

Probabilidade

Modelos de Distribuições

Contínuas:

Distribuição Uniforme

Distribuição Exponencial

Distribuição Normal

Renata Souza

Distribuição Uniforme

- Seja X uma variável aleatória que representa o tempo de voo de uma aeronave viajando de Chicago até Nova York.
- Suponha que o tempo de voo pode ser qualquer valor no intervalo de 120 até 140 minutos.
- Suponha que os intervalos de um minuto são equiprováveis.
- Parâmetro da distribuição: um intervalo $[a,b]$

Distribuição Uniforme

Uma variável aleatória X tem distribuição Uniforme Contínua no intervalo $[a, b]$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação:

$$X \sim U(a, b)$$

Distribuição Uniforme

A função de distribuição $F(x)$ é dada por:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$

Logo, $F(x) = 0$ se $x \leq a$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ se } a < x < b$$

$$F(x) = 1 \text{ se } x \geq b$$

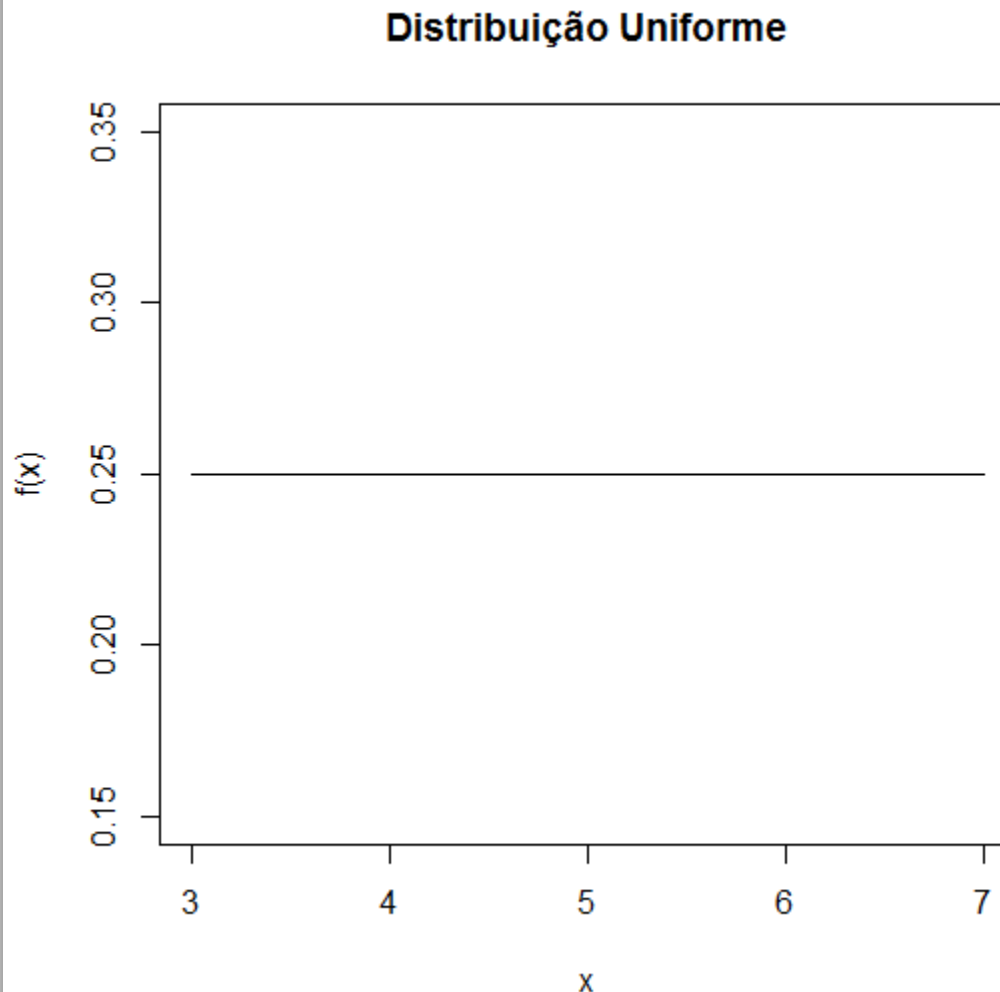
Valor Esperado

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Variância

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo: $X \sim U[3,7]$



Exemplo:

- Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta $[0,2]$. Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e $3/2$?

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \text{ para } 0 \leq x \leq 2$$

$$P(1 \leq x \leq \frac{3}{2}) = \int_1^{1,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}$$

Distribuição Exponencial

- É muito útil para descrever o tempo que se leva para completar uma tarefa. Exemplo:
 - O tempo para carregar um caminhão considerando que em média gasta-se 15 minutos para realizar esta tarefa.
- Outras situações típicas:
 - Tempo de chegadas de pacotes em um roteador, tempo de vida de aparelhos, tempo de espera em restaurantes, caixas de banco, etc.
- Parâmetro: média (ex: tempo médio) ou valor esperado.

Distribuição Exponencial

Uma variável aleatória contínua X , assumindo valores não negativos, segue o modelo Exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua densidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Distribuição Exponencial

A função de distribuição $F(x)$ é dada por:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = (1 - e^{-\lambda x})$$

Logo, $F(x) = 0$ se $x \leq 0$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ se } x > 0$$

Valor Esperado

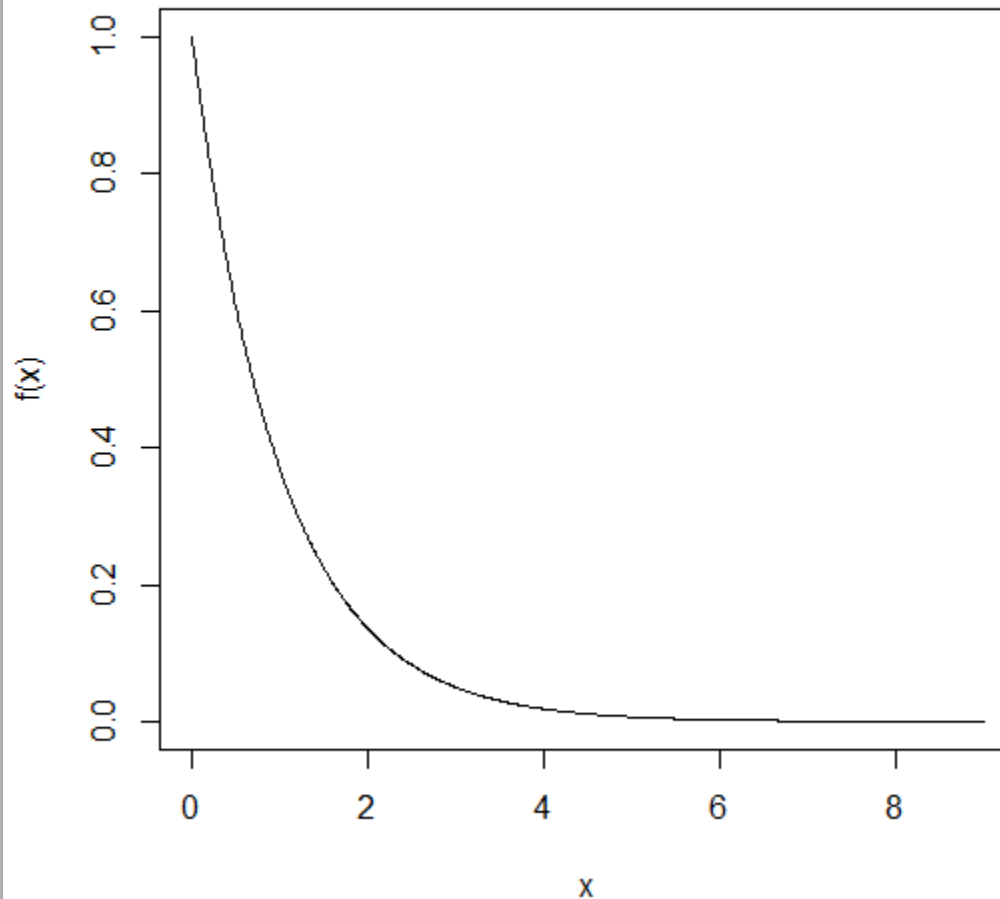
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Variância

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemplo: $X \sim \text{Exp}[1]$

Distribuição Exponencial



Exemplo:

- Os defeitos de um tecido seguem a distribuição de Poisson com média de um defeito a cada 400m. Qual a probabilidade de que o intervalo entre os dois defeitos consecutivos seja entre 800m e 1000m?

$$\mu = \lambda t, \text{ logo } 1 = \lambda 400 \quad \text{e} \quad \lambda = 1/400$$

$$P(800 \leq t \leq 1000) = P(t \geq 800) - P(t \geq 1000)$$

$$= e^{-\frac{800}{400}} e^{-\frac{1000}{400}} = e^{-2} - e^{-2,5} = 0,0532 = 5,32\%$$

Distribuição Normal

- Tem sido usada em uma ampla variedade de aplicações práticas nas quais as variáveis aleatórias são:
 - Alturas e pesos de pessoas
 - Medições
 - Índices, etc.
- Parâmetros: média e desvio padrão.
- Exemplo:
 - Os salários dos diretores das empresas em São Paulo, distribuem-se normalmente com média de R\$ 20.000,00 e desvio padrão de R\$ 500,00.

Distribuição Normal

Dizemos que uma variável aleatória contínua X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 , se sua função de densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

Notação:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Distribuição Normal

Principais características

- O ponto máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$.
- Os pontos de inflexão da função são:
 $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$
- A curva é simétrica com relação a μ .

Valor Esperado

$$E(X) = \mu$$

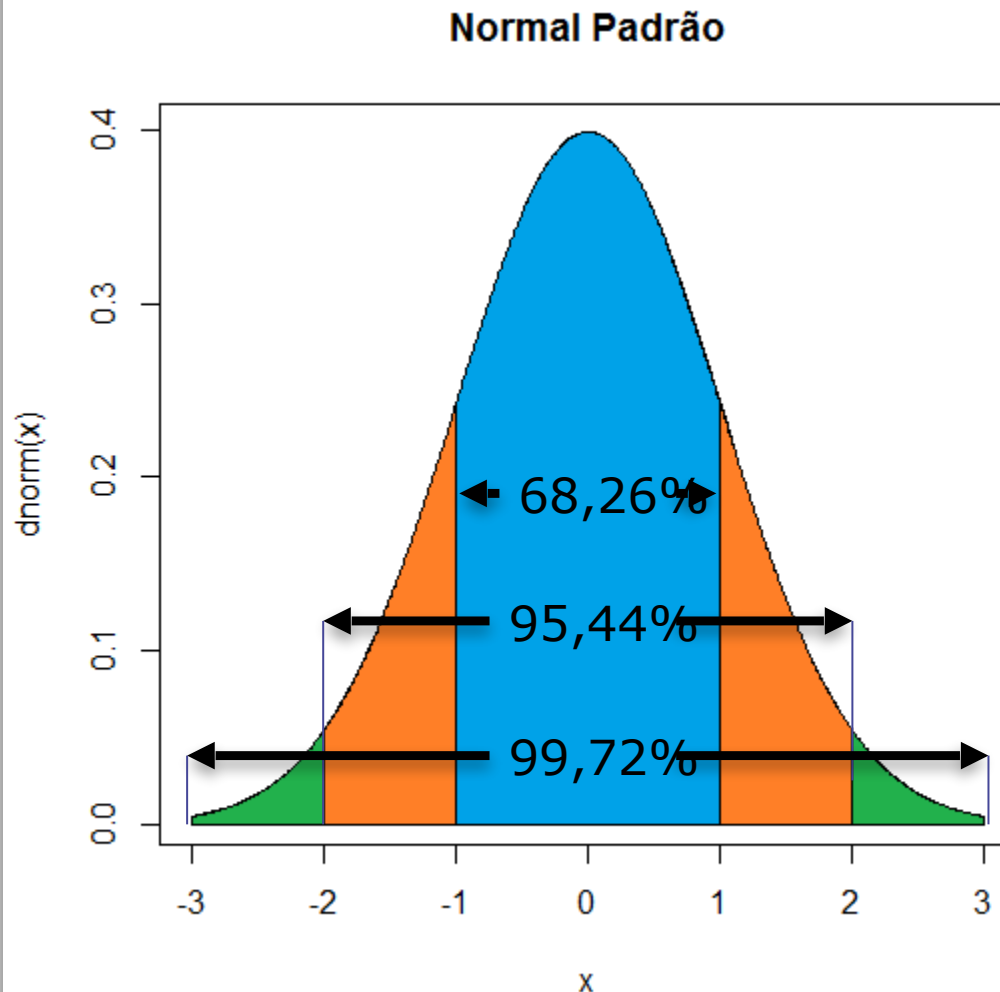
Variância

$$Var(X) = \sigma^2$$

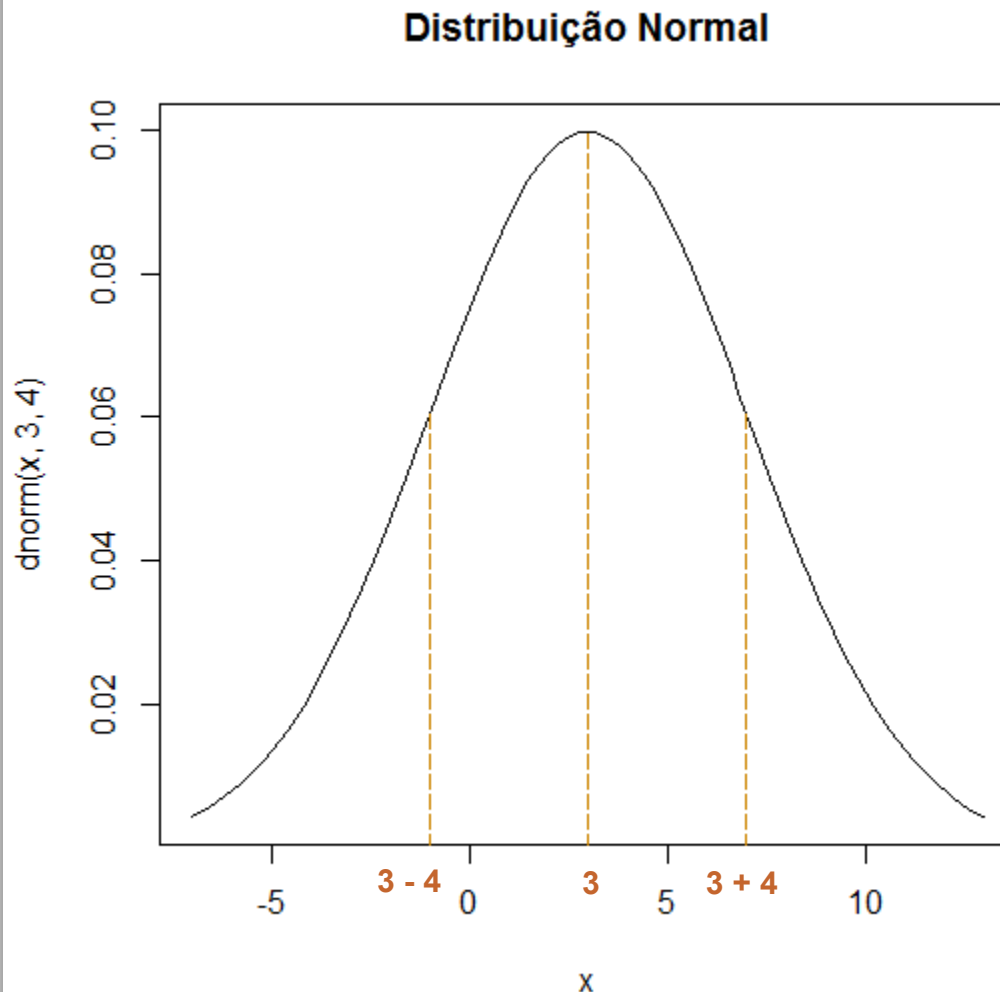
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então a variável aleatória

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Exemplo: $Z \sim N(0, 1)$

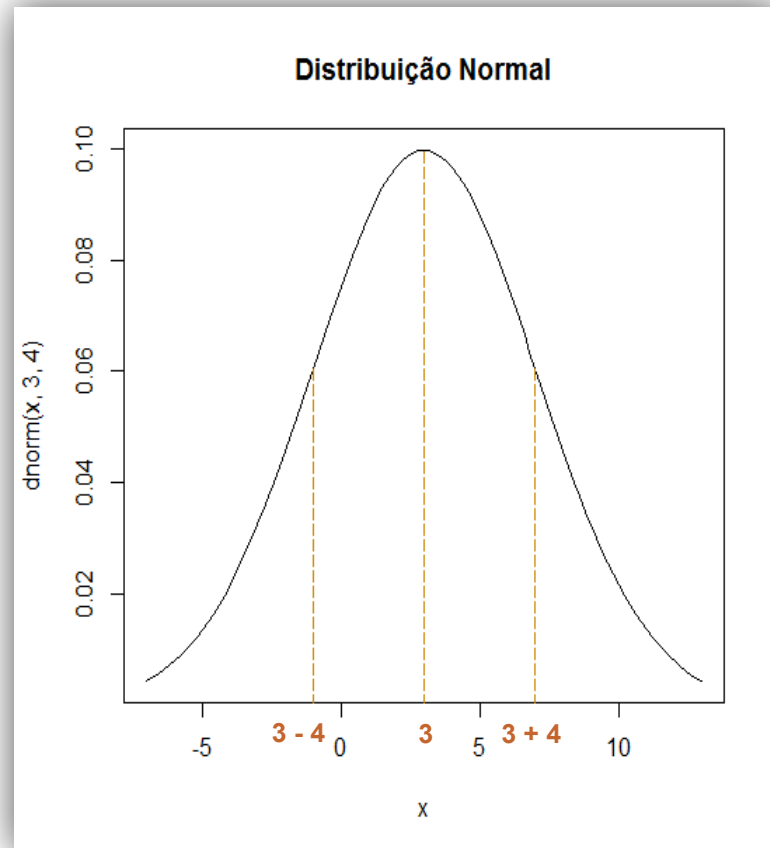


Exemplo: $X \sim N(3, 16)$



Probabilidades

$$P(-1 \leq X \leq 3) =$$
$$P(3 \leq X \leq 7)$$

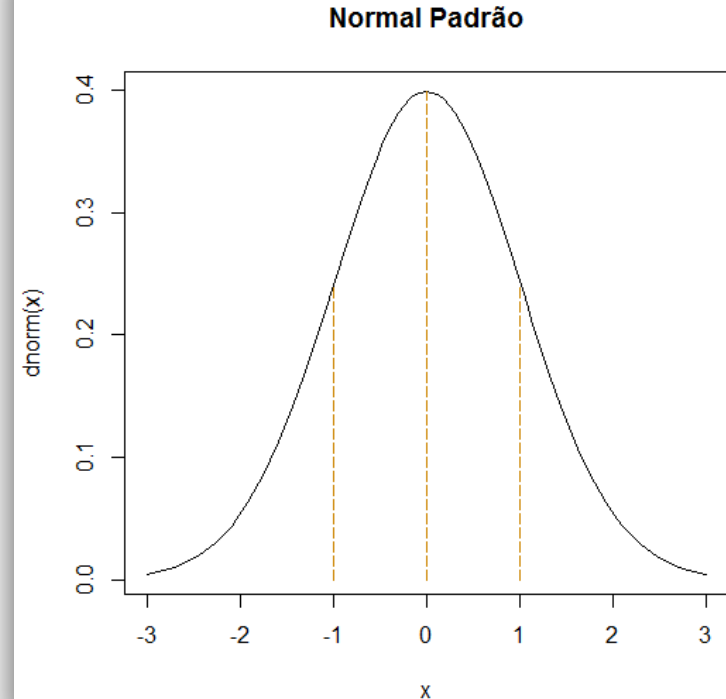


Probabilidades

$$P(-1 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}$$



$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(z_1 \leq Z \leq z_2)$$

Exemplo:

- As alturas dos alunos de determinada escola são normalmente distribuídas com média 1,60m e desvio-padrão 0,30m. Encontre a probabilidade de um aluno medir entre 1,50m e 1,80m?

$$P(1,50 \leq X \leq 1,80) = P(z_1 \leq z \leq z_2)$$

$$z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1,50 - 1,60}{0,30} = -0,33 \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1,80 - 1,60}{0,30} = 0,67$$

$$P(-0,33 \leq z \leq 0,67) = 0,1293 + 0,2486 = 0,3779$$

$$= \mathbf{37,79\%}$$

Exercícios

- Um ponto é escolhido ao acaso na reta $[1,4]$. Calcular:
 - a. Probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 2 e 3;
 - b. Entre 0,5 e 2,5;
 - c. Seja exatamente 2;
 - d. A média dessa distribuição;
 - e. A variância dessa distribuição.

Exercícios

- Se as interrupções no suprimento de energia elétrica ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com a média de uma interrupção por mês(4 semanas), qual a probabilidade de que entre duas interrupções consecutivas haja um intervalo de :
 - a. Menos de uma semana;
 - b. Entre dez e doze semanas;
 - c. Exatamente um mês;
 - d. Mais de três semanas.

Exercícios

- Suponha que o diâmetro médio dos parafusos produzidos por uma fábrica é de 0,25 polegadas, e o desvio-padrão 0,02 polegadas. Um parafuso é considerado defeituoso se seu diâmetro é maior que 0,28 polegadas e menor que 0,20 polegadas.
 - a. Encontre a porcentagem dos parafusos defeituosos;
 - b. Qual deve ser a medida mínima para que tenhamos no máximo 12% de parafusos defeituosos? (Considerando apenas que um parafuso é defeituoso abaixo desse valor mínimo)