Probabilidade

Introdução de Variável Aleatória

Variável Aleatória Discreta

Variável Aleatória Contínua

Renata Souza

Centro de Informática UFPE

Introdução

- E: Lançamento de duas moedas
  - $\Omega = \{(c,c), (c,k), (k,k), (k,c)\}$.
- X: número de caras obtidas nas duas moedas
  - $R=\{0,1,2\}$
- $X=0 \rightarrow$ corresponde ao evento (c,c) com prob. ¼
- $X=1 \rightarrow$ corresponde aos eventos (k,c) e (c,k) com prob. 2/4
- $X=2 \rightarrow$ corresponde ao evento (k,k) com prob. 1/4

Centro de Informática UFPE

Definição

- Uma variável aleatória é uma variável (normalmente representada por X) que tem um único valor numérico, determinado por acaso, para cada resultado de um experimento.

- Uma variável aleatória pode ser contínua ou discreta.

Classificação de Variáveis

- Discreta
  - Tem ou um número finito de valores, ou uma quantidade enumerável de valores, onde "enumerável" se refere ao fato de que podem existir infinitos valores, mas que podem ser associados a um processo de contagem;
- Contínua
  - Tem infinitos valores, e esses valores podem ser associados com medidas em uma escala contínua, de modo que não há pulos ou interrupções.

Exemplos de Variável Aleatória Discreta

Experimento	Variável Aleatória X	Valores da Variável Aleatória
Contratar Clientes	Número de clientes que compram	0, 1, 2, 3, 4, 5
Inspecionar um embarque de 50 rádios	Número de rádios defeituosos	0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 49, 50
Vender um automóvel	Gênero do cliente	0 se masculino 1 se feminino
Vendas no Shopping	Número de clientes	0, 1, 2, 3, 4, 5........

Centro de Informática UFPE

Exemplos de Variável Aleatória Contínua

Experimento	Variável Aleatória X	Valores da variável Aleatória
Operar um banco	Tempo entre as chegadas dos clientes	$x \geq 0$
Encher um recipiente de refrigerante	Número de ml	$0 \leq x \leq 343$
Trabalhar em um projeto	Porcentagem do término do projeto após 6meses	$0 \leq x \leq 100$

Centro de Informática UFPE

Variável Aleatória

- Uma mesma variável aleatória pode ser considerada discreta ou contínua dependendo do tipo de experimento, do ponto de vista de quem a usa ou do contexto.

- Exemplo: tempo.

  Tempo gasto para percorrer uma certa distância por um carro: variável aleatória contínua;

  Tempo gasto pela luz para percorrer distâncias entre estrelas (anos-luz): variável aleatória discreta.

Função de Probabilidade (Distribuição de Probabilidade)

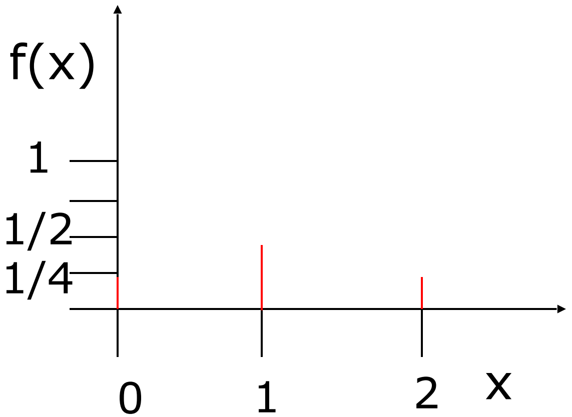
- Distribuição de probabilidade é um gráfico, uma tabela ou uma fórmula que dá a probabilidade para cada valor da variável aleatória. É uma associação entre a variável aleatória e sua probabilidade.

- Seja X uma variável aleatória discreta. A probabilidade de X assumir um valor x é uma função que se representa $P(X=x)$ ou $P(x)$.

- $P(X=x)$ determina a distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

Função de Probabilidade

Representação Gráfica



$$P(x) = \frac{1}{4}\binom{2}{x}, \qquad x = 0,1,2$$

Função de Probabilidade

x	f(x)
1	8
2	10
3	9
4	12
5	11
6	10

Representação por tabela

Total = 8+10+9+12+11+10 = 60

$P(X=3) = 9/60$

$P(X=5) = 11/60$

Função de uma variável aleatória

- Qualquer função de uma variável aleatória é também uma variável aleatória.
- Se X é uma V.A., então $Y=\varphi(x)$ é também uma V.A.
- Exemplo:
  - E:lançamento de dois dados
  - X: pontos de um dado
  - $Y=X_1+X_2 \rightarrow$ soma dos pontos de dois lançamentos
  - $Z=\max\{(X_{1,,}X_2)\}$ onde X_i – variável aleatória associada ao resultado do i-ésimo dado

Exemplo

Tabela: Função de Probabilidade de X

x	1	2	3	4	5	6
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Tabela: Função de Probabilidade de Y

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(Y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

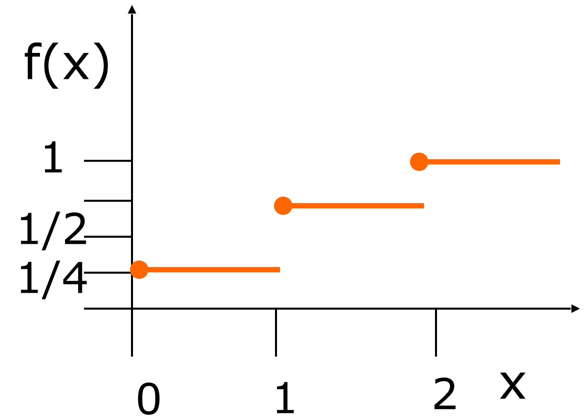
Exemplo

Tabela: Função de Probabilidade de Z

z	1	2	3	4	5	6
P(Z)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Função de Distribuição (Repartição)

- Seja X é uma V. A. discreta.
- A função de distribuição da variável X, no ponto x, é definida como sendo a probabilidade de que X assuma um valor menor ou igual a x.
- $F(x) = P(X \leq x)$
- Exemplo: Lançamento de duas moedas.
- $F(x) = 0$ se $x < 0$
- $F(x) = \frac{1}{4}$ se $0 \leq x < 1$
- $F(x) = \frac{3}{4}$ se $1 \leq x < 2$
- $F(x) = 1$ se $x \geq 2$



Função de Densidade de Probabilidade

- Relembrando: Em uma variável aleatória contínua o conjunto dos possíveis valores pode ser um intervalo ou um conjunto de intervalos.
- Seja X uma variável aleatória continua. A função de densidade de probabilidade f(x) é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(x) > 0$ para todo $x \in Rx$
2. $\int_{R_x} f(x) = 1$

  - Para qualquer a < b em R_x

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Observações

1. A probabilidade de qualquer ponto é zero
2. $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$
3. A função integrada entre dois limites a e b (a < b) é a probabilidade, ou seja, a área sob a curva.
4. A função de distribuição é definida como:

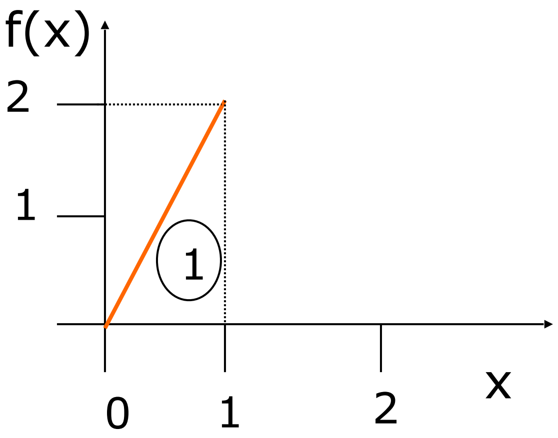
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Exemplo

- Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte função de densidade.

- f(x) é uma função de densidade.

- P(1/4 < x < 3/4)?



$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ para } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2xdx + \int_{1}^{\infty} 0dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

$$P(1/4 < x < 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} 2dx = x^2 \Big|_{1/4}^{3/4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1/2$$

Exemplo

- Função de distribuição F(x)
  - Para $x < 0$:
  - Para $0 \leq x < 1$:
  - Para $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} x dx = 0$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} x dx + \int_{0}^{x} 2x dx = x^2$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} x dx + \int_{0}^{1} 2x dx + \int_{1}^{x} 0 dx = 1$$

Centro de Informática UFPE

Exercício

1) Ache o valor de $P(-2 < x < 12)$, sabendo que a função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Exercício

2) Qual o valor de k para que a função abaixo represente uma função de densidade?

$$
f(x) = \begin{cases} x^3/k, & 2 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

Exercício

3) Um teste para seleção de funcionários de indústria é constituído de cinco questões. Admita que quantidade de questões respondidas corretamente por um candidato, seja uma Variável Aleatória X que tem a seguinte função de probabilidade:

$$P\,(X = k) = \frac{(2k+1)}{36} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

a) Qual é a probabilidade, de que o candidato responda corretamente a pelos menos uma questão do teste?
b) Qual é a probabilidade de que o candidato não erre nenhuma questão do teste?
c) Espera-se, que o candidato erre quantas questões do teste?
d) O candidato só é aprovado, se responder corretamente a mais de duas questões do teste. É verdade o fato de que ele tem mais de 66% de chance para ser aprovado no teste? Explique por quê.

Centro de Informática UFPE