Probabilidade

Experimento Aleatório

Espaço Amostral

Eventos Mutuamente Exclusivos

Experimentos de Contagem

Renata Souza

Centro de Informática UFPE

Introdução

- Ao soltar uma pedra do alto de um edifício, sabemos que esta pedra irá em direção ao chão.
  - Experimento Determinístico
    - Certeza de que o evento irá acontecer!

- Quais as chances de uma determinada rede suportar 20 usuários conectados simultaneamente? Existem dois resultados possíveis: a rede agüenta ou a rede cai.
  - Experimento Aleatório
    - Possibilidade de ocorrência de diversos eventos

Centro de Informática UFPE

Experimento Aleatório

- Processo de observação em que o resultado não é determinado

- Características:
  - Possibilidade de repetição sob as mesmas condições
  - Resultados não determinados a priori
  - Observação da existência de regularidade quando o número de repetições é grande

Experimento Aleatório – Exemplo 1

a) Lançar uma moeda honesta

b) Lançar um dado

c) Lançar duas moedas

d) Retirar uma carta de um baralho completo, com 52 cartas

e) Determinar a vida útil de um componente

Centro de Informática UFPE

Espaço Amostral

- Espaço de Resultados
  - Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento
- Um resultado do espaço amostral é chamado de evento
- É representado por Ω
- Ω pode ser quantitativo (discreto ou contínuo) ou qualitativo

Centro de Informática UFPE

Espaço Amostral – Tipos

1. Lançamento de um dado: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ – **quantitativo discreto**

2. Observação dos momentos de entrada de clientes em uma loja, entre as 14 e 16 horas:
   $\Omega = \{(X,Y): 14 < X < Y < 16\}$ - **quantitativo contínuo**

3. Observação do sexo de cada cliente que entrou na loja: Ω = {Masculino, Feminino} - **qualitativo**

Espaço Amostral – Exemplo 1

- Espaços amostrais para o Exemplo 1 de Experimentos Aleatórios, previamente citado:
  a) $\Omega = \{c, r\}$
  b) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
  c) $\Omega = \{(c, r), (c,c), (r,c), (r,r)\}$
  d) $\Omega = \{A_0, \ldots, K_0, A_p, \ldots, K_p, A_E, .., K_E, A_C, \ldots, K_C\}$
  e) $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \;/\; t \geq 0\}$

Espaço Amostral – Exemplo 2

- Lançam dois dados iguais. Enumerar os seguintes eventos:

  a) saída de faces iguais.
  b) saída de faces cuja soma seja igual a 10
  c) saída das faces cuja soma seja menor que 2
  d) saída das faces cuja soma seja menor que 15
  e) saída das faces onde uma face é o dobro da outra.

Espaço Amostral – Exemplo 2

- Tabela do espaço amostral para o lançamento de dois dados iguais:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Espaço Amostral – Exemplo 2

a) $\Omega = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

b) $\Omega = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

c) $\Omega = \{\varnothing\}$

d) $\Omega = \{\Omega\}$

e) $\Omega = \{(1,2),(2,1),(2,4),(3,6),(4,2),(6,3)\}$

Centro de Informática UFPE

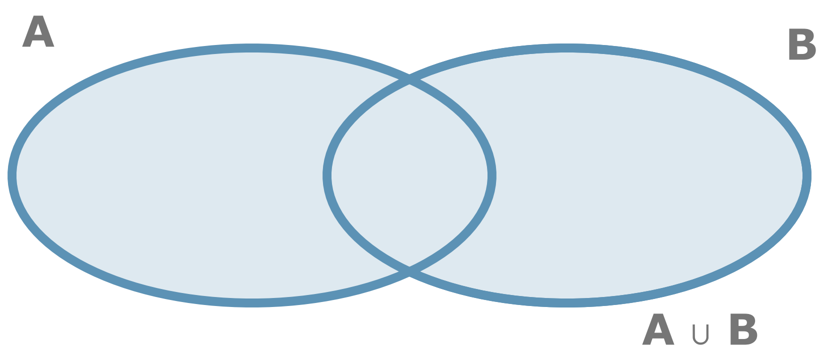
Classe de Eventos Aleatórios

- É o conjunto formado de todos os eventos (subconjuntos) do espaço amostral.
- Considere como exemplo um espaço amostral finito:
  - $\Omega = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$
- A classe de eventos aleatórios $F(\Omega)$
  - $\phi \Rightarrow \binom{4}{0}$
  - $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 \Rightarrow \binom{4}{1}$
  - $(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_3, e_4) \Rightarrow \binom{4}{2}$
  - $(e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_4), (e_1, e_3, e_4), (e_2, e_3, e_4) \Rightarrow \binom{4}{3}$
  - $(e_1, e_2, e_3, e_4) \Rightarrow \binom{4}{4}$
- O número de eventos de um espaço amostral é $F(\Omega) = 2^n$
- Usando esse espaço amostral temos que o número de eventos é 24

Propriedades com Eventos Aleatórios

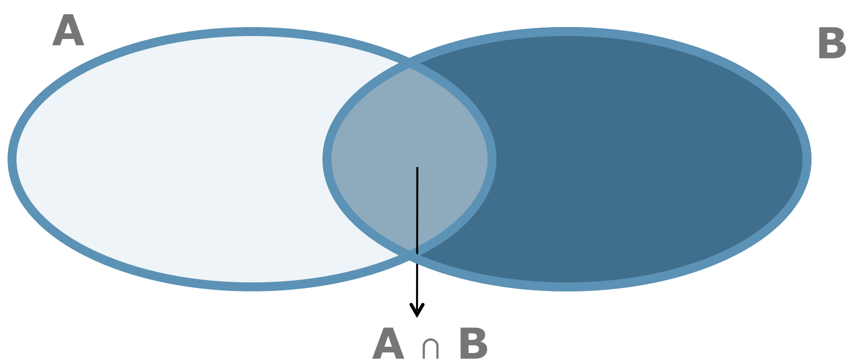
- Considere $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos de $F(\Omega)$.

- Operações
  - União: $A \cup B = \{e_i \in \Omega \ / \ e_i \cup A$ <u>**OU**</u> $e_i \cup B\}$
    - O evento formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos eventos.

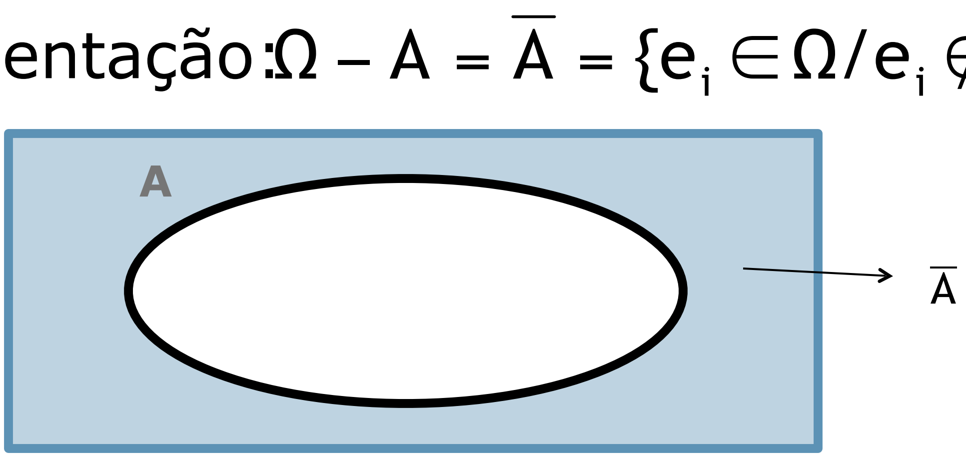


Propriedades com Eventos Aleatórios

- Interseção: $A \cap B = \{e_i \in \Omega \,/\, e_i \in A$ **E** $e_i \in B\}$
  - O evento formado pelos elementos que pertencem simultaneamente aos dois eventos.



- Complementação: $\Omega - A = \overline{A} = \{e_i \in \Omega / e_i \notin A\}$



Eventos Aleatórios – Exemplo 3

- Lançam-se duas moedas. Sejam A: saída de faces iguais e B=saída de cara na primeira moeda. Determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $\overline{A}, \overline{B}$
d) $\overline{A \cup B}$
e) $\overline{A \cap B}$
f) $\overline{A} \cup \overline{B}$
g) $\overline{A} \cap \overline{B}$
h) $B - A$
i) $A - B$

$\Omega = \{(c,c), (c,r), (r,r), (r,c)\}$
$A = \{(c,c), (r,r)\}$
$B = \{(c,c), (c,r)\}$

Centro de Informática UFPE

Eventos Aleatórios – Exemplo 3

a) $A \cup B$ = {(c,c, (c,r), (r,r)}

b) $A \cap B = \{(c,c)\}$

c) $\overline{A} = \{(c,r),(r,c)\}$ $\overline{B} = \{(r,c),(r,r)\}$

d) $\overline{A \cup B} = \{(r,c)\}$

e) $\overline{A \cap B} = \{(c,r),(r,c),(r,r)\}$

f) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{(r,c)\}$

g) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{(c,r),(r,c),(r,r)\}$

h) B-A = {(c,r)}

i) A-B={(r,r)}

Centro de Informática UFPE

Propriedades das Operações

- a) Idempotentes: $A \cap A = A$
  $A \cup A = A$

- b) Comutativas: $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$

- c) Associativas: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$

- d) Distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Centro de Informática UFPE

Propriedades das Operações

- e) Absorções: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$
- f) Identidades: $A \cap \Omega = A$, $A \cup \Omega = \Omega$

  $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$

- g) Complementares: $\overline{\Omega} = \phi, \overline{\phi} = \Omega, A \cap \overline{A} = \phi$

  $A \cup \overline{A} = \Omega, (\overline{\overline{A}}) = A$

- h) Leis de De Morgan: $(A \cap B)_c = \overline{A} \cup \overline{B}$

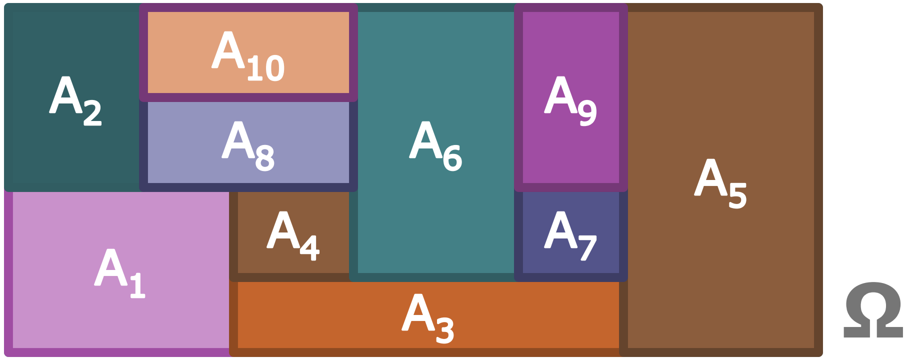
  $(A \cup B)_c = \overline{A} \cap \overline{B}$

Centro de Informática UFPE

Partição de um Espaço Amostral

- Dizemos que os eventos $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:
  - Não há eventos vazios
  - Não há interseção entre os eventos
  - A união dos eventos da partição é o espaço amostral

Exemplo:



Eventos Mutuamente Exclusivos

- Dois eventos são mutuamente exclusivos se não podem ocorrer simultaneamente:
  - $A \cap B = \varnothing$

- Exemplos:
  - Ao lançar um dado, A = saída ímpar e B = saída par
    - $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$
  - Ao analisar uma imagem de satélite, A = floresta, B = deserto e C = oceano. Uma área analisada pode pertencer apenas a uma destas classes.

Centro de Informática UFPE

Experimentos de Contagem

- Em alguns experimentos, é necessário que sejam escolhidos alguns objetos de um todo.

- Exemplos:
  - Retirar bolas de diferentes cores que estão em uma urna
  - Escolher alguns vértices de um determinado grafo
  - Analisar quantas máquinas estão usando um link de uma rede em um dado instante

- Existem duas técnicas para contar o número de resultados possíveis: **Combinação** e **Permutação**

Centro de Informática UFPE

Experimentos de Contagem: Combinação

- Permite que seja realizada a contagem de quantos (n) resultados são possíveis em uma seleção sobre um conjunto de N objetos,
  SEM LEVAR EM CONTA A ORDEM DOS OBJETOS SELECIONADOS.

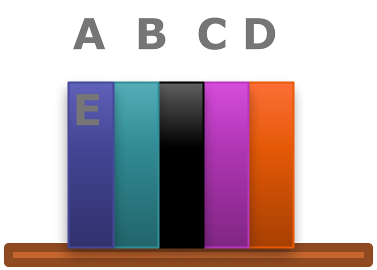
- Relembrando...

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Centro de Informática UFPE

Experimentos de Contagem: Combinação

- Exemplo:
  - Em uma prateleira existem 5 livros (N = 5). Deseja-se escolher 2 destes livros para levar para uma viagem. Quais resultados são possíveis para esta seleção?



$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

- A,B
- A,C
- A,D
- A,E
- B,C
- B,D
- B,E
- C,D
- C,E
- D,E

Centro de Informática UFPE

Experimentos de Contagem: Permutação

- Permite que seja realizada a contagem de quantos (n) resultados são possíveis em uma seleção sobre um conjunto de N objetos,

LEVANDO EM CONTA A ORDEM DOS OBJETOS SELECIONADOS.

- Relembrando:

$$P_n^N = n!\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Centro de Informática UFPE

Experimentos de Contagem: Permutação

- Exemplo:
  - Você foi escolhido para escrever um programa que gera aleatoriamente uma seqüência de duas vogais, sem repetição (N = 5, n = 2). Quantas e quais são as possíveis saídas de seu programa?

$$P_2^5 = 2!\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

•AE	•EI	•IO	•OU
•AI	•EO	•IU	•UA
•AO	•EU	•OA	•UE
•AU	•IA	•OE	•UI
•EA	•IE	•OI	•UO

Referências

- *Noções de Probabilidade e Estatística* - Marcos N. Magalhães, Antonio Carlos P. de Lima. 7ª Edição, Editora da Universidade de São Paulo

- *Estatística Básica* - Wilton de O. Bussab, Pedro A. Morettin. 6ª Edição, Editora Saraiva.

- *Curso de Estatística* - Jairo Simon da Fonseca, Gilberto de Andrade Martins. 6ª Edição, Editora Atlas.

Centro de Informática UFPE