UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE INFORMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Hélder Paixão Felix Filho

Lógica Modal
Uma abordagem introdutória

RECIFE
2018
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE INFORMÁTICA

CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Hélder Paixão Felix Filho

Lógica Modal
Uma abordagem introdutória

Monografia apresentada ao Centro de Informática (CIN) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), como requisito parcial para conclusão do Curso de Engenharia da Computação, orientada pela professora Anjolina Grisi de Oliveira.

RECIFE

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE INFORMÁTICA

CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Hélder Paixão Felix Filho

Lógica Modal

Uma abordagem introdutória

Monografia submetida ao corpo docente da Universidade Federal de Pernambuco, defendida e aprovada em 04 de julho de 2018.

Banca Examinadora:

Orientador

____

Anjolina Grisi de Oliveira

Doutor

Examinador

____

Frederico Luiz Gonçalves de Freitas

Doutor

Este trabalho é dedicado a todas as minhas mães, porque *benedictus ego eis in mulieribus*.

AGRADECIMENTOS

Gostaria muito de poder agradecer individualmente a todos que fizeram parte desse trecho evolutivo de minha vida. As pessoas mais diretas – e merecedoras por assim ser – são todas as minhas mães, minha mãe biológica juntamente com todas as nossas tias.

Em segundo lugar, todas as pessoas que um dia me ofereceram oportunidade por terem acreditado em mim em algum nível. Na academia, minha orientadora, no estágio, João Alberto Alves e na vida… aí é quando chega a parte difícil. A lista é imensa! Tem até gente do outro lado do mundo, no Japão, que merece minha imensa gratidão! Tem o pessoal que dividiu teto comigo, que me estendeu a mão tantas vezes quanto eu tropeçava e ainda aqueles que cuidaram um pouquinho do meu coração. São alguns nomes, mas a menção honrosa é pra ti, Elves.

Agradeço como só eu sei fazer isso! E sei que todos que me conhecem sabem o quanto que isso é grande!

“Não quero mal às ficções, amo-as, acredito nelas, acho-as preferíveis à realidade; nem por isso deixo de filosofar sobre o destino das coisas tangíveis em comparação com as imagináveis. Grande sabedoria é inventar um pássaro sem asas, descrevê-lo, fazê-lo ver a todos, e acabar acreditando que não há pássaros com asas. ”

Machado de Assis

RESUMO

No campo da lógica, a Lógica Modal demonstra ser uma linguagem poderosíssima em vários pontos à frente das linguagens formais já consagradas, a Lógica Clássica Proposicional e a Lógica de Primeira Ordem, como uma linguagem intermediária entre estes dois conjuntos. Neste trabalho, como uma revisão bibliográfica, é feito um apanhado de todos os conceitos introdutórios para o estudo da linguagem formal modal e sintetizado de modo a conter tanto um resumo do caráter evolutivo da Lógica Modal, desde Aristóteles, quanto os principais conhecimentos quanto à sintaxe e semântica desta linguagem.

Palavras-chave: Lógica Modal, Lógica Clássica Proposicional, Lógica de Primeira Ordem, Aristóteles, Kripke.

ABSTRACT

In the logic field, Modal Logic ought to be a powerful language on assorted issues in comparison with already consecrated logics such as Propositional Standard Logic and First Order Logic, as standing in between those language sets. This work, as a bibliographic review, a collection of introductory concepts demanded for the formal modal language study is reunited in such pattern that it displays a summary of its evolution throughout history, since Aristotle, as well as the main topics regarding its syntax and semantics.

Keywords: Modal Logic, Propositional Standard Logic, First Order Logic, Aristotle, Kripke.

Sumário

1. Introdução 11

1.1. Estrutura do Trabalho 11

2. Evolução na História 13

2.2. Idade Clássica 13

2.3. Idade Moderna 17

3. Sintaxe da lógica Modal 24

3.1. Uma Lógica "*middleware*" 24

3.2. Sintaxe 24

4. Semântica 27

4.1 Modelo de Kripke e operações com grafos 27

4.2 Os Operadores □ e ◇ 29

4.3 O Sistema K 32

4.4 Sistemas Modais Normais 33

5. Aspectos Filosóficos das Modalidades 39

6. Conclusões e Trabalhos Futuros 41

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 42

Lista de Figuras

Figura 1: Modos Barbara, Celarent, Darii e Ferio respectivamente de silogismos. 15

Figura 2: Quadrado de Aristóteles. 16

Figura 3: Representação em grafos dos Kripke *frames*. 28

Figura 4: Representação em grafo do Kripke *model*. 29

Figura 5: Quadrado de Aristóteles sob a ótica modal proposicional. 30

Figura 6: Quadrado de Aristóteles estendido. 31

Figura 7: Diagrama de relacionamento dos sistemas modais normais. 37

1. Introdução

Dentre os desenvolvimentos da lógica formal como uma disciplina independente das demais, surgiu a lógica modal como consequência de vários esforços para disciplinar o raciocínio sobre situações possíveis: utopias e ideais, cenários hipotéticos, o futuro desconhecido, as responsabilidades e o que poderia ter acontecido, o que é possível, dado o nosso conhecimento limitado dos fatos, e assim por diante.

A lógica modal, a lógica que estuda os modos de qualificar a verdade, tais como necessidade e possibilidade, pertence à família de lógicas classificadas como não-clássicas ou não-padrão. Destas lógicas, as mais estudadas, definidas como não-padrão podem ser agrupadas convenientemente em duas classes distintas:

1. A classe de lógicas que diferem da lógica padrão por carência das leis clássicas;
2. A classe de lógicas que diferem da lógica padrão por serem extensões linguísticas ou axiomáticas desta.

A lógica quântica, que ficou famosa neste século, a lógica intuicionista, ou construtivista e a lógica paraconsistente são exemplos da primeira classe mencionada. Atualmente, a lógica modal estudada ocupa um lugar central na segunda destas classes. Ela não rivaliza essencialmente a lógica clássica, é um enriquecimento linguístico e axiomático dela. Isto significa que, *inter alia*, os conectivos padrão, ou seja, a disjunção, conjunção e negação, são inteiramente preservados na lógica modal, o que quer dizer que não precisam de qualquer desvio quanto ao tratamento que recebem na lógica padrão clássica.

1.1. Estrutura do Trabalho

Esta monografia está dividida em 6 capítulos. O Capítulo 2 é reservado para a contextualização histórica, incluindo a evolução da Lógica Modal no tempo. Ele é dividido em 2 seções, a primeira tratando do período clássico e a segunda descrevendo as descobertas e criações da contemporaneidade. O Capítulo 3 introduz as primeiras definições formais da linguagem, a sintaxe e os operadores modais, entre outros.

A partir das definições de base, no Capítulo 4 é apresentada a semântica da Lógica Modal. São definidos os modelos relacionais dos operadores modais ($\Box$ e $\Diamond$), o Modelo de

Kripke, os Sistemas Modais Normais, sistemas que têm como base o modelo considerado canônico de Kripke.

O Capítulo 5 aborda, de maneira introdutória, os conceitos e interpretações filosóficas. O número de modalidades existentes é considerável e várias delas, embora tenham as definições formais alicerçadas no modelo canônico, suas aplicações são distintas e merecem um trabalho voltado particularmente a elas. Ainda assim, são mencionadas as modalidades alética, deôntica e epistêmica. O Capítulo 6 é reservado às conclusões e intenções de trabalhos futuros.

2. Evolução na História

Neste capítulo, é contextualizada a evolução, desde sua gênese, da Lógica Modal até os parâmetros atuais.

2.2. Idade Clássica

É pertinente discorrer sobre Aristóteles em minúcias. Ele, em sua metafísica, trata o ser como um todo. Diz-se, portanto que a metafísica tem caráter ontológico, que é o ramo da filosofia que trata do ser. Ele admite a multiplicidade do ser. A atenção deve ser voltada às categorias, denominação dada ao grupo principal de significados do ser, as “divisões originárias do ser”. Faz sentido mencionar as oito categorias de que ele fala, sendo a substância, ou essência, qualidade, quantidade, relação, ação, paixão, lugar e tempo, mas o foco reside na distinção entre potência e ato. Exemplo: uma semente é uma árvore em potencial, mas não em ato. Entre um cego e alguém de olhos fechados há uma grande diferença: o cego não é capaz de enxergar nunca, o outro enxerga em potência, mas não em ato. Toda essa distinção pode ser considerada a ideia gênese da lógica modal. Mais uma vez, se “a pessoa vê a pedra”, esta sentença é uma proposição assertiva. Se é verificado que a pessoa vê de fato a pedra, a proposição é verdadeira, mas senão, ela é falsa. Se, por acaso, ela tem possibilidade de ver a pedra, esta é uma afirmação possível, mesmo que falsa. Entretanto, se ela não é capaz de ver a pedra, a afirmação é impossível. Assim, a afirmação que é verdadeira e não poderia ser falsa, é necessária. É neste ponto que o filósofo começa a ponderar sobre o modo como as afirmações são verdadeiras ou falsas.

O *Organon* de Aristóteles, o livro que prevaleceu na cultura lógica até a era moderna, contém o primeiro tratamento conhecido da lógica modal. Neste trabalho, os silogismos modais recebem tanta atenção quanto os não-modais, que ele chama de categórico. A distinção entre o modal e os silogismos categóricos é que os primeiros são válidos não só devido ao significado de termos como “todo” e “alguns”, mas também por causa do significado de termos que se referem às noções básicas de modalidade: necessárias, possíveis, impossíveis e contingente. Estabeleceu-se que o interesse de Aristóteles por modalidades foi motivado por estas convicções metafísicas. Em particular, a lógica modal permitiu-lhe analisar a dupla distinção que foi herdada por todos os filósofos que foram inspirados por sua filosofia: distinção entre as propriedades reais (reais) e potenciais (possíveis), por um lado, e a distinção entre as propriedades essencial (necessário) e acidental (contingente) por outro.

Aristóteles abre então a discussão sobre as implicações modais. Ele conjectura que, a partir de uma afirmação necessária, a conclusão também é necessária. Ao considerar conjunções de afirmações possíveis, ele acaba fazendo uma distinção importante: É possível que alguém esteja sentado e, mesmo assim, é possível que esteja andando. No entanto, é impossível que esteja sentado e andando ao mesmo tempo. Com isto, da conjunção de duas afirmações possíveis, é criada uma afirmação impossível. Neste ponto, o filósofo percebe que afirmar que é impossível que o ser humano voe porque não tem asas é muito diferente de afirmar que é impossível que um pássaro voe e ande ao mesmo tempo. No primeiro caso, a impossibilidade é oriunda da configuração do mundo, do modo como o ser humano é, sem asas. Já no segundo, a impossibilidade é lógica, derivada a partir dos conceitos de andar e voar. Para estes dois tipos de impossibilidades, Aristóteles chama de impossibilidade relativa quando se trata do modelo de organização do mundo e de impossibilidade absoluta da dicotomia nas relações.

A lógica nasceu da necessidade de se estabelecerem regras para a argumentação. De certo modo, era uma resposta às técnicas sofistas, da escola de Protágoras, famoso por cunhar a frase "*O homem é a medida de todas as coisas, das coisas que são, enquanto são, das coisas que não são, enquanto não são.*" Os sofistas criavam artifícios para ludibriar seus interlocutores com argumentos aparentemente verdadeiros, mas com falhas sutis. Por isso, Aristóteles sentiu a necessidade de sistematizar as regras de argumentação para discernir entre os argumentos válidos. A lógica não era tida como parte da filosofia, mas como instrumento, ferramenta.

O núcleo desta ferramenta é a teoria do silogismo. Em seu consagrado *Analytica Priora*, composto de dois livros, o primeiro consistindo na teoria dos silogismos em si, em que duas premissas concluem uma terceira proposição. Neste trabalho, ele também discute a relação entre estes dois conceitos, que vieram a ser chamados de “a dualidade” da possibilidade e necessidade. O exemplo mais famoso de silogismo é:

Sócrates é homem.
<u>Todo homem é mortal.</u>
Logo, Sócrates é mortal.

A lógica de silogismos de Aristóteles visava arregimentar, entre outros, categorização de indivíduo sem espécies e gêneros. O filósofo estabelece várias formas de silogismos, os modos de silogismos, que ganharam nomes na Idade Média. São eles:

Barbara: Se todo S é M e todo M é L, então todo S é L;
Celarent: Se nenhum M é L e todo S é M, então nenhum S é L;
Darii: Se todo S é M e algum L é S, então algum L é M;
Ferio: Se nenhum M é L e algum S é M, então algum S não é L.

Usando a concepção de John Venn sobre diagramas para a leitura de conjuntos, os modos são ilustrados a seguir:

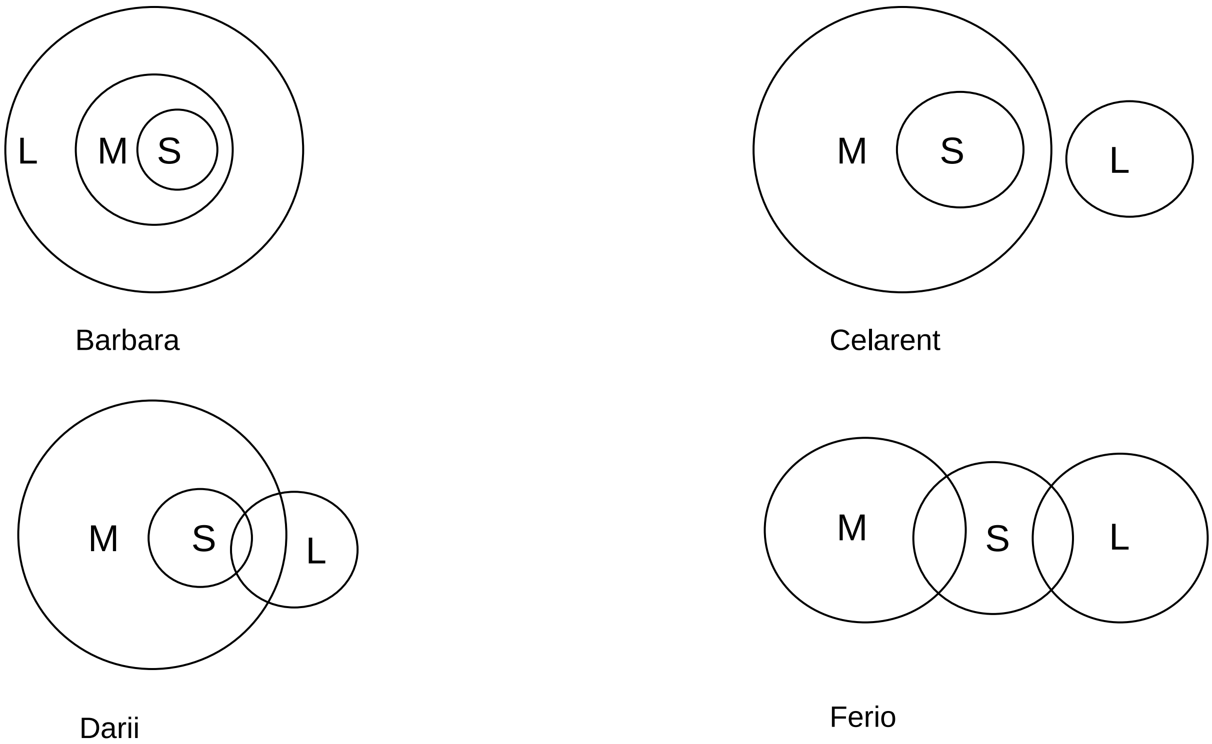


Figura 1: Modos Barbara, Celarent, Darii e Ferio respectivamente de silogismos.

Posteriormente, em seu estudo sobre sentenças, Aristóteles as classifica em quatro tipos: Universal Afirmativa, Universal Negativa, Particular Afirmativa e Particular Negativa. Eis a semente da ideia para a concepção do formalismo de quantificadores universais da Lógica de Primeira Ordem. Estes tipos se relacionavam entre si como sentenças contrárias, contraditórias e subcontrárias. As universais são contrárias entre si, do mesmo modo que as particulares são subcontrárias. As contraditórias seriam inversas e simétricas, as universais afirmativas e particulares negativas ou as universais negativas e as particulares afirmativas. O diagrama abaixo ilustra tais relacionamentos:

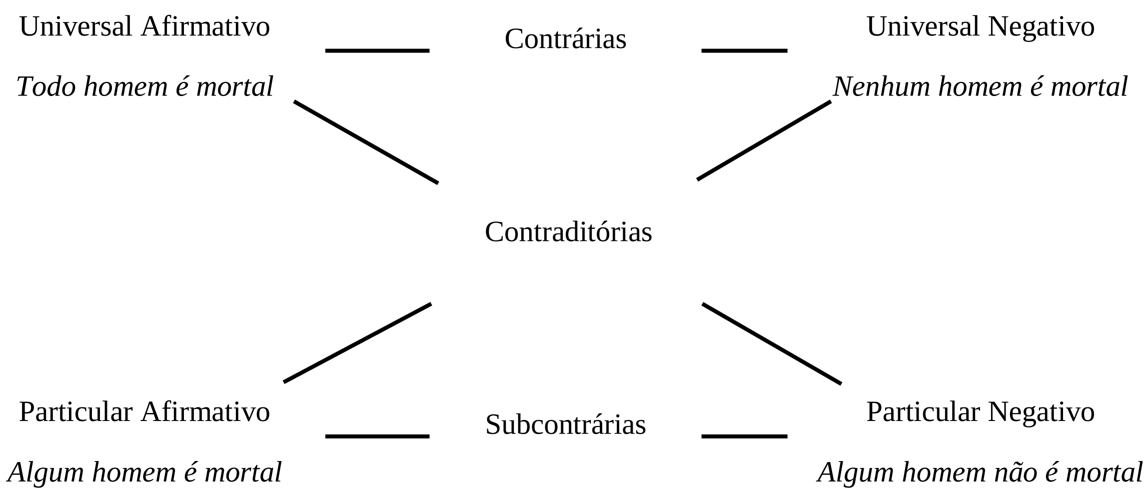


Figura 2: Quadrado de Aristóteles.

A teoria dos silogismos foi aceita como suficiente para o tratamento da lógica de forma pronta, acabada até Frege e Russell mostrarem que ela era insuficiente. Frege [5] criou a lógica formal do predicado na tentativa de organizar a prova matemática e, desse modo, fornecer uma justificativa final do conhecimento matemático com base em princípios de puro raciocínio, eles próprios definidos de forma matematicamente precisa.

Aristóteles percebeu que uma afirmação do tipo 'é possível que…' pode ser tratada como uma afirmação existencial particular da forma 'existe algo tal que…' Da mesma forma, uma afirmação do tipo 'é necessário que…' pode ser tratada como uma afirmação existencial universal. Assim, a analogia entre as sentenças quantificadas universalmente e as modais segue naturalmente e, portanto, a relação das chamadas fórmulas equivalentes, descritas com rigor no capítulo 4, seção primeira, com a dualidade da lógica de primeira ordem é verificada.

P1. Se é necessário que A seja verdade, então não é possível que A não seja.

P2. Se é possível que A seja verdade, então não é necessário que A não seja.

Para ambos P1 e P2, é válido também a volta, como será visto mais adiante, ou seja: se não é possível que A não seja verdade, então é necessário que A seja. Traduzindo em símbolos proposicionais, sendo ■ usado neste caso para necessidade e ◆ para possibilidade, obtém-se:

P1. ■A ↔ ¬◆¬A.

P2. ◆A ↔ ¬■¬A.

É uma dualidade similar à que ocorre com os quantificadores universais ∀ e ∃ na lógica de predicados:

$$\exists x \neg Px \leftrightarrow \neg \forall x Px; \qquad \neg \exists x Px \leftrightarrow \forall x \neg Px.$$

Dando continuidade, ainda na Idade Clássica da lógica modal, uma escola filosófica que rivalizou com a aristotélica, o Perípato, e se preocupou fortemente com esta lógica foi o estoicismo, sucessão da escola de Megara. Em rivalizar o Perípato, negava-se a teoria aristotélica de potência e ato e, em se tratando de uma escola determinística, a noção de modalidade foi vinculada diretamente à de tempo.

Diodoro Cronos tem uma definição curiosa do que é possível, uma ideia de caráter embrionário para a modalidade que atualmente é chamada de *tensa*: o que é possível é aquilo que é ou será; o que é impossível é aquilo que, uma vez falso, não será verdadeiro; o que é necessário é aquilo que, uma vez verdadeiro, não será falso; e, finalmente, o não necessário como sendo o que já é ou será falso. O que alicerçava seus conceitos era o chamado Argumento Mestre 'Tudo o que é passado e verdadeiro, é necessário'.

2.3. Idade Moderna

Quando a lógica formal moderna foi construída no fim do século XIX, pouca preocupação havia acerca da formalização dos conceitos da necessidade e possibilidade. Muitos autores eram céticos neste sentido e a modalidade "necessidade" não existia, mas apenas a necessidade lógica da implicação, a tautologia e as ideias de verdadeiro e falso.

"...não existe uma noção fundamental lógica da necessidade, nem, consequentemente, da possibilidade. Se esta conclusão é válida, o assunto modalidade deve ser banido da lógica, visto que proposições são simplesmente verdadeiras ou falsas..." (B. Russell citado por [10])

“A necessidade de uma coisa acontecer por causa de outra não existe. Existe apenas a necessidade lógica.” ([13], 6.37)

Toda a lógica formal é alicerçada em axiomas. Por serem considerados os princípios mais fundamentais do raciocínio, são compreendidos como tautológicos em si mesmos. Até sobre este conceito, Wittgenstein era desconfortável. Não havia porque expressar numa linguagem formal que algo era necessário, pois cada tautologia por si só era verdadeira independente de como o mundo se apresenta.

A ideia era que as noções modais poderiam ser interpretadas de fato como noções metassistemáticas, quer dizer, como um modelo que descreve, generaliza outro, ou, passivamente, portanto, é descrito, generalizado por outro; ou ainda, alternativamente, que as sentenças modais poderiam ser parafraseadas na linguagem da lógica de primeira ordem. Tal redução é plausível *prima facie*. Se, por um lado, a sentença “1 + 1 = 2 é necessário” pode ser entendida como tendo o mesmo significado que “1 + 1 = 2 é um teorema da aritmética de Peano”, por outro “necessariamente todo homem é mortal” pode ser parafraseado em algo como “para todo x e y, se x é um homem e vive na região espaço-temporal y, então x é mortal”.

Agora, frases como “meu gato vive em y” não são estritamente sentenças puras, ou funções proposicionais, as chamadas relações em termos matemáticos, mas são sentenças abertas. Proposições são sentenças assertivas que admitem sempre somente dois estados, enquanto que as relações recebem um valor verdade somente após a quantificação de todas as variáveis que ocorrem livres ou a substituição delas por constantes nominais.

A mudança começa a acontecer com C. I. Lewis e C. H. Langford em *Symbolic Logic* [9], quando o desenvolvimento de um sistema modal de “implicação estrita” é usado para a interpretação da lógica do “se … então”. Concebendo cinco sistemas lógicos, definidos sobre axiomas, nominados de **S1** a **S5**, trazem à discussão dois significados a serem interpretados. No que diz respeito à implicação, o significado extensional, conhecido como “implicação material” de Russel (do inglês, *Material Implication*, ou MI), é a forma com que as fórmulas eram tratadas até então, enquanto que o significado intensional, ou a “implicação estrita” (do inglês, *Strict Implication*, ou SI), seria o entendimento de que o consequente deriva logicamente do antecedente. Ou seja:

MI: $A \supset B$.

Na implicação material, tem-se que A é falso, ou B é verdadeiro.

SI: $A \prec B$.

Na implicação estrita, B é inferido a partir de A.

Todos estes conceitos serão abordados com rigor nos capítulos seguintes.

A abordagem modelo-teórica surgiu com a tentativa de R. Carnap [*cf.* 10] em introduzir construções em que conjuntos de *descrições de estado* relativizavam o valor das proposições. Numa descrição de estado, "é verdade que existem unicórnios", porém noutra descrição esta é uma proposição falsa. Portanto, se A e B são verdade numa descrição de estado S, $A \wedge B$ também o são nesta descrição. E, por acaso, esta interpretação de "necessariamente" leva à mesma da lógica **S5** de Lewis: $A \prec B$ seria o mesmo que $\blacksquare(A \to B)$.

Com esta base, o significado de necessidade em sentenças pôde fazer sentido. Ou seja, "é necessário que A" é verdade se, e somente se, é verdade em todas as descrições de estado. Formalmente, usando $\blacksquare$ para "é necessário que", obtém-se:

p é verdade em S	sse,	p é um membro de S
$\neg A$ é verdade em S	sse,	A não é verdade em S
$A \wedge B$ é verdade em S	sse,	A é verdade em S e B é verdade em S
$\blacksquare A$ é verdade em S	sse,	para todas as descrições T, A é verdade em T

Mesmo assim, sentenças com operadores recursivos, ou seja, $\blacksquare\blacksquare A$, não teriam o significado hoje compreendido, pois se A é verdade "para tudo", é imediatamente necessária da mesma forma, tornando tal iteração não somente redundante, mas incorreta sintaticamente.

Ainda no séc. XIX, a germinação de uma concepção diferente de proposições pode ser percebida e, de modo mais geral, até da própria lógica modal. Boole tratou as proposições como se tivessem um conjunto de *tempos* em que eram verdade. É uma abordagem não ortodoxa sim e é natural perceber que proposições podem ter valores verdade diferentes em tempos diferentes.

O interesse de Boole na teoria da probabilidade dependia fortemente desta intuição básica. De fato, probabilidade é uma função que associa proposições a números reais entre 0 e 1. Se uma proposição é tratada como um conjunto de tempos, seu valor de probabilidade é a medida do tamanho de tal conjunto em que, no caso das tautologias, acaba sendo exatamente o conjunto universal de tempos. A transição daí a noções modais é direta: "possivelmente p" pode ser traduzido em "a probabilidade de p é maior que 0", enquanto que "necessariamente p" pode ser "a probabilidade de p é 1".

Apesar do trabalho de lógicos como Hugh McCall [*cf.* 2], os pioneiros da lógica contemporânea não deixaram espaço para a lógica modal como já abordado, aparentemente deixaram no esquecimento o silogismo modal, que foi parte essencial na lógica desde sua concepção. Mais ainda, a conexão dominante entre lógica e matemática pareceu encorajar não somente indiferença à lógica modal, mas hostilidade. Depois da Segunda Guerra Mundial, o antimodalismo de W. O. Quine representa bem este fato.

O exercício agora é examinar a redução proposta dos operadores modais a quantificadores universais.

Exemplo 1: Se o desejado for traduzir "necessariamente p" em "para todos os pontos de referência x, p é verdade com respeito a x", proposições devem ser concebidas como predicados de pontos de referência. É uma ideia bem problemática do ponto de vista da formalização. É suficiente observar que, se p é uma variável proposicional, "$\forall xpx$" é sintaticamente falho, não é uma fórmula bem formada (conceito discutido a rigor no capítulo X, seção X). A única alternativa plausível parece ser introduzir uma relação binária R tal que $R\ (x,\ p)$ é lido como "proposição p é realizada em x". Daí, "necessariamente p" pode ser escrito *prima facie* como $\forall xR\ (x,\ p)$. O problema é que deve-se ter axiomas descrevendo as propriedades de R, por exemplo, determinar qual a relação entre $\forall x\neg R\ (x,\ p)$ e $\forall xR\ (x,\ \neg p)$[1], mas tais axiomas não seguem dos teoremas para quantificadores da Lógica de Primeira Ordem.

Exemplo 2: Na tradicional Lógica de Primeira Ordem, $\forall x\alpha\ (x)$ implica em $\exists x\alpha\ (x)$. Esta relação sugere que para toda a lógica modal, a necessidade implica na possibilidade. Ao usar os símbolos $\Box$ para necessidade e $\Diamond$ para possibilidade, segue a lei $\Box\alpha \supset \Diamond\alpha$. Existem vários modos na lógica modal e esta lei pode ser questionável ao se analisar sob as óticas específicas de cada uma. Seja, por exemplo, que se α é necessário, existe uma teoria, digamos K que valida tal condição, ou seja, para qualquer ponto de referência x, se K é verdade e R é tal como é no exemplo 1, $R\ (x,\ \alpha)$ é verdade também. Então, se "é necessário α" pode ser representado por $\forall x\ (K \rightarrow (R\ (x,\ \alpha))$, "é possível a" segue diretamente da sua forma equivalente (estudado com rigor no Capítulo 4, Seção 4.1) como sendo $\neg\forall x\ (K \rightarrow (R\ (x,\ \neg\alpha))$. De fato, se ainda $\rightarrow$ representar a implicação material já mencionada, a inferência não é

[1] Em se tratando da linguagem formal da Lógica de Primeira Ordem, tanto esta fórmulas como as dos demais exemplos neste capítulo fazem o abuso de notação por motivos didáticos. Ora, a LPO apenas admite termos como argumento para as relações. Como para a Lógica Modal os termos são proposições, eis a justificativa de "negar" o termo, tornando-o assim fórmula.

válida! Suponha que K é uma teoria falsa; assim, para todo x, $K \rightarrow (R\ (x,\ \alpha)$ e $K \rightarrow (R\ (x,\ \neg\alpha)$ são ambos verdade e $\neg\forall x\ (K \rightarrow (R\ (x,\ \neg\alpha))$ finalmente falso, tornando também a implicação falsa. Por esta interpretação $\Box\alpha$ não implica em $\Diamond\alpha$.

Exemplo 3: Se fosse verdade que operadores modais são quantificadores universais disfarçados, $R\ (x)$ uma relação unária com a única variável x, deveria ser indiferente escrever $\forall x\Box R\ (x)$ no lugar de $\Box\forall xR\ (x)$, ou mesmo $\exists x\Diamond R\ (x)$ no lugar de $\Diamond\exists xR\ (x)$. O próprio Aristóteles foi o primeiro a enfatizar a distinção entre o que os lógicos medievais chamavam de modalidades *de dicto* e *de re*, ou seja, a preocupação com a forma como a sentença é escrita em si ou com o significado que a sentença expressa respectivamente. De maneira didática, existe uma diferença notável entre:

i. Existe alguém com a possibilidade de se tornar Presidente da República; e
ii. É possível que alguém se torne o Presidente da República.

A sentença (ii) é verdade em situações que (i) é falsa, por exemplo, no caso de falta de candidatos.

Exemplo 4: Enquanto que parece óbvio que $\Box\alpha \supset \Box\alpha$ é uma verdade, $\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$ pode não ser tanto assim. Por exemplo, alguns filósofos acham que a necessidade é algo "criado" pelas regras da linguagem, mas a existência de tais regras é contingente, quer dizer, que nem é verdadeiro nem falso sob todas as possíveis avaliações, então essencialmente não necessária. Entretanto, a interpretação do $\Box$ em termos dos quantificadores nos dá que $\forall x\alpha\ (x)$ é equivalente a $\forall x\forall x\alpha\ (x)$.

O cenário começou a mudar com A. N. Prior, quando ele traz finalmente à discussão o conceito temporal da lógica. Somente agora, o trabalho precursor de Diodoro teria continuidade, contudo, sem sua menção pelo matemático. Noções como "sempre foi o caso de", ou "será verdade daqui em diante", foram modeladas com um mapeamento no conjunto $\mathbb{Z}$ da seguinte forma: seja SA "sempre foi o caso A" e FA "será sempre o caso A", ω o conjunto inteiro ordenado pela relação "menor que" < de todos os momentos $\mathfrak{m}$,

> SA é verdade no momento $\mathfrak{m}$ sse, para todos os momentos $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$, A é verdade em $\mathfrak{m}'$.
> FA é verdade no momento $\mathfrak{m}$ sse, para todos os momentos $\mathfrak{m}' > \mathfrak{m}$, A é verdade em $\mathfrak{m}'$.

Assim, sentenças como “é possível que eu abra a porta; necessariamente, se a porta é aberta, então é possível que eu saia do quarto. Portanto, é possível que seja possível que eu saia do quarto” do modelo de Carnap [*cf.* 10] puderam fazer sentido. Por isso, deve-se considerar estas modalidades como *relativas*, limitadas pelo que que é possível agora, ou possível dada uma determinada situação, não como *absolutas*, ou “para todas as possibilidades”.

Por fim, vale lembrar que a lógica clássica é extensional, a modal não. O princípio de substituição de equivalentes materiais, ou substituição *salva veritate*, diz que:

> *“dados dois enunciados A e B que têm o mesmo valor verdade, para qualquer enunciado $\alpha(p/A)$, se A for substituído por B, será obtido outro enunciado $\alpha(p/B)$ com o mesmo valor verdade que o enunciado inicial $\alpha(p/A)$.[7]”*

Dada uma modalidade □ e um enunciado ϕ interpretado na situação atual, o valor verdade do enunciado □ϕ nesta mesma situação depende do que ocorre em situações ou estados alternativos. A semântica relacional representa estas situações como pontos. No contexto filosófico, os pontos são tratados como mundos possíveis, já em teoria da computação, eles são apenas estados. Assim, a semântica relacional dos mundos possíveis de Carnap [*cf.* 10] é o que hoje é chamada de modalidade alética e a de Prior [11], tensa.

Quem trouxe a forma, hoje padrão, de dar semântica à lógica modal foi S. Kripke [8], ao mesmo tempo que Hintikka e Kanger [*cf.* 10], embora Kripke tenha permanecido consagrado, com modelos construídos a partir de três objetos, descritos formalmente no capítulo seguinte:

I. *Mundos possíveis*. Um conjunto não vazio de pontos, que representam as situações pertinentes. Qualquer um deles pode ser a atual.
II. *Relação de acessibilidade*. Uma relação entre dois pontos indica que situações são alternativas a quais.
III. *Função de valoração*. Uma interpretação que estabelece quais enunciados são verdadeiros e quais falsos para cada situação.

Desde então, o desenvolvimento da lógica modal cresceu rápido, tornando-se também bem diversificado.

3. Sintaxe da lógica Modal

Esse capítulo descreve precisamente a sintaxe das palavras pertencentes à linguagem formal da lógica modal. A linguagem é então definida matematicamente como o menor conjunto de expressões, consideradas legítimas, construídas a partir de um alfabeto e um conjunto bem definido de funções.

3.1. Uma Lógica "*middleware*"

Expondo em termos de conjuntos, a lógica clássica proposicional estaria num domínio estritamente inferior contida na lógica de predicados ou de primeira ordem. Sendo assim, em se tratando da discussão a respeito da necessidade, na lógica de primeira ordem existem meios de se construir uma linguagem formal que a defina. Ou seja, algo como "para todo *x*, se *x* é uma possibilidade dada a lei da gravidade, e esta possibilidade é tal que a maçã é arrancada da árvore, então esta possibilidade é também que a maçã caia no chão" poderia ser escrito formalmente como

$$\forall x(Possibilidade\_lei(x) \wedge \text{Arrancada}(maçã, x) \rightarrow Cai(maçã, x)).$$

No lugar de escrever tudo isso, a lógica modal conta com apenas 2 operadores novos, além dos já consolidados da lógica clássica. Mencionando o caso anterior, não se escreve "$\Diamond xpx$" ou "existe uma possibilidade *x*, e *x* é tal que *p* é verdade", mas apenas "$\Diamond p$", significando "é possível que *p* é verdade". Entretanto, neste caso, expressar possibilidade e necessidade em termos da lógica modal é estritamente mais limitado que a forma como expressa a lógica de predicados, como exibido anteriormente.

A Lógica Modal pode ser imediatamente enxergada de duas vias: (i) os modelos de Kripke, descritos detalhadamente na seção seguinte, naturalmente expresso em grafos, como uma interpretação desta lógica modal; ou (ii) ela mesmo sendo uma ferramenta para a interpretação de grafos. Sendo a lógica modal turing-decidível, como em Mastop[10], em detrimento da indecidível lógica de predicados, ela é a ferramenta mais indicada para a manipulação de grafos, com variantes na classe PSPACE de complexidade.

3.2. Sintaxe

A estrutura base proposta por Kripke é bem definida em Costa [4], de onde são tiradas as primeiras definições. Contudo, a carência de definições com respeito a grafos, como presentes em Mastop [10], fez necessário o uso conjunto das definições apresentadas por ambos os autores. As derradeiras definições seguem a organização de Carnielli e Pizzi [2].

Aqui foi utilizado o conceito matemático de fecho indutivo, por ser uma definição mais precisa na qual o universo de todas as possíveis expressões é matematicamente bem definido, além da definição dos operadores, com seus domínios e contra-domínios. Assim, o fecho indutivo é o menor conjunto indutivo que contém a base e é fechado sob as operações definidas.

A definição do alfabeto de símbolos segue a definição da lógica clássica como ela é, com a adição apenas dos operadores modais. Assim, toda a definição modal pode ser alicerçada na definição da linguagem formal da lógica clássica e as definições modais propriamente ditas, construídas a partir daí, como já mencionado.

Definição 1 (Alfabeto da Lógica Modal): O alfabeto da lógica modal, denotado por $\mathbf{\Sigma}$, é o conjunto formado a partir da união dos seguintes conjuntos de símbolos:

I. Um conjunto de constantes proposicionais: $\{V, F\}$;
II. Um conjunto enumerável de variáveis proposicionais denotado por $\wp$;
III. Uma dupla de parêntesis: "(" e ")";
IV. Os quatro conectivos da lógica clássica proposicional: "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\Rightarrow$";
V. Os conectivos modais: "$\square$" e "$\Diamond$"; "$\square$" para "necessidade" e "$\Diamond$" para "possibilidade".

Definição 2 (Conjunto F de funções): Seja $\mathbf{\Sigma}$ o alfabeto da Lógica Modal, $\mathbf{\Sigma}^*$ o conjunto de todas as cadeias sobre $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{F}$ é o conjunto que contém as seguintes funções:

$\mathbf{f}_1 : \mathbf{\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{\Sigma}^*$ $\quad \mathbf{f}_1(p) = (\neg p)$

$\mathbf{f}_2 : \mathbf{\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{\Sigma}^*$ $\quad \mathbf{f}_2(p) = (\square p)$

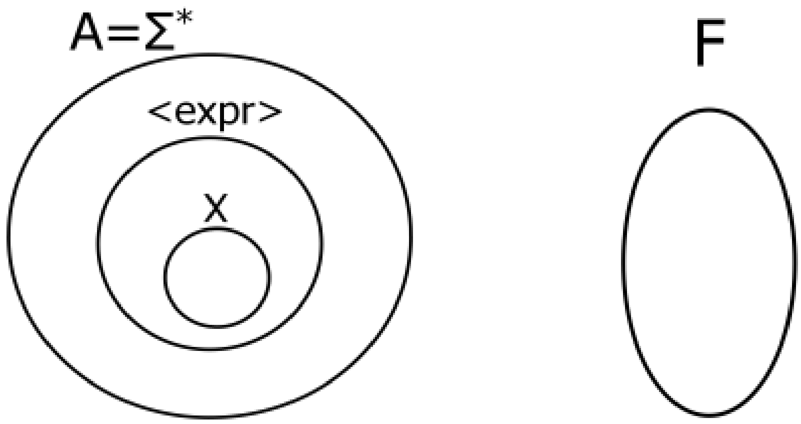
$\mathbf{f}_3 : \mathbf{\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{\Sigma}^*$ $\quad \mathbf{f}_3(p) = (\Diamond p)$

$\mathbf{f}_4 : \mathbf{\Sigma}^* \times \mathbf{\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{\Sigma}^*$ $\quad \mathbf{f}_4(p_1, p_2) = (p_1 \wedge p_2)$

$\mathbf{f}_5 : \mathbf{\Sigma}^* \times \mathbf{\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{\Sigma}^*$ $\quad \mathbf{f}_5(p_1, p_2) = (p_1 \vee p_2)$

$\mathbf{f}_6 : \mathbf{\Sigma}^* \times \mathbf{\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{\Sigma}^*$ $\quad \mathbf{f}_6(p_1, p_2) = (p_1 \Rightarrow p_2)$

Definição 3 (Conjunto das fórmulas bem-formadas[2]): O conjunto $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (<expr>) de todas as fórmulas bem-formadas é o fecho indutivo formado a partir do conjunto X = $\wp \cup \{V, F\}$ e **F**, ou seja, é o menor conjunto que contem X e é fechado sob as funções de **F**, em outras palavras é menor conjunto indutivo sob X e **F**.



[2] A definição indutiva clássica corresponde a:

I. Todo símbolo proposicional é uma fórmula bem-formada atômica;
II. Se α é uma fórmula, $(\neg\alpha)$, $(\Box\alpha)$ e $(\Diamond\alpha)$ também é uma fórmula bem-formada;
III. Se α e β são fórmulas, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \Rightarrow \beta)$ também são fórmulas bem-formadas;
IV. E, além disso, nada mais é uma fórmula bem-formada.

4. Semântica

4.1 Modelo de Kripke e operações com grafos

Definição 4 (Modelo de Kripke): Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as fórmulas bem-formadas, um modelo (do inglês *model*) é definido como uma terna ordenada:

$$\langle \mathcal{W}, \mathfrak{R}, v \rangle,$$

em que $\mathcal{W}$ é um conjunto não-vazio, cujos membros são comumente referidos como *mundos possíveis*, $\mathfrak{R}$, uma relação binária entre os mundos possíveis ($\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$) chamada de *relação de acessibilidade* e v, uma função binária, chamada de *função de valoração*, definida pela assinatura:

$$v: \mathcal{W} \times \mathcal{F} \rightarrow \{V, F\}.$$

Como a Lógica Modal foi formalmente definida após a Lógica de Primeira Ordem, é plausível que Kripke tenha se munido das definições desta ao construir a sua própria.

Definição 5 (Satisfatibilidade): Sejam $\mathcal{F}$, com α e $\beta \in \mathcal{F}$, P um símbolo proposicional $\in \wp$ e $\langle \mathcal{W}, \mathfrak{R}, v \rangle$ uma estrutura em que $\mathfrak{w}$ é um mundo possível qualquer de $\mathcal{W}$ ($\mathfrak{w} \in \mathcal{W}$). Uma relação de *satisfação* é definida com a assinatura

$$\Vdash \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{F}$$

e as seguintes propriedades:

$(\mathcal{S}\ P)$	$\mathfrak{w} \Vdash P$	sse $v(\mathfrak{w}, P) = \mathrm{V}$;
$(\mathcal{S}\ \neg)$	$\mathfrak{w} \Vdash \neg\alpha$	sse $\mathfrak{w} \nVdash \alpha$;
$(\mathcal{S}\ \wedge)$	$\mathfrak{w} \Vdash \alpha \wedge \beta$	sse $\mathfrak{w} \Vdash \alpha$ e $\mathfrak{w} \Vdash \beta$;
$(\mathcal{S}\ \vee)$	$\mathfrak{w} \Vdash \alpha \vee \beta$	sse $\mathfrak{w} \Vdash \alpha$ ou $\mathfrak{w} \Vdash \beta$;
$(\mathcal{S} \Rightarrow)$	$\mathfrak{w} \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$	sse $\mathfrak{w} \nVdash \alpha$ ou $\mathfrak{w} \Vdash \beta$;
$(\mathcal{S}\ \square)$	$\mathfrak{w} \Vdash \square\alpha$	sse $\forall\mathfrak{w}'\ ((\mathfrak{w}' \in \mathcal{W}, \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w}' \rangle \in \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{w}' \Vdash \alpha)$;
$(\mathcal{S} \diamondsuit)$	$\mathfrak{w} \Vdash \diamondsuit\alpha$	sse $\exists\mathfrak{w}'\ ((\mathfrak{w}' \in \mathcal{W}, \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w}' \rangle \in \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{w}' \Vdash \alpha)$.

Seja $\mathcal{A} = \langle \mathcal{W}, \mathfrak{R}, v \rangle$ um modelo. Diz-se que $\mathcal{A}$ *satisfaz* α se existe algum mundo $\mathfrak{w} \in \mathcal{W}$ tal que $\mathfrak{w} \Vdash \alpha$, escrevendo $\mathfrak{w} \Vdash \alpha[v]$ quando para explicitar a função de valoração v. Diz-se que α é *satisfatível* se existe algum modelo que o satisfaça, *insatisfatível* caso contrário. Se uma fórmula α é válida em $\mathcal{A}$ para todo mundo $\mathfrak{w} \in \mathcal{W}$, $\mathfrak{w} \Vdash \alpha$, $\mathcal{A}$ é um *modelo* para α.

Como havia mencionado anteriormente, Costa [4] define apenas o modelo de Kripke, se fazendo necessário, para o entendimento a respeito da ordem de complexidade, a definição da estrutura de Kripke (ou *frame*, do inglês). A justificativa é simples: em termos da lógica clássica proposicional, toda preocupação residia na valoração verdade do modelo. Em se tratando da lógica modal, as considerações são mais amplas: deve-se avaliar se algo é necessário, possível e, para tal, deve-se observar além do que simplesmente é verdadeiro ou falso. E, neste caso, as estruturas de Kripke servem para uso quando as considerações se abstraem da valoração, ou seja, os *frames* consistem apenas do conjunto de mundos possíveis e da relação de acessibilidade.

Definição 6 (*Kripke frame*): Um Kripke *frame* é uma dupla $F = \langle \mathcal{W}, \mathfrak{R} \rangle$ tal que

$\mathcal{W}$ é o conjunto não-vazio de mundos possíveis;

$\mathfrak{R}$ é a relação de acessibilidade $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$.

Se $\mathfrak{w}\mathfrak{R}v$, então v é acessível a partir de $\mathfrak{w}$ e, se v é acessível a partir de $\mathfrak{w}$, então v é um *sucessor* de $\mathfrak{w}$.

Agora é dada a representação dos Kripke *frames* por meio de grafos:

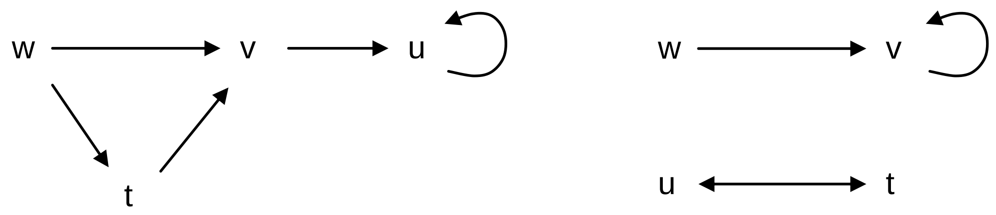


Figura 3: Representação em grafos dos Kripke *frames*.

No primeiro grafo, o conjunto de mundos possíveis é $\{t, u, v, w\}$ e a relação de acessibilidade $w\mathfrak{R}v$, $w\mathfrak{R}t$, $t\mathfrak{R}v$, $v\mathfrak{R}u$ e $u\mathfrak{R}u$. No segundo, o conjunto de mundos possíveis é da mesma forma, mas em *w*, o único mundo acessível é *v* e, para *v*, o único mundo acessível é ele mesmo. Tal relação de acessibilidade somente é relevante quando a avaliação de fórmulas $\Box$ e $\Diamond$.

De modo semelhante, o Kripke *model* é representado em grafo a seguir:

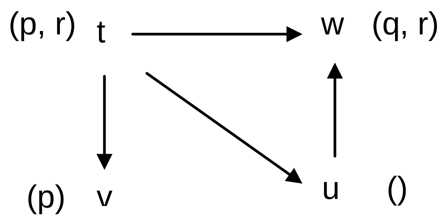


Figura 4: Representação em grafo do Kripke *model*.

Neste modelo, o *frame* consiste de um conjunto de mundos possíveis com quatro elementos, $\{t, u, v, w\}$ e as relações $t\mathfrak{R}w$, $t\mathfrak{R}v$, $t\mathfrak{R}u$ e $u\mathfrak{R}w$. Agora, a função de valoração $\mathscr{v}$ é tal que $\mathscr{v}(\mathrm{t}) = \{p, r\}$ de modo que, p e r são verdade em t e q é falso. Assim, em u, todas as proposições atômicas são falsas e em v apenas p é verdadeira.

Com esta definição em mente, dado um modelo $\mathrm{M} = \langle \mathcal{W}, \mathfrak{R}, \mathscr{v} \rangle$, a avaliação de fórmulas $\Box$ e $\Diamond$ se dá por:

> $\Box\varphi$ é verdade num mundo possível $\mathfrak{w}$ sse φ é verdade em todo mundo possível que é acessível a partir de $\mathfrak{w}$.
>
> $\Diamond\varphi$ é verdade num mundo possível $\mathfrak{w}$ sse φ é verdade em algum mundo possível que é acessível a partir de $\mathfrak{w}$.

4.2 Os Operadores ☐ e ◇

Conforme brevemente introduzido no capítulo anterior, as noções modais eram visualizadas a partir do quadro de Aristóteles. Entre os vértices diagonais opostos, as fórmulas são contraditórias, somente uma das fórmulas pode ser verdade; entre os vértices superiores, as sentenças são contrárias, ou seja, não podem ser ao mesmo tempo verdadeiras, porém podem ser falsas; e, finalmente, entre os vértices inferiores, as sentenças subcontrárias não podem ser ao mesmo tempo falsas, mas podem ser verdadeiras.

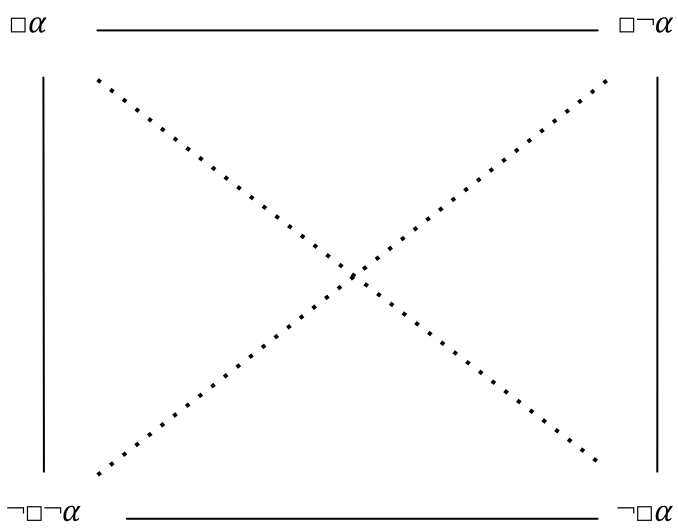


Figura 5: Quadrado de Aristóteles sob a ótica modal proposicional.

A noção de *contingência* merece um tratamento especial. Nos trabalhos de Aristóteles, contingência é identificada como às vezes possibilidade, às vezes não-necessidade. Na tradição filosófica, é considerado contingentemente verdadeiro aquilo que nem é necessariamente verdade nem necessariamente falso. Em termos proporcionais, $(\neg\Box\alpha \wedge \neg\Box\neg\alpha)$, equivalente a $(\Diamond\neg\alpha \wedge \Diamond\alpha)$. Sendo mais cuidadoso, esta noção e sua negação não pertencem ao quadrado propriamente dito, mas a uma versão estendida dele (ver Figura 6). É pertinente, portanto, definir dois símbolos que as representem:

Definição 7 (O *símbolo* ∇): $\nabla\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$.

Definição 8 (O *símbolo* ∆): $\Delta\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg\nabla\alpha$;

Ou, em termos do símbolo $\Box$, $\Delta\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \Box\alpha \vee \Box\neg\alpha$.

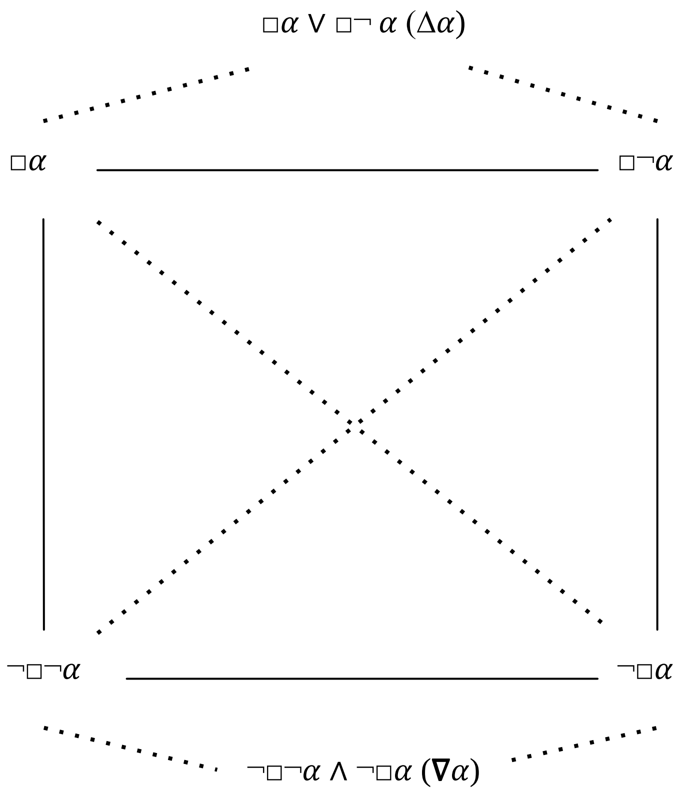


Figura 6: Quadrado de Aristóteles estendido.

Como uma vez mencionado, é hora de formalizar a compreensão de fórmulas equivalentes. Jansana[7] resume bem este conceito:

> *"Diremos que duas fórmulas são equivalentes se, para todo modelo, ambas são verdadeiras em exatamente os mesmos pontos."*

Definição 9 (Fórmulas Equivalentes):

1. $\Box\alpha \equiv \neg\Diamond\neg\alpha$
2. $\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$
3. $\Box\neg\alpha \equiv \neg\Diamond\alpha$
4. $\neg\Box\alpha \equiv \Diamond\neg\alpha$

Munido de todas estas definições, é válido definir agora novamente os operadores modais a partir daí.

Definição 10 (O *símbolo* □): $\Box\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \wedge \Delta\alpha$

Definição 11 (O *símbolo* ◇): Segue das definições anteriores.

4.3 O Sistema K

Toda fórmula canônica aqui usada funciona como teorema na medida em que necessita de uma prova formal como definição. Uma vez teorema, estas fórmulas (escritas entre parêntesis, em negrito e itálico) serão usadas para definir os Sistemas Modais, que são quando os modelos de Kripke têm como axioma alguma destas fórmulas. Os sistemas, por sua vez, respeitam a nomenclatura das fórmulas que lhes servem de axioma que assim os denominam.

Para introduzir o sistema **K**, o sistema que funciona como o modelo canônico para a lógica modal, que está intrínseco a todos os outros sistemas, será proposta uma fórmula como exemplo, uma vez que ela funcionará como a fórmula (***K***).

Exemplo 5: A fórmula $\Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)$ é válida para todas as estruturas $\langle \mathcal{W}, \mathfrak{R}, \mathcal{v} \rangle$:

Prova: Por contradição, supõe-se que existe uma estrutura $\langle \mathcal{W}, \mathfrak{R}, \mathcal{v} \rangle$, com $\mathfrak{w} \in \mathcal{W}$, que não satisfaz a fórmula acima. Daí segue-se:

$\mathfrak{w} \nVdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)[\mathcal{v}]$,

sse $\neg\, \mathfrak{w} \Vdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)[\mathcal{v}]$, pela def. de $\nVdash$,

sse $\neg\, (\mathfrak{w} \nVdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta)[\mathcal{v}]$ ou $\mathfrak{w} \Vdash (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)[\mathcal{v}]$), pela def. de ($\mathcal{S} \Rightarrow$),

sse $\neg\, \mathfrak{w} \nVdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta)[\mathcal{v}]$ e $\neg\, \mathfrak{w} \Vdash (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)[\mathcal{v}]$. (*)

Para continuar a prova, será considerado o primeiro termo ($\neg\, \mathfrak{w} \nVdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta)[\mathcal{v}]$) da conjunção (*) acima:

$\neg\, \mathfrak{w} \nVdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta)[\mathcal{v}]$,

sse $\neg\, \neg\, \mathfrak{w} \Vdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta)[\mathcal{v}]$, pela def. de $\nVdash$,

sse $\mathfrak{w} \Vdash \Box(\alpha \Rightarrow \beta)[\mathcal{v}]$, dupla negação,

sse $\forall \mathfrak{w}'((\mathfrak{w}' \in \mathcal{W}, \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w}' \rangle \in \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{w}' \Vdash (\alpha \Rightarrow \beta)[\mathcal{v}]$, pela def. de ($\mathcal{S}\ \Box$),

sse $\forall \mathfrak{w}'((\mathfrak{w}' \in \mathcal{W}, \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w}' \rangle \in \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{w}' \nVdash \alpha[\mathcal{v}]$ ou $\mathfrak{w}' \Vdash \beta[\mathcal{v}]$, pela def. de ($\mathcal{S} \Rightarrow$),

sse $\forall \mathfrak{w}'((\mathfrak{w}' \in \mathcal{W}, \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w}' \rangle \in \mathfrak{R}) \rightarrow \neg\, \mathfrak{w}' \Vdash \alpha[\mathcal{v}]$ ou $\mathfrak{w}' \Vdash \beta[\mathcal{v}]$, pela def. de $\nVdash$. (**)

Finalmente, considera-se agora o segundo termo ($\neg\, \mathfrak{w} \Vdash (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)[\mathcal{v}]$) da conjunção (*):

$\neg\, (\mathfrak{w} \Vdash (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)[\mathcal{v}])$

sse $\neg\, (\mathfrak{w} \nVdash \Box\alpha[\mathcal{v}]$ ou $\mathfrak{w} \Vdash \Box\beta[\mathcal{v}])$, pela def. de ($\mathcal{S} \Rightarrow$),

sse $\neg\, \mathfrak{w} \nVdash \Box\alpha[\mathcal{v}]$ e $\neg\, \mathfrak{w} \Vdash \Box\beta[\mathcal{v}]$, pela lei de De Morgan, sse $\neg\neg\mathfrak{w} \Vdash \Box\alpha[\upsilon]$ e $\neg\,\mathfrak{w} \Vdash \Box\beta[\upsilon]$, pela def. de $\nVdash$,

sse $\mathfrak{w} \Vdash \Box\alpha[\upsilon]$ e $\neg\,\mathfrak{w} \Vdash \Box\beta[\upsilon]$, dupla negação,

sse $\forall\mathfrak{w}'((\mathfrak{w}' \in \mathcal{W}, \langle\mathfrak{w}, \mathfrak{w}'\rangle \in \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{w}' \Vdash \alpha[\upsilon]$

e $\neg\,\forall\mathfrak{w}''((\mathfrak{w}'' \in \mathcal{W}, \langle\mathfrak{w}, \mathfrak{w}''\rangle \in \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{w}'' \Vdash \beta[\upsilon]$, pela def. de (S $\Box$),

Contradizendo assim (**) e provando, portanto que não pode existir estrutura tal que não satisfaça $\Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)$. Ou, de outra forma, todas as estruturas a satisfazem.

4.4 Sistemas Modais Normais

Retomando o trabalho de Clarence Irving Lewis e Cooper Harold Langford [9], eles tentaram distinguir a implicação estrita da implicação material. A implicação material, de símbolo "$\supset$", pode ser reduzida a uma disjunção de forma "$\alpha \supset \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$", como é sabido. A implicação estrita, presente nos sistemas de **S1** a **S5**, cujas formalidades serão explícitas mais adiante, atribui a eles uma intuição fundamental acerca dela: tal implicação ocorre quando é impossível que o antecedente é verdade e o consequente falso. Sua definição formal é dada a seguir.

Definição 12 (Implicação estrita): A implicação estrita, denotada pelo símbolo $\prec$, é definida como

$$\alpha \prec \beta \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Diamond\,(\alpha \wedge \neg\beta).$$

Assim, a partir das leis de manipulação dos conectivos modais, é verificada a equivalência

$$\alpha \prec \beta \equiv \Box\,(\alpha \supset \beta).$$

Dizer que α implica estritamente em β é afirmar que a implicação material correspondente é necessária.

Outro operador que merece ser definido é o "$\asymp$". Ele funciona como o operador "$\Leftrightarrow$" ('se, e somente se'), do cálculo proposicional clássico.

Definição 13 (O *operador* $\asymp$): $\alpha \asymp \beta \equiv (\alpha \prec \beta) \wedge (\beta \prec \alpha)$

Assim como o sistema **K**, em homenagem a Kripke, introduzido na seção anterior, é um sistema que tem a fórmula (***K***) como teorema, outras fórmulas ganham destaque, nome (ou letra) e podem introduzir um novo sistema normal quando são adicionadas como teorema em união com o sistema **K**.

Coscarelli[3] menciona brevemente o que deveria ser tratado com mais rigor: a regra da necessitação.

Definição 14 (Regra de Necessitação): Seja S um sistema modal e α uma fórmula bem-formada, a regra de necessitação é definida como a seguinte lei: *Se α é um teorema de um sistema modal **S**, $\Box\alpha$ é também um teorema de **S**.*

É importante observar a construção das fórmulas para que a regra supracitada não cause ambiguidade na sua interpretação. Por exemplo, a fórmula $p \supset \Box p$, cujo significado é 'o que quer que seja verdade, é necessariamente verdade', traria ao sistema a incapacidade de distinção entre o que é necessariamente verdadeiro e o que é factualmente verdadeiro, tornando supérfluo a construção de todo um sistema lógico novo, neste caso modal.

Existem dois teoremas, o segundo mais fraco que o primeiro, que permitem que os operadores modais sejam definidos em termos dos operadores de contingência. O primeiro, chamado (***T***) é teorema do que hoje é conhecido como a modalidade alética (ou seja, lógica) na Lógica Modal. O segundo, o teorema (***D***), é teorema do que hoje é conhecido como modalidade deôntica, formalmente comparada com a modalidade alética na seção seguinte. Ele é o princípio mais fraco que se verifica para todo α.

Teorema 1 (O teorema T): $\Box\alpha \supset \alpha$

Teorema 2 (O teorema D): $\Box\alpha \supset \Diamond\alpha$

O teorema (***D***) é, na verdade, uma consequência de (***T***):

Prova: $\Box\alpha \supset \alpha$;

$\Box\alpha \supset \alpha \equiv \Box\neg\alpha \supset \neg\alpha$	α pode ser qualquer, neste caso α é $\neg\alpha$;
$\Box\neg\alpha \supset \neg\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha \supset \neg\neg\alpha$	negação em ambos os lados da implicação;
$\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$	pela definição de fórmulas equivalentes;
$\Diamond\alpha \supset \neg\neg\alpha$	e contraposição;
$\neg\neg\alpha \supset \Diamond\alpha$.	

Por outro lado, (***D***) é equivalente a $\neg(\Box\alpha \land \Box\neg\alpha)$, descrevendo a contrariedade das fórmulas dos vértices superiores no Quadrado de Aristóteles.

Agora é possível definir formalmente a linguagem da Lógica Modal, estendendo a definição dada no capítulo 3, de forma a incluir os novos operadores.

Definição 17 (A linguagem ML): Seja **ML** uma linguagem modal (do inglês, *Modal Language*) definida como uma tripla tal que: **ML** = $\langle \boldsymbol{\mathcal{F}}, \supset, \square \rangle$, respectivamente o conjunto de símbolos proposicionais, a implicação material e a necessitação. Os operadores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, e $\equiv$ são considerados inerentes, pelo fato de ela conter o cálculo proposicional clássico. Agora, são lançadas algumas definições, que se encontram no trabalho de Carnielli e Pizzi [2] e fecham esta seção.

Observe que ML inclui o $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ definido no capítulo 3 e acrescentas mais expressões incluindo os novos operadores $\Diamond$, Δ, ∇, $\asymp$ e $\prec$.

Definição 18 (Subfórmulas): As subfórmulas e subfórmulas imediatas de uma fórmula bem-formada são simultaneamente definidas como:

1. Toda fórmula α é uma subfórmula de α.
2. Nenhuma fórmula bem-formada é uma subfórmula imediata de Fe α, para todo $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.
3. A única subfórmula imediata de $\square\alpha$ é α.
4. As únicas subfórmulas imediatas de $\alpha \supset \beta$ são α e β.
5. Se α é uma subfórmula de β e β é uma subfórmula imediata de γ, então α é subfórmula de γ.
6. Nenhuma outra sequência de símbolos é subfórmula.

Definição 19 (Lógica Modal Proposicional Normal): Uma lógica modal proposicional normal $\boldsymbol{S}$ é qualquer subconjunto do conjunto de fórmulas bem-formadas $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ que contém:

(a). Todos os teoremas da lógica clássica ou cálculo proposicional;

(b). O axioma (***K***) $\square(\alpha \supset \beta) \supset (\square\alpha \supset \square\beta)$;

e é fechado sob as seguintes regras:

(***SU***) Substituição Uniforme: para cada p e $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$, se $\vdash_S \alpha$, então $\vdash_S \alpha[p/\beta]$;

(***MP***) Modus Ponens: β é dedutível de α e $\alpha \supset \beta$;

(***Nec***) Necessitação: se $\vdash_S \alpha$, então se $\vdash_S \square\alpha$.

Vale mencionar que os sistemas **S1**, **S2** e **S3** de Lewis não eram fechados sob esta última regra de necessitação, mas uma outra regra semelhante, diga-se (***NecR***). Ou seja:

(***NecR***): Para $\boldsymbol{S} \in \{\mathbf{S1}, \mathbf{S2}, \mathbf{S3}\}$, se $\vdash \alpha$, então $\vdash_S \square\alpha$.

Esta regra expressa a ideia de que os teoremas da lógica proposicional clássica são todos necessários, enquanto que a anterior estende esta propriedade para todas as fórmulas prováveis do sistema de referência. Sistemas fechados sob esta (***NecR***) são chamados sistemas não-normais.

O sistema **K** pode ser estendido por um número arbitrário de axiomas, compondo assim a chamada família de sistemas modais normais. Se ($\boldsymbol{X}_1$) … ($\boldsymbol{X}_n$) são siglas de axiomas, $\mathbf{KX}_1$… $\mathbf{KX}_n$ será o nome do sistema correspondente resultante da extensão do **K** com tais axiomas. Já foram introduzidos os axiomas (***T***) e (***D***) e a menção dos demais é feita a seguir.

Na tabela abaixo, são listadas as modalidades normais a partir de **K**, e suas características:

Nome	Lógica	Classe de Estrutura Correspondente
K		Todas as estruturas
D	K +$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Estruturas Seriais
T	K +$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	Estruturas Reflexivas
B	K +$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$	Estruturas Simétricas
4	K +$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	Estruturas Transitivas
5	K +$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	Estruturas Euclideanas
S4	T +$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	Estruturas Preordenadas
S5	S4 +$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$	Estruturas de Equivalência

Tabela 1: Sistemas Modais Normais.

Na literatura, os sistemas **KT** e **KTB** são chamados **T** e **B**, respectivamente, enquanto que os **S4** e **S5** de Lewis são equivalentes respectivos dos **KT4** e **KTB4**. É válido notar que combinações diferentes de axiomas podem gerar sistemas que são dedutivamente equivalentes, por exemplo **KT5** = **KTB4** e é trivialmente provável. A nomenclatura apresentada diz respeito à característica da relação de acessibilidade $\mathfrak{R}$. Por exemplo, a fórmula $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$ é válida num *frame F* se $\mathfrak{R}$ for uma função, como em Jansana[7, pág 51]. Para melhor entendimento dos conceitos de função, relação, ordem, consultar Hrbacek e Jech [6, pág 23].

O axioma (***D***), por motivos de conhecimento, pode ser reescrito sem perdas com a notação da lógica de primeira ordem, bem como o serão os axiomas (***B***), (***4***), e (***5***). Assim eles seriam:

(***D***): $\Box\alpha \supset \Diamond\alpha \quad \equiv \quad \forall x \exists y\ (R\ (x, y))$;

($\boldsymbol{T}$): $\Box\alpha \supset \alpha$ $\equiv$ $\forall x\, (R\,(x, x))$;

($\boldsymbol{B}$): $\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$ $\equiv$ $\forall x \forall y\, (R\,(x, y) \rightarrow R\,(y, x))$;

($\boldsymbol{4}$): $\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$ $\equiv$ $\forall x \forall y \forall z\, (R\,(x, y) \wedge R\,(y, z) \rightarrow R\,(x, z))$

($\boldsymbol{5}$): $\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$ $\equiv$ $\forall x \forall y \forall z\, (R\,(x, y) \wedge R\,(x, z) \rightarrow R\,(y, z))$

É válido mencionar ainda vários axiomas, que não foram citados por Mastop [10]. São eles:

Definição 20 (O axioma da Unicidade): O axioma da Unicidade, (***CD***), é definido da seguinte forma:

$$(\boldsymbol{CD}): \Diamond\alpha \supset \Box\,\alpha \qquad \equiv \qquad \forall x \forall y \forall z\, (R\,(x, y) \wedge R\,(x, z) \rightarrow y = z);$$

Definição 21 (O axioma de Gödel-Löb): O axioma de Gödel-Löb, (***GL***), é definido da seguinte forma:

$$(\boldsymbol{GL}): \Box(\Box\alpha \supset \alpha) \supset \Box\alpha \qquad \equiv \qquad \forall x \forall y \exists z\, (x \neq y \wedge R\,(x, y) \rightarrow (z \neq x \wedge z \neq y \wedge (R\,(x, y) \wedge R\,(z, y))))$$

A seguir, é demonstrado um esquema, também famoso na literatura, presente em Coscarelli[3], Carnielli e Pizzi[2], que ilustra o relacionamento entre os sistemas mais importantes obtidos pela combinação dos axiomas. As setas indicam inclusão própria.

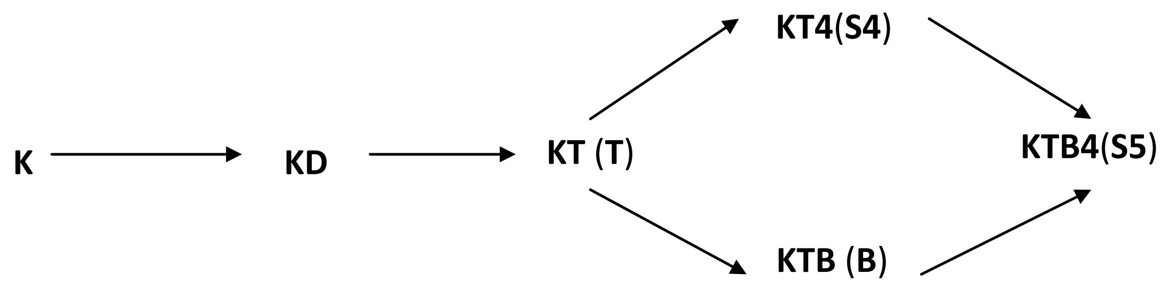


Figura 7: Diagrama de relacionamento dos sistemas modais normais.

Assim como o axioma (***D***) segue do (***T***), é visível no esquema que todo sistema inclui o anterior. Pode ocorrer dificuldade na leitura de que todo sistema nele presente é distinto dos demais, ou seja, não inclui, por sua vez, o posterior. A prova de que o axioma (***T***) não é derivável no sistema **KD**, por exemplo, não pode ser obtida apenas por métodos sintáticos, mostrando ser uma tarefa não trivial.

O sistema **S5**, o mais forte deles, tem uma posição especial na família dos sistemas modais normais. Algumas propriedades de **S5** valem para todos os sistemas, outras apenas para ele, como é natural observar. O trabalho cuidadoso com este sistema requer um texto minucioso e completo, estímulo para trabalhos futuros.

5. Aspectos Filosóficos das Modalidades

Uma modalidade é um "modo de verdade" de uma proposição: sobre quando essa proposição é verdadeira, ou, de que maneira, em que circunstâncias seria, poderia ou poderia ter sido verdadeira. A lógica modal, portanto, é o estudo do raciocínio sobre as modalidades, inferindo das premissas modais que alguma conclusão modal é válida.

> *"Uma modalidade é uma expressão que, aplicada a uma oração S, proporciona uma nova oração sobre o modo em que S é verdadeira, ou sobre o modo em que é aceita. " [7]*

E ele continua: "*Por exemplo, sobre quando é verdadeira, como é verdadeira, em que circunstâncias é verdadeira*".

Imagine que se está segurando uma caneta e ela escorrega. O que a caneta fará? Presumivelmente, a resposta será: "Ela cairá até atingir o chão e depois ficará em repouso". No entanto, muitos admitirão que não é um mero acidente. A caneta estará sujeita à atração gravitacional da terra, tornando inevitável a sua queda: deve cair, não pode acontecer de outra forma. Eis a preocupação filosófica da modalidade **alética**: distinguindo entre o que é necessário, possível, ou acidental, e impossível. Sobre ela já foi discorrido rigorosamente.

Da mesma forma, considere a situação em que se chega em casa depois de participar de uma palestra e vê que uma janela está quebrada, a porta está aberta, as coisas do armário estão espalhadas pelo chão e algo está faltando. Deduz-se que se fora roubado. Se um policial perguntar se há algo mais que possa ter acontecido e responde-se com razão "não", não há outra possibilidade de que um ladrão entrou na casa e roubou algum pertence, isso deve ser o que aconteceu, não pode ser de outra forma. Esta é a modalidade **epistêmica**: que algo é certo, verificado; indeciso; ou excluído, falsificado. Esta lógica merece um tratamento formal que não é abordado neste trabalho, mas a intenção de fazê-lo é conteúdo de trabalhos futuros.

Há diversas modalidades ainda: lógica tensa, como já mencionado, tratando do "sempre", "até", "finalmente". Ela merece também um tratamento com rigor formal, material também para trabalhos futuros. A lógica dinâmica, tratando de "certificar", "evitar"; e até uma modalidade chamada doxástica, mencionada por Jansana [7], que lida com a crença com resultados metalógicos, ou seja, não focado nos sistemas lógicos quanto à formação de argumentos válidos e consistentes, mas com as propriedades destes sistemas.

Para todas estas modalidades, os conectivos $\Box$ e $\Diamond$ são considerados duais, opostos complementares. Portanto, é permitido ler este trabalho se, e somente se, não é obrigatório não o ler.

É natural que se considere as diferenças entre as modalidades. Se há alguém em frente à porta, então realmente há. Seria sabido se não houvesse. Por outro lado, não se diria: se é obrigatório que dados pessoais sejam privados, é verdade que dados pessoais são mantidos privados. Assim, na lógica epistêmica, a fórmula $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ seria considerada logicamente válida, mas na deôntica não.

Por exemplo, imagine que se compre um pacote de biscoitos. Quando se está fora da loja, abre-se o pacote e come-se um biscoito sem que ninguém reclame sobre isso. Está autorizado comer um biscoito fora da loja. No entanto, antes de comprar o pacote, quando ainda dentro da loja, abrir o pacote e comer um dos biscoitos não seria permitido, mas proibido. Não se pode comer o biscoito nessas circunstâncias — legalmente, não se pode fazê-lo. Isso é chamado de modalidade **deôntica**: que algo é obrigatório, permitido ou proibido. Sobre ela, considere as fórmulas equivalentes. Dizer que “é necessário α” e “não é possível que não α” sob a luz da modalidade deôntica é ler a fórmula como “é obrigatório que α” sendo equivalente a “não é obrigatório que não α” ou, em sua fórmula equivalente, “é permitido que α”.

Muito embora tenha sido mencionado anteriormente que a modalidade deôntica para a matemática não passa de um sistema modal normal cujo axioma é o ($\boldsymbol{D}$), o valor filosófico que ela carrega é tão grande que não merece somente um capítulo num texto sobre sistemas modais, mas um trabalho particular somente sobre ela. Este é, sem dúvida, tema para trabalhos futuros.

6. Conclusões e Trabalhos Futuros

Uma área muito promissora que merece a dedicação de muito trabalho. Se eu tivesse sabido que seria tão gratificante fazer pesquisa, tinha enveredado por aqui muito mais cedo.

Em se tratando de contribuições, ter elaborado um texto que servirá como alicerce para um estudo inicial sobre a Lógica Modal, abordando o estado da arte da modalidade que atualmente é chamada alética, além de conter um apanhado histórico com potencial para tornar-se referencial também no âmbito introdutório no estudo clássico da lógica.

O objetivo final de um trabalho futuro nessa área será a confecção de um livro didático abordando todos os assuntos aqui expostos, ademais de todos os pontos não trabalhados neste texto, sendo eles: as ferramentas de aparato dedutivo, ou seja, o método de dedução natural, cálculo de sequentes e *tableaux* analítico, a ênfase particular em cada uma das modalidades deôntica, tensa e dinâmica em suas abordagens filosóficas e práticas além de apresentar um modelo matemático computável de migração entre a linguagem formal e o aspecto filosófico com a linguagem natural.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] *cf*. BLANCHÉ. História da Logica de Aristóteles a Bertrand Russell. Edições 70, Lisboa, 1985.

[2] CARNIELLI, Walter; PIZZI, Claudio. Modalities and Multimodalities. 2008. Springer.

[3] COSCARELLI, Bruno Costa. Introdução à Lógica Modal. 2008. Universidade de São Paulo.

[4] COSTA, Marcos M. do C. Introdução à Lógica Modal Aplicada à Computação. Editado por Taisy Silva Weber. Porto Alegre: Instituto de Informática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.

[5] FREGE, G. 1879. *Begriffsschrift*, ("Notação conceitual"), a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. Em Van Heijenoort, J., Frege, G., & Gödel, K. (1970). Frege e Gödel: Two fundamental texts in mathematical logic. Editora da Universidade de Harvard.

[6] HRBACEK, Karel; Jech, Thomas. *Introduction to set theory*. 1999. 3ª Edição, revisada e expandida. Marcel Dekker Inc.

[7] JANSANA, Ramón. 2018 (acessado em 2018). Lógica Modal. Universidade de Barcelona. http://docplayer.es/46249169-Logica-modal-ramon-jansana-universitat-de-barcelona.html

[8] *cf*. KRIPKE, Saul A. *A completeness theorem in modal logic*. The Journal of Symbolic Logic, 24(1):1–13, 1959.

[9] LEWIS, C. I. LANGFORD, C. H. *Symbolic Logic*. 1952. Philosophy of Science 19, no. 2.

[10] MASTOP, Rosja. 2018 (acessado em 2018). *Modal Logic for Artificial Intelligence*. http://www.phil.uu.nl/~rumberg/infolai/.

[11] PRIOR, A. N. *Time and Modality*. 1957. Editora Universitária de Oxford.

[12] RUSSELL, B. *Necessity and possibility*. [1905]. Em A. Urquhart and A.C Lewis, editores, Foundations of Logic, 1903-05. Routledge, 1994.

[13] WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Londres: Routledge and Kegan Paul, 1922. Traduzido por C.K. Ogden, com uma introdução por Bertrand Russell.