Probabilidade

Modelos de Distribuições Discretas:

Distribuição de Bernoulli

Distribuição Binomial

Distribuição Geométrica

Distribuição de Poisson

Distribuição Hipergeométrica

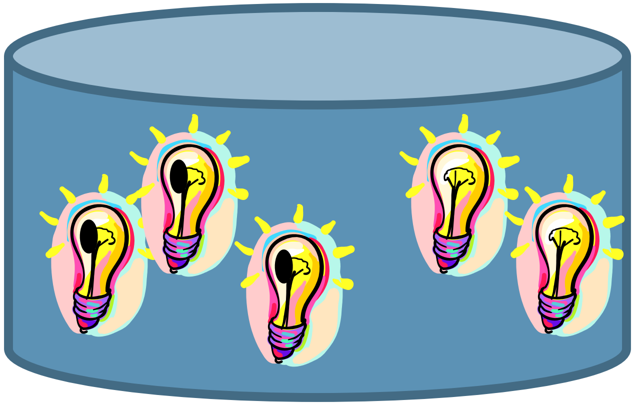
Renata Souza

Centro de Informática UFPE

Distribuição de Bernoulli

Uma lâmpada é escolhida ao acaso

Ensaio de Bernoulli



Número de ensaios = 1

Sucesso:
A lâmpada é defeituosa

X = 0 se a lâmpada não é defeituosa
X = 1 se a lâmpada é defeituosa

P(X=1) = 3/5
P(X=0) = 2/5

Distribuição de Bernoulli

- Seja X uma V.A. com dois resultados possíveis:
  - Fracasso
  - Sucesso

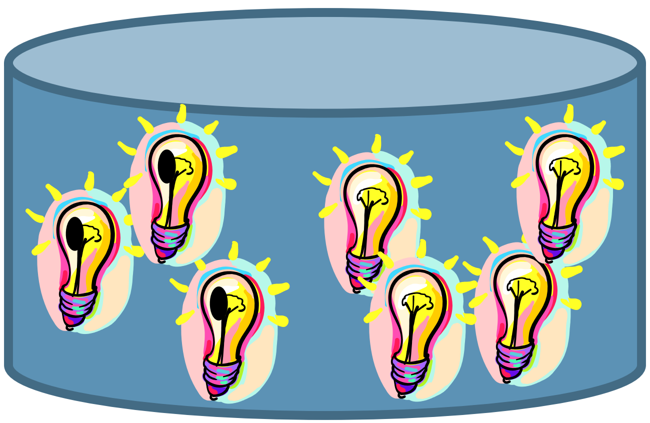
- $X \rightarrow x_1 = 1$ sucesso; $P(X=1) = p$
- $X \rightarrow x_1 = 0$ fracasso; $P(X=0) = 1 - p = q$

- Valor esperado: $E(X) = \mu_X = p$

- Variância: $Var(X) = \sigma^2 = pq$

Centro de Informática UFPE

Distribuição Binomial



3 Ensaios de Bernoulli, $n = 3$

$P(\text{defeituosa}) = p = 3/7$

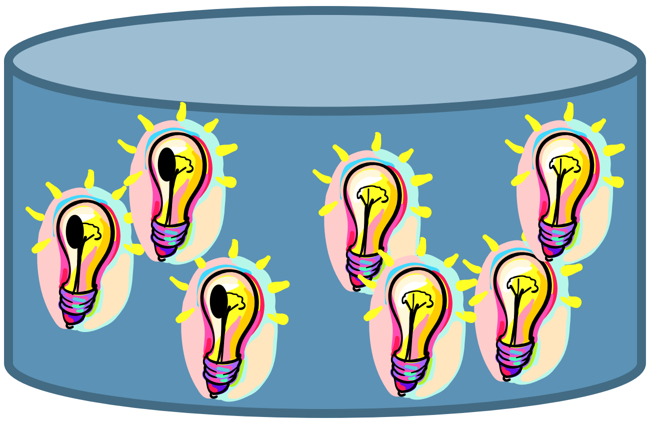
$P(\text{não defeituosa}) = 1 - p = 4/7$

Seja X o número de defeituosas

1. O experimento consiste de três ensaios idênticos;
2. Dois resultados são possíveis;
3. As probabilidades p e (1 – p) são as mesmas em cada ens
4. Os ensaios são **independentes** (com reposição).

Centro de Informática UFPE

Distribuição Binomial



P(defeituosa) = p = 3/7
P(não defeituosa) = (1 – p) = 4/7

Seja X o número de defeituosas

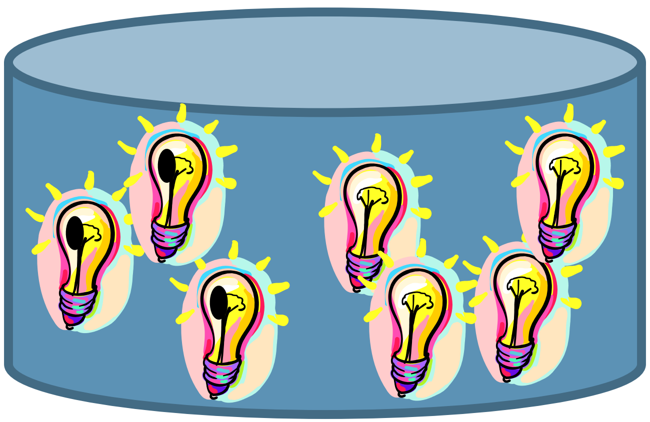
S= { 111, 110, 101, 011, 001, 010, 100, 000}

X = 0 -> {000}
X = 1 -> {001, 010, 100}
X = 2 -> {110, 101, 011}
X = 3 -> {111}

P(001) = 4/7 × 4/7 × 3/7 = 48/343
P(010) = 4/7 × 3/7 × 4/7 = 48/343
P(100) = 3/7 × 4/7 × 4/7 = 48/343

P(X=1) = P(001) + P(010) +

Distribuição Binomial



Seja X o número de defeituosas

P(X=1) = P(001) + P(010) + P(100)

P(X=1) = 3 × 48/343

$$P(X=1)=\binom{3}{1}(3/7)^{1}(4/7)^{2}$$

Distribuição Binomial

Função de Probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}(p)^x(1-p)^{n-x}$$

onde:

p(x) = a probabilidade de x sucessos em n ensaios

n = o número de ensaios

p = probabilidade de um sucesso em um ensaio

(1-p) = probabildidade de um fracasso em um ensaio

$X \sim B(n,p)$

Distribuição Binomial

- Seja X uma V.A. Binomial com parâmetros *n* e *p*, onde *p* é a probabilidade de sucesso.
- $X \rightarrow \{0,1,2,..n\}$
- Valor esperado: $E(X) = \mu_X = np$
- Variância: $Var(X) = \sigma^2 = npq$

Exemplo

Considere uma loja de roupas que receba 3 clientes

p = o cliente faz compra = 0,30
(1-p) = o cliente não faz compra = 0,70

X - número de clientes que compram

x	p(x)
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027

Total 1,00

$\longrightarrow \frac{3!}{0!3!}(0,30)^0(0,70)^3$

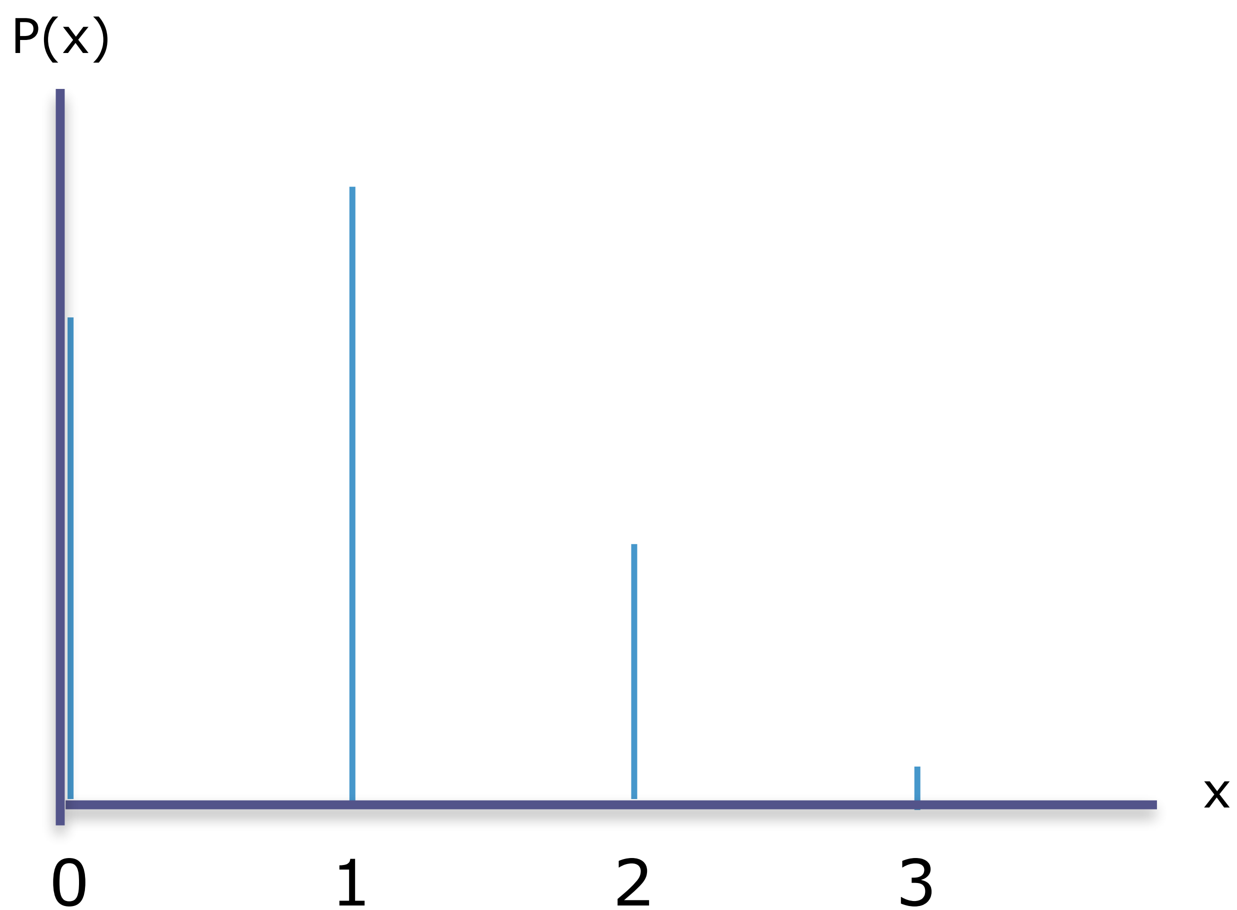
$\longrightarrow \frac{3!}{1!2!}(0,30)^1(0,70)^2$

$\longrightarrow \frac{3!}{2!1!}(0,30)^2(0,70)^1$

$\longrightarrow \frac{3!}{3!0!}(0,30)^3(0,70)^0$

Exemplo: Representação Gráfica

Função de Probabilidade



Exemplo: Características

Valor esperado **Variância**

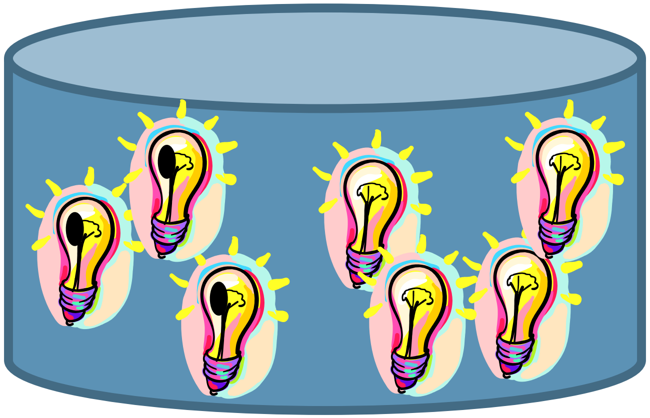
$$E(X) = \mu = np \quad Var(X) = \sigma^2 = np(1 - p)$$

Considerando o exemplo, temos

$$E(X) = \mu = 3 \times 0{,}30 = 0{,}90$$

$$Var(X) = \sigma^2 = np(1\text{-}p) = 3 \times 0{,}30 \times 0{,}70 =$$

Distribuição Geométrica



3 Ensaios de Bernoulli, n = 3

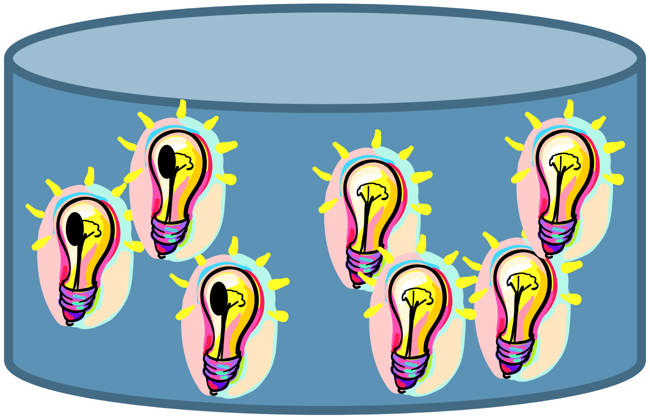
P(defeituosa) = p = 3/7

P(não defeituosa) = 1 – p = 4/7

Seja Y o número de lâmpadas defeituosas retiradas antes de se retirar uma não defeituosa

1. O experimento consiste em três ensaios idênticos;
2. Dois resultados são possíveis;
3. As probabilidades p e (1-p) são as mesmas em cada ensai
4. Os ensaios são **independentes** (com reposição).

Distribuição Geométrica



Qual é a probabilidade de que seja tirada a primeira lâmpada não defeituosa na terceira tentativa?

Seja Y o número de tentativas antes de se retirar uma lâmpada boa

P(Y=2) = P(defeituosa) × P(defeituosa) × P(não defeituosa)

$P(Y=2) = 3/7 \times 3/7 \times 4/7$

$P(Y=2) = (3/7)^2 \times 4/7$

Distribuição Geométrica

Considerando uma sequência de Ensaios de Bernoulli, a Distribuição Geométrica pode ser vista como a probabilidade de ocorrer *k* ensaios até que haja o primeiro sucesso

Função de Probabilidade:

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k}$$

X ~ G(p)

Distribuição Geométrica

Observe que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

(progressão geométrica)

Valor Esperado

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Variância

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemplo

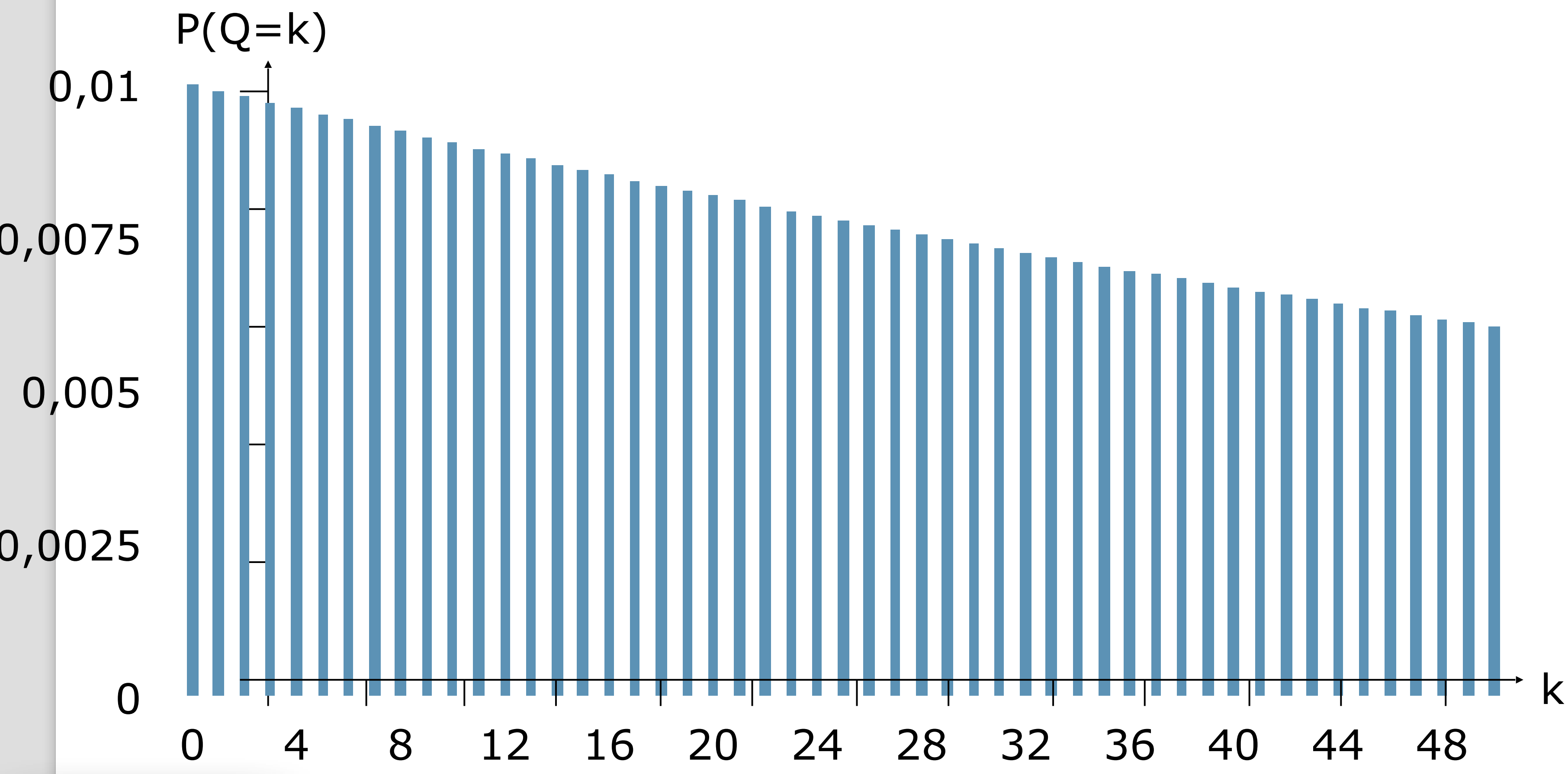
Uma linha de produção possui probabilidade de 0,01 de produzir uma peça defeituosa. Sabendo que a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é produzida, estude o comportamento da probabilidade em função da quantidade de peças produzidas antes de ocorrer a primeira defeituosa.

Q ~ quantidade de peças boas produzidas antes de uma defeituosa

$$P(Q = k) = 0{,}01 \times 0{,}99^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplo

Função de Probabilidade



Distribuição de Poisson

- Carros que passam por um cruzamento por minuto, durante uma certa hora do dia.
- Erros tipográficos por página, em um material impresso.
- Problemas de filas de espera (pacotes perdidos em roteadores, por exemplo)
- Defeitos por unidade (m^2, m, etc) por peça fabricada
- Mortes por ataque de coração por ano, numa cidade.

Distribuição de Poisson

- Representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória que registra o número de ocorrências sobre um intervalo de tempo ou espaço específicos.

- Propriedades do experimento Poisson:
  - A probabilidade de uma ocorrência é a mesma para quaisquer dois intervalos de tempo.
  - A ocorrência ou não ocorrência em qualquer intervalo é independente da ocorrência ou não-ocorrência em qualquer outro intervalo

Função de Probabilidade de Poisson

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$X \sim P(\lambda)$

- Uma variável aleatória de Poisson não tem limites. $x = 0,1,2,3,\ldots$
- $P(x)$ = a probabilidade de x ocorrências em um intervalo
- λ = valor esperado ou número médio de ocorrências em um intervalo
- $e = 2{,}71828$
- Valor esperado: $E(X) = \lambda$
- Variância: $Var(X) = \lambda$

Centro de Informática UFPE

Exemplo

- Suponha que é observado o número de chegadas a uma caixa automática de um banco durante um período de 15 minutos.

- A probabilidade de um carro chegar é a mesma para quaisquer dois períodos de tempo de igual cumprimento.

- A chegada ou não chegada de um carro em qualquer período de tempo é independente da chegada ou não chegada de um outro carro em qualquer outro período de tempo.

Exemplo

Suponha que o número médio de carros que chegam no período de 15 minutos é 10, então

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

X: número de carros que chegam em qualquer período de 15 minutos

A probabilidade de 5 chegadas em 15 minutos

$$P(X = 5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0{,}0378$$

E(X) = 10 e Var(X) = 10

Centro de Informática UFPE

Distribuição Hipergeométrica

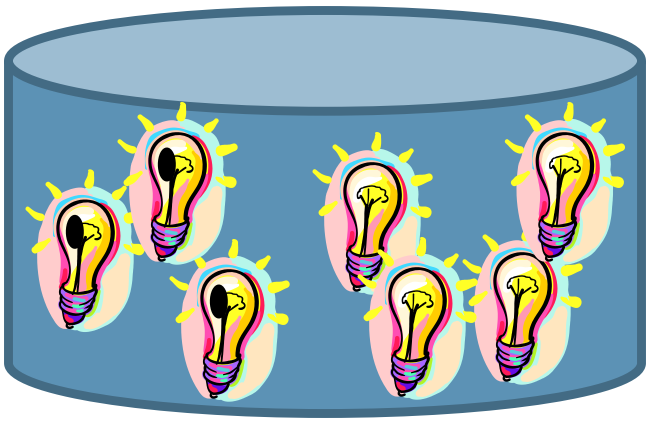
De maneira semelhante à distribuição binomial, a distribuição hipergeométrica:

1. O experimento é composto por *r* ensaios idênticos;
2. O conjunto é composto por dois tipos de objetos (ou seja, dois resultados são possíveis);
3. **Não há reposição (os ensaios passam a ser dependentes)**.

Binomial → Ensaios de Bernoulli **com reposição**

Hipergeométrica → Ensaios de Bernoulli **sem reposição**

Distribuição Hipergeométrica



Qual é a probabilidade de se tirar uma lâmpada defeituosa em três ensaios **sem reposição**?

Seja X o número de defeituosas

$P(001) = 4/7 \times 3/6 \times 3/5 = 36/210$

$P(010) = 4/7 \times 3/6 \times 3/5 = 36/210$

$P(100) = 3/7 \times 4/6 \times 3/5 = 36/210$

$P(X=1) = P(001) + P(010) + P(100)$

$P(X=1) = 3 \times 36/210$

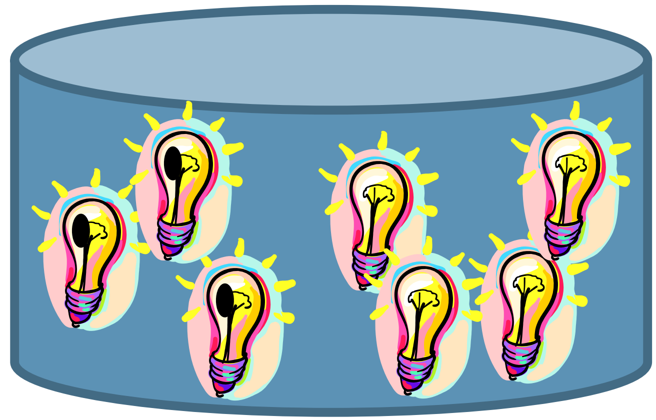
Distribuição Hipergeométrica

Seja X o número de defeituosas

P(X=1) = P(001) + P(010) + P(100)

P(X=1) = 3 × 36/210

P(X=1) = 3 × 6/35



$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}$$

3: número de lâmpadas def.
1: número de “sucessos”
4: número de lâmpadas não def.
2: número de “fracassos”
7: número total de lâmpadas
3: número total de ensaios

Distribuição Hipergeométrica

Função de Probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0,1,\ldots,\min(n, K)$$

onde:

$P(X = x)$: a probabilidade de *x* sucessos em *n* ensaios

K: número de objetos do tipo I (o que quer se retirar)

x: número de sucessos

$N - K$: número de objetos do tipo II

$n - x$: número de fracassos

N: número total de objetos

n: número total de ensaios

Distribuição Hipergeométrica

Representação:

$$X \sim H(N, K, n)$$

Fator de correção

Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Variância

$$Var(X) = np(1-p)\boxed{\frac{(N-K)}{(N-1)}}$$

Aonde $p = \frac{K}{N}$ (probabilidade de sucesso no conjunto)

Centro de Informática UFPE

Exercícios

- Em 320 famílias com 4 crianças cada uma, quantas se esperaria que tivessem:

  a. Nenhuma menina;
  b. Três meninos;
  c. 4 meninos.

Centro de Informática UFPE

Exercícios

- Suponha que haja em média 2 suicídios por ano numa população de 50.000. Em uma cidade de 100.000 habitantes, encontre a probabilidade de que em um dado ano tenha havido:

  a. 0;
  b. 1;
  c. 2;
  d. 2 ou mais suicídios.

Exercícios

Em uma pequena caixa existem 30 itens entre 4 tipos diferentes: água, fogo, terra e ar. Um homem curioso sem ver o interior da caixa, mas conhece seu conteúdo através de um papel ao lado com o seguinte escrito: 30-> 13 deles são de fogo, 7 são de ar e 3 de terra. Ele então resolve pegar um papel e ver qual a probabilidade:

a) De que o primeiro elemento de ar ocorra na 8ª retirada (com reposição). Aqui diga qual o valor esperado e a variância.

b) agora sem reposição, ao retirar 13 deles, que 4 deles sejam de água. Qual o Valor esperado?! E a variância?!