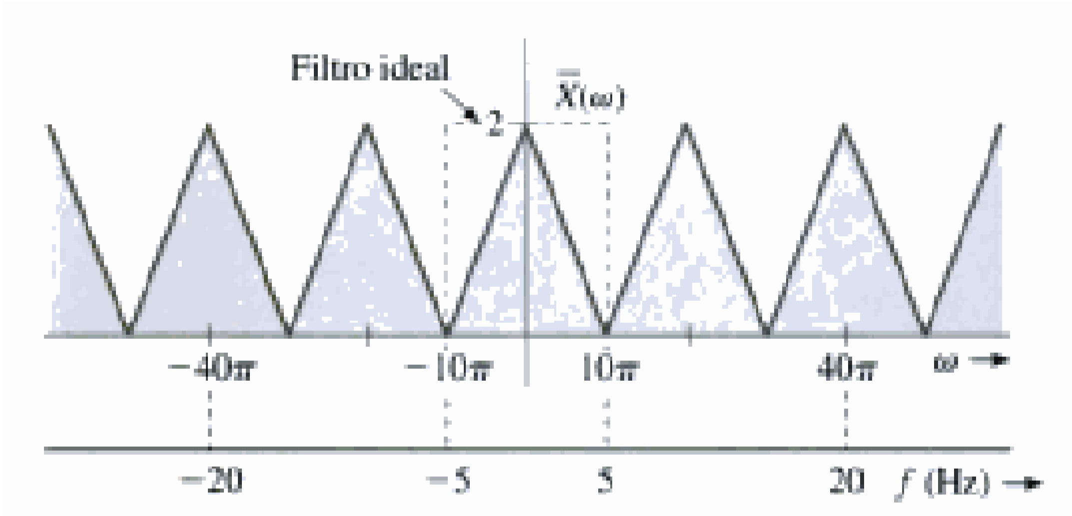




Teorema da Amostragem (vii)

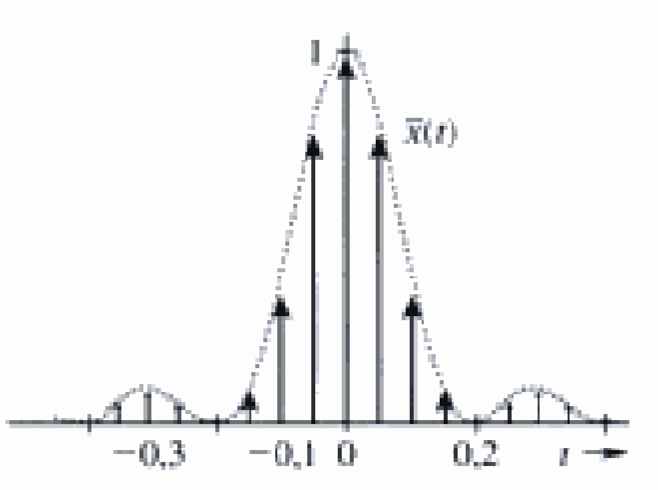
- Exemplo:
  - Taxa de Nyquist

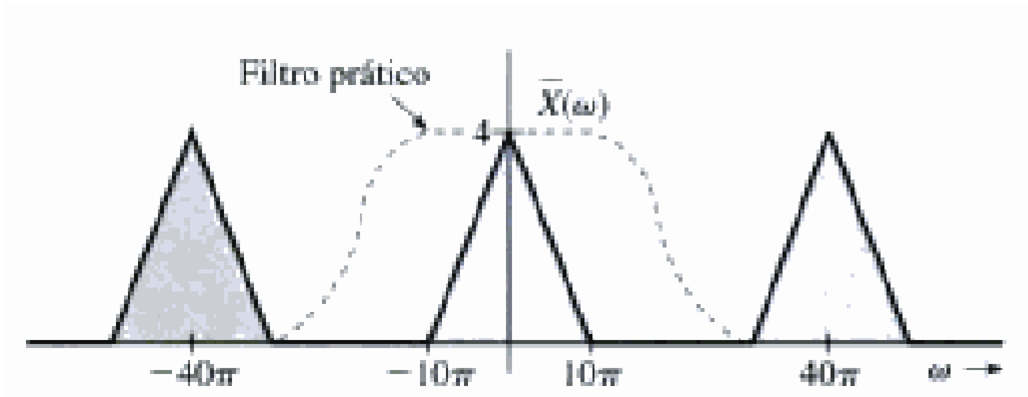




Teorema da Amostragem (vii)

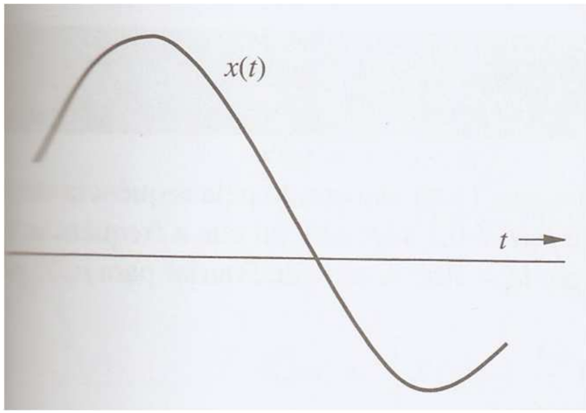
- Exemplo:
  - Superamostragem

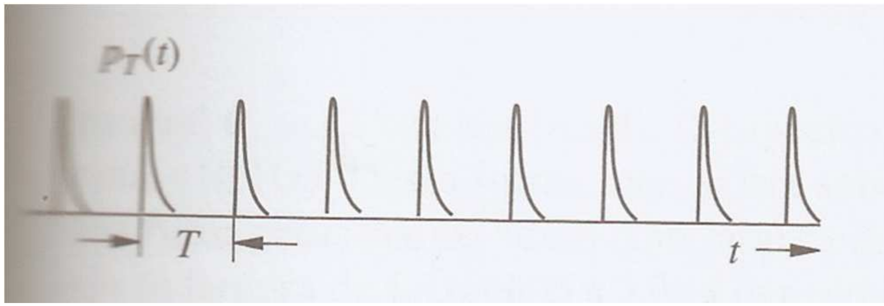


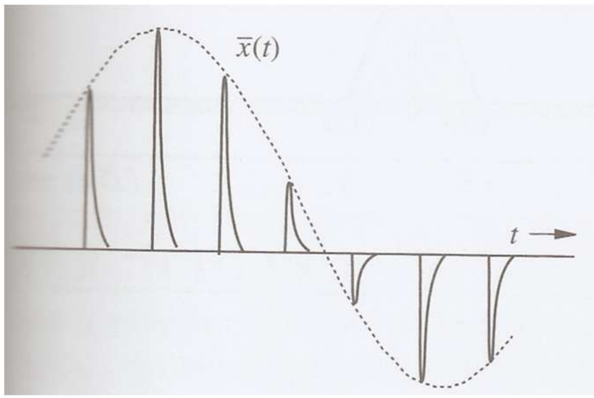


Teorema da Amostragem (viii)

- Amostragem Prática
  - O trem de impulsos é fisicamente não realizável;
  - Emprega-se trem de pulsos de largura finita.

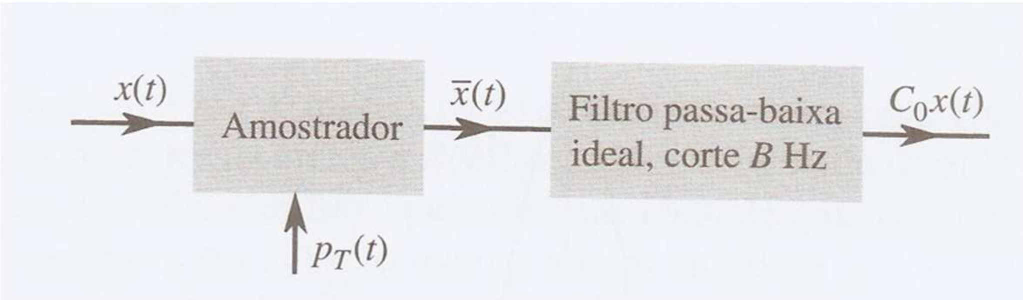


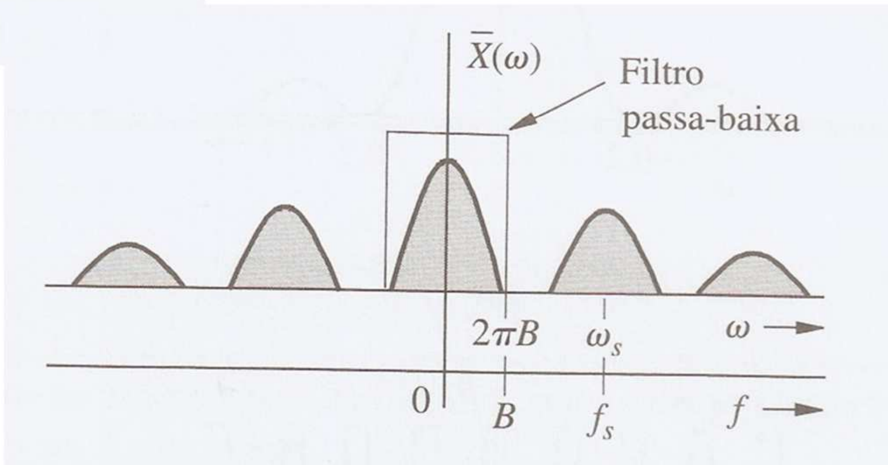




Teorema da Amostragem (ix)

- Amostragem Prática
  - É possível recuperar o sinal a partir dessa amostragem empregando um filtro passa-baixa no qual $\omega_s > 4\pi B$.





Teorema da Amostragem (x)

- Amostragem Prática
  - A reconstrução do sinal requer o conhecimento dos valores das amostras de Nyquist.
  - Informação embutida no sinal amostrado pois o valor do n-ésimo pulso amostrado é $x(nT)$.
  - Seja o trem de pulsos:

$$p_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

  - O sinal amostrado é descrito por:

$$\overline{x}(t) = x(t)\,p_T(t) = x(t)\left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n)\right]$$

$$\overline{x}(t) = x(t)\,p_T(t) = x(t)C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x(t) \cos(n\omega_s t + \theta_n)$$

Reconstrução do Sinal (i)

- O que é interpolação?
  - Um sinal $x(t)$ limitado pela largura banda igual a B Hz é reconstruído, por interpolação, a partir de suas amostras se a taxa mínima de amostragem for $f_s = 2B$ e o período máximo de amostragem for $T_s = 1/(2B)$.
- Reconstrução é feita passando o sinal amostrado por um filtro passa-baixa ideal de ganho T e largura de banda entre B e f_s-B Hz.
  - Do ponto de vista prático, a frequência adotada é $f_s/2=1/2T$ HZ ou π/T rad/seg. Este valor permite pequenos desvios nas características do filtro idela em ambos os lados da frequência de corte.
- Para esta escolha de frequência de corte e ganho T, o filtro passa-baixa ideal para a recombinação do sinal é:

$$\mathrm{H}(\omega) = T\ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi f_s}\right) = T\ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

Reconstrução do Sinal (ii)

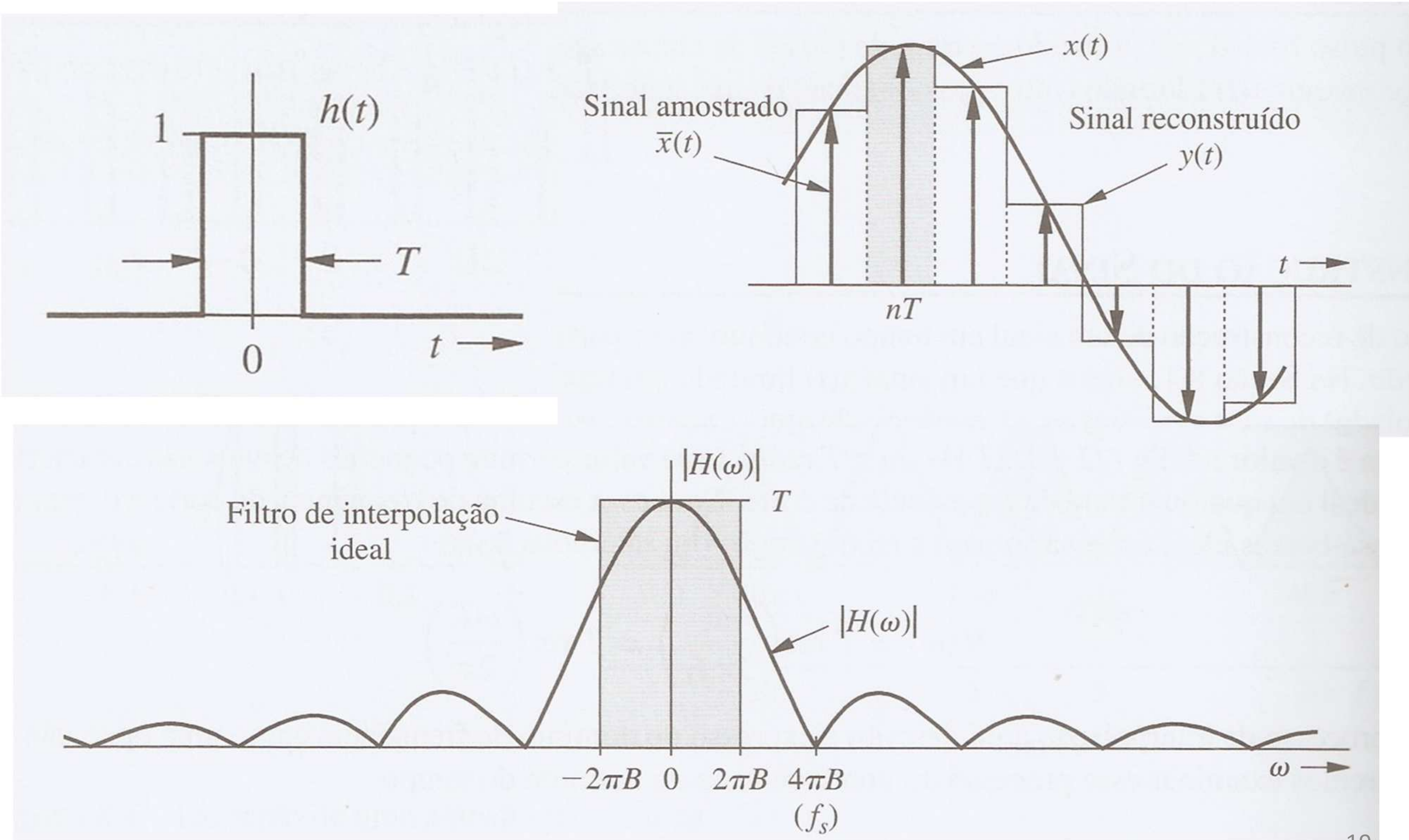
- Interpolação simples do ponto de vista do domínio do tempo.
- Um filtro passa-baixa ideal para reconstruir o sinal tem a seguinte resposta ao impulso:

$$h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow H(\omega) = T\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

  – Esta é a resposta a uma função portal unitária expandida que é centrada na origem e tem largura *T* (intervalo de amostragem).

- A seguir é mostrada uma interpolação simples por circuito de manutenção de ordem zero (ZOH): Resposta ao impulso do circuito ZOH, sinal reconstruído por ZOH no domínio do tempo e resposta na frequência de ZOH.
  – Para isto, lembrar que $h(t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}(Wt) \Leftrightarrow H(\omega) = rect\left(\frac{\omega}{2W}\right)$

Reconstrução do Sinal (iii)



Reconstrução do Sinal (iv)

- Interpolação ideal
- Um filtro cuja resposta ao impulso, transformada inversa de Fourier a *H*(*ω*), é

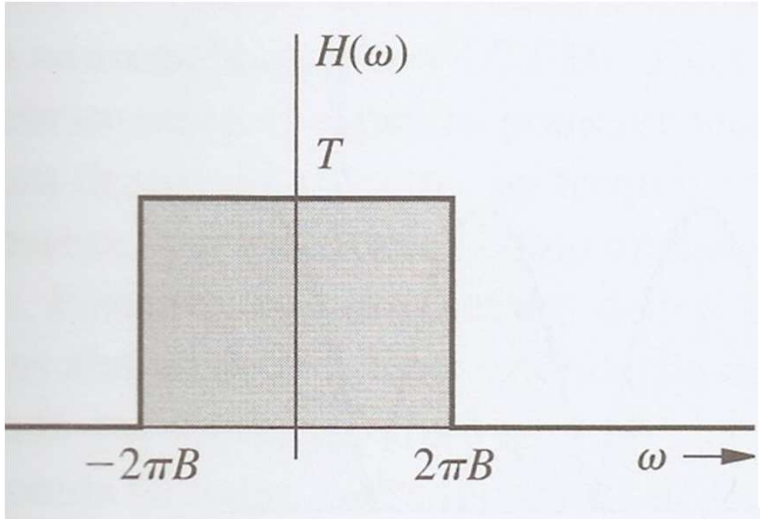
$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right),$$

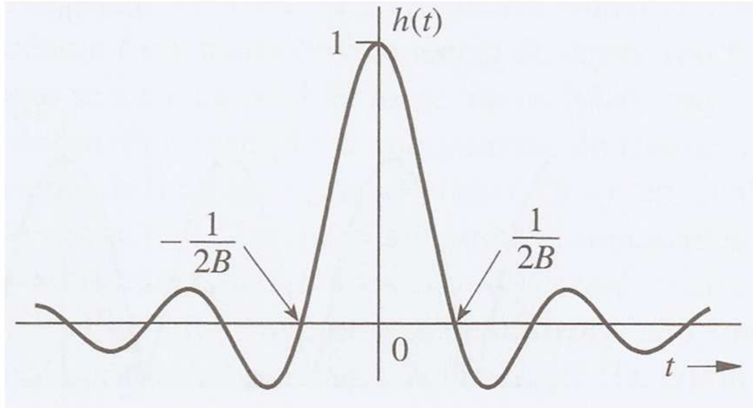
$$\text{Para} \quad T = 1/2B \quad \text{tem - se} \quad h(t) = \text{sinc}\,(2\pi Bt)$$

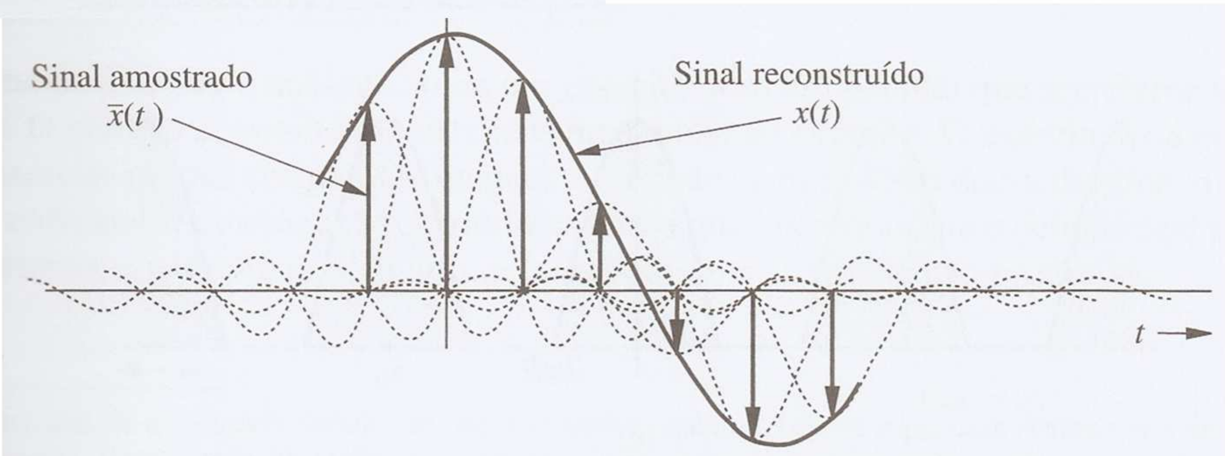
- Esta resposta é um pulso *sinc* tendo altura igual à magnitude da amostra.
- Saída:

$$x(t) = \sum_n x(nT)h(t - nT) = \sum_n x(nT)\text{sinc}\left[\frac{\pi}{\mathrm{T}}(t - nT)\right]$$

Reconstrução do Sinal (v)



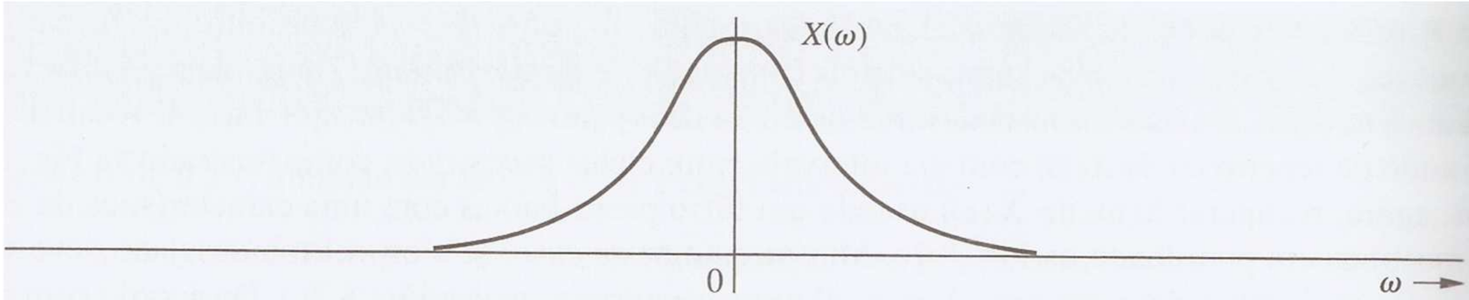


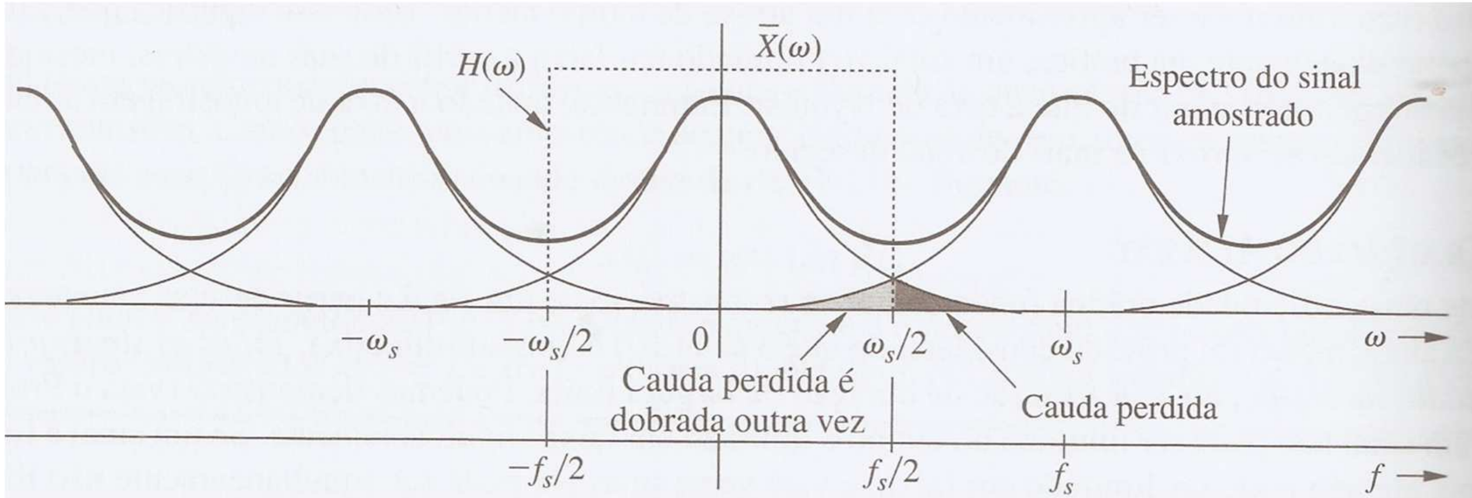


Reconstrução do Sinal (vi)

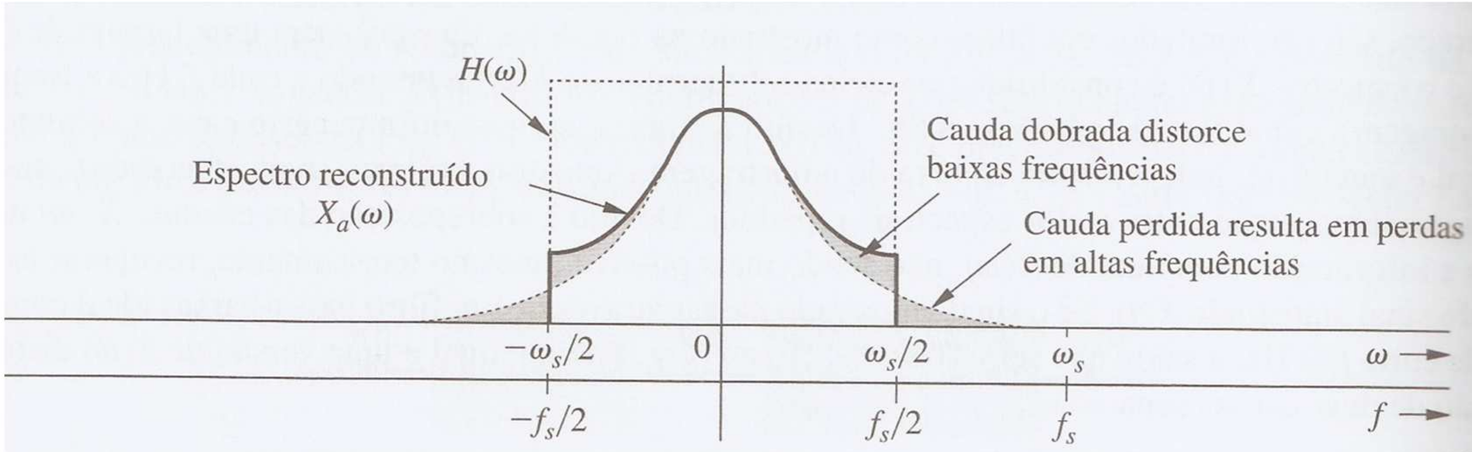
- Reconstrução do ponto de vista prático
  - Problema irreparável;
  - Sinais práticos são limitados no tempo;
  - Perda da cauda do sinal no domínio da frequência;
  - Aliasing
    - Conceito
    - Correção

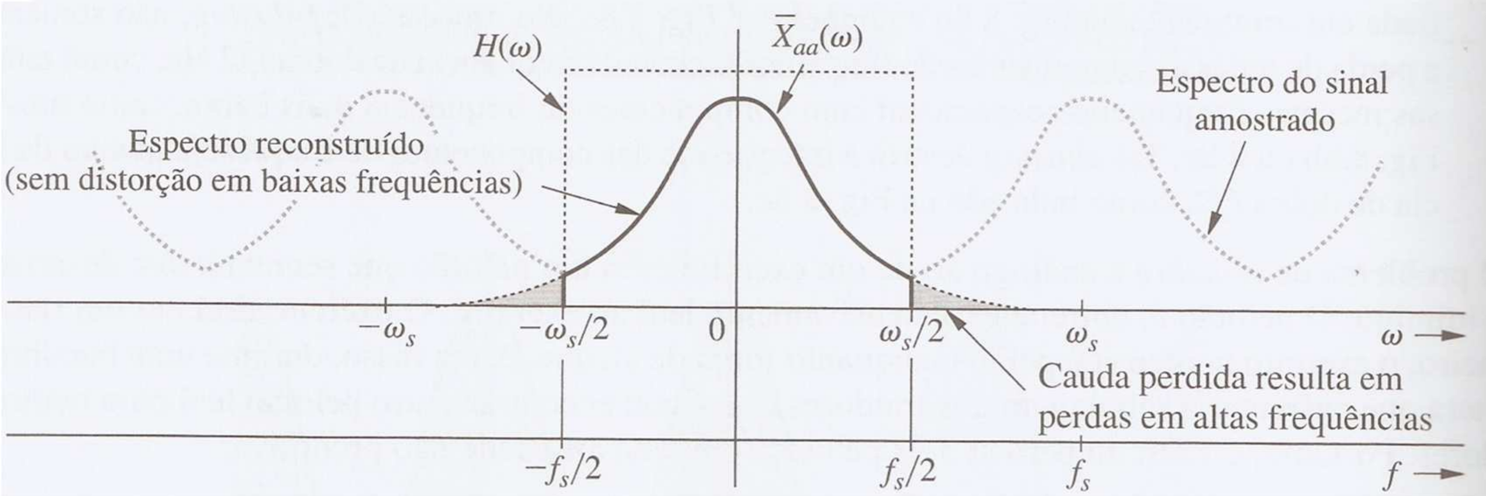
Reconstrução do Sinal (vii)





Reconstrução do Sinal (viii)

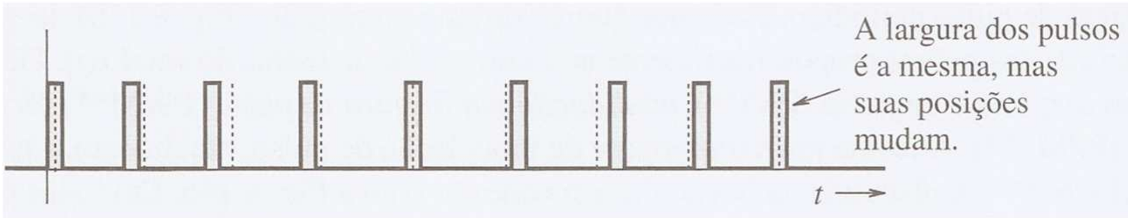


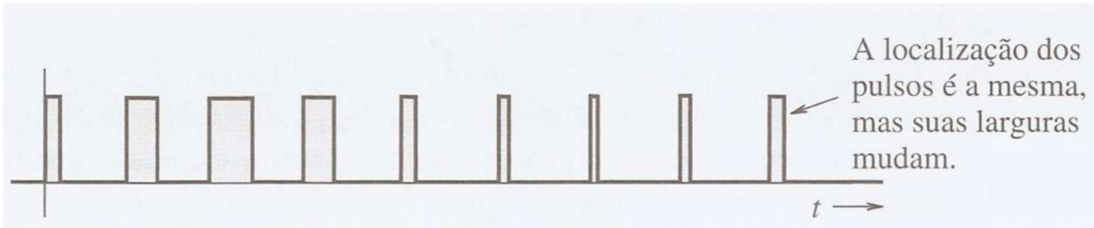


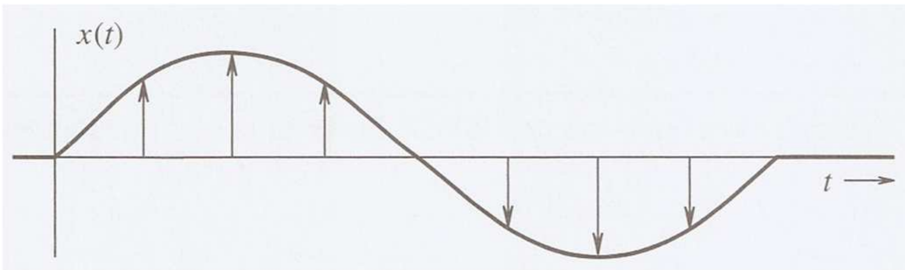
Reconstrução do Sinal (ix)

- Aplicações do teorema da amostragem melhorar
  - Pode-se utilizar o valor das amostras para variar os parâmetros de um trem de pulsos periódico
- Amplitude - (PAM - Pulse-Amplitude Modulation)
- Largura - (PWM - Pulse-Width Modulation)
- Posição - (PPM - Pulse-Position Modulation)
- Tempo – (TDM - Time-Division Multiplexing)

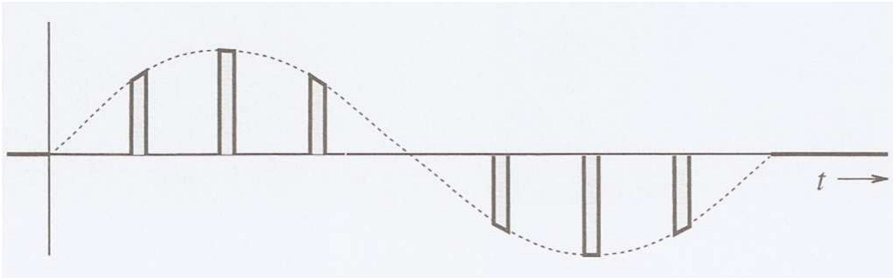
Reconstrução do Sinal (x)

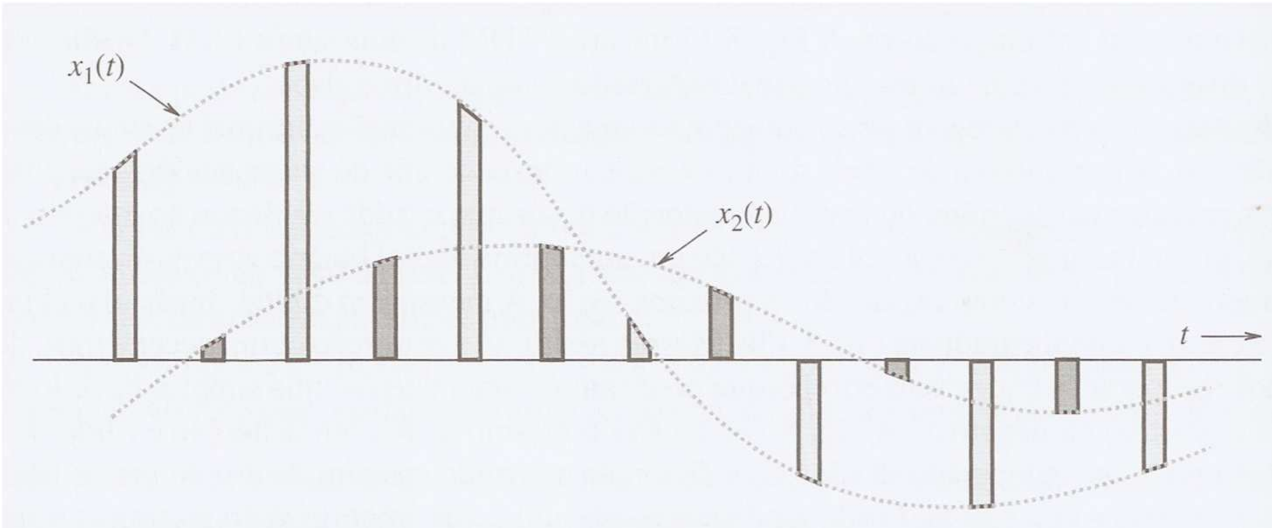






Reconstrução do Sinal (xi)





Exercícios Recomendados

- Propostos para o MATLAB ou SCILAB
  - Todos
- Problemas
  - 8.1-1 até 8.1-6.
  - 8.2-1 até 8.2-5.