Probabilidade

Probabilidade Condicional

Teorema do Produto

Independência Estatística

Teorema de Bayes

Renata Souza

Centro de Informática UFPE

Probabilidade Condicional

- Definição: probabilidade condicional de um evento é a probabilidade obtida com a informação adicional de que algum outro evento ocorreu. P(B/A) representa a probabilidade condicional da ocorrência do evento B, dado que o evento A já ocorreu.

Probabilidade Condicional

- Seja E: lançar um dado, e o evento A={sair o número 3}. Então P(A) = 1/6;
- Considere o evento B={sair um número impar}. Então P(A/B) é igual a 1/3;
- Formalmente: Dado dois eventos A e B, denota-se
  NCF = número de casos favoráveis
  NCT = número de casos total

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{NCF(A \cap B)}{NTC}}{\dfrac{NCF(B)}{NTC}} = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)}$$

Centro de Informática UFPE

Exemplo: Lançamento de dois dados

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Exemplo 1

- $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\}$
- $B = \{(x_1,x_2) \mid x_1 > x_2\}$ onde x_1 é o resultado do dado 1 e x_2 é o resultado do dado 2.
- Calcular P(A), P(B), P(A/B) e P(B/A)

$$P(A) = \frac{NCF(A)}{NCT} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \qquad P(B) = \frac{NCF(B)}{NCT} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$P(A/B) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)} = \frac{1}{15} \qquad P(B/A) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(A)} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2

- Considere a situação promocional de oficiais dos Estados Unidos.

Status de Promoção dos Oficiais de Polícia

	Homens	Mulheres	Total
Promovidos	288	36	324
Não Promovidos	672	204	876
Total	960	240	1200

Centro de Informática UFPE

Exemplo 2

H evento em que um oficial seja um homem
M evento em que um oficial seja uma mulher
I evento em que um oficial é promovido
Ī evento em que um oficial não é promovido

Tabela de Probabilidade Associada

	Homens	Mulheres	Total
Promovidos	0,24	0,03	0,27
Não Promovidos	0,56	0,17	0,73
Total	0,80	0,20	1

P(H∩I)= 288/1200 =0,24
P(H∩Ī)= 672/1200 =0,56
P(M∩I)= 36/1200 =0,03
P(M∩Ī)= 204/1200 =0,17

Exemplo 2

- Qual a probabilidade P(I/H)?

$$P(I/H) = \frac{288}{960} = \frac{288/1200}{960/1200} = \frac{0,24}{0,80} = 0,30$$

Teorema do Produto

- A probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos, A e B, do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Centro de Informática UFPE

Exemplo 3

- Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas, 2 peças são retiradas um após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas são sejam boas?
- A={a primeira é boa}, B={a segunda é boa}

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

Independência Estatística

- Um evento A é considerado independente de um outro evento B se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B, isto é:
  - $P(A)=P(A/B)$
  - $P(B)= P(B/A)$
  - $P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$

Exemplo 4

- Sendo $\Omega=\{1,2,3,4\}$ um espaço amostral equiprovável e $A=\{1,2\}$; $B=\{1,3\}$; $C=\{1,4\}$ três eventos de S. Verificar se os eventos A, B e C são independentes.

- Solução:
  - $P(A)=1/2$; $P(B)=1/2$; $P(A\cap B)=1/4$; logo, $P(A \cap B)=1/2 \times 1/2 =1/4$.

  - $P(A)=1/2$; $P(C)=1/2$; $P(A\cap C)=1/4$; logo, $P(A \cap C)=1/2 \times 1/2 =1/4$.

  - $P(B)=1/2$; $P(C)=1/2$; $P(B\cap C)=1/4$; logo, $P(B \cap C)=1/2 \times 1/2 =1/4$.

  - $P(A)=1/2$; $P(B)=1/2$; $P(C)=1/2$; $P(A \cap B \cap C)=1/4$.
    Logo A, B e C não são independentes

Teorema de Bayes

- Sejam $A_1,\ldots,A_n$ um conjunto de eventos mutuamente disjuntos de um espaço amostral Ω, isto é, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, A_n$. Seja B um evento de, então para cada i

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)}$$

Exemplo 5

- Considere uma empresa fabricante que recebe embarques de peças de dois diferentes fornecedores.
- A_1 = evento em que uma peça é do fornecedor 1 :
  - P(A) = 0,65
- A_2 = evento em que uma peça é do fornecedor 2:
  - P(B) = 0,35
- B = evento em que uma peça é boa
- R = evento em que uma peça é ruim
- $P(B/A_1) = 0,98$, $P(R/A_1) = 0,02$, $P(B/A_2) = 0,95$ $P(R/A_2) = 0,05$

Exemplo 5

- Dado que uma peça é ruim, qual é a probabilidade da peça ser do fornecedor 1 e qual é a probabilidade da peça ser do fornecedor 2?

- $P(A_1/R)=?$ e $P(A_2/R)=?$

Exercícios

- Um dado é viciado de tal forma que a probabilidade de sair uma certa face é proporcional ao seu valor (o valor 6 é seis vezes mais provável de sair do que o 1, por exemplo). Calcule:

  a) a probabilidade de sair 5, sabendo que saiu um número ímpar

  b) a probabilidade de tirar um número par, sabendo que foi um número maior que 3

Centro de Informática UFPE

Exercícios

- Dada a seguinte tabela, calcule a probabilidade de uma mulher ter sido escolhida, dado que ela tem menos de 25 anos.

Idade\Sexo	Homens	Mulheres	Total
Idade < 25	2000	800	2800
25 =< Idade < 40	4500	2500	7000
Idade => 40	1800	4200	6000
Total	8300	7500	15800

Exercícios

- Verifique se os eventos A e I são independentes, dada a tabela de probabilidade de eventos.

	I	$\bar{I}$	Total
A	0,04	0,06	0,10
$\bar{A}$	0,08	0,82	0,90
Total	0,12	0,88	1,00

Centro de Informática UFPE