



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Graduação em Engenharia da Computação

Análise de Antenas Microstrip Esféricas Anelares

Luiz de Lima Souza

Trabalho de Graduação

Recife
4 de dezembro de 2017

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Luiz de Lima Souza

Análise de Antenas Microstrip Esféricas Anelares

Trabalho apresentado ao Programa de Graduação em Engenharia da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia da Computação.

Orientador: *Odilon Maroja da Costa Pereira Filho*

Recife
4 de dezembro de 2017

*À minha mãe Sulamita Xavier, que Deus lhe abençoe e
cuide de sua saúde.
À meu pai Luiz Souza, que sua força para o trabalho ainda
dure muito.
Esse trabalho também é fruto dos seus esforços.*

Agradecimentos

Mãe sempre é sinônimo de amor e ternura. Minha mãe sempre esteve ao meu lado nos momentos difíceis. Em momentos como aqueles que entramos em desespero por pensar não haver soluções para um problema, ela me auxiliou a manter a calma e a entender que derrotas e vitórias em nossa vida sempre virão. Entretanto, devemos dar o nosso melhor para que as próximas vitórias a vir sejam maiores e mais gratificantes e as derrotas menores e menos frequentes. Agradeço e dedico esse trabalho a ela, e espero que se recupere logo dos problemas de saúde que vem enfrentando.

Agradeço ao meu pai e atribuo a ele o meu gosto pelos estudos, pois, ele sempre soube como me incentivar e me indicar o melhor caminho a se percorrer. Além disso, tenho muita admiração pelo seu esforço e capacidade de trabalhar duro, todos os dias da semana, faça chuva ou sol, e ainda encontrar tempo para se dedicar aos seus hobbies. Espero que, no futuro, eu possa ter essas mesmas qualidades.

Agradeço ao meu orientador, Odilon Maroja, não só por ter tirado as minhas incessantes dúvidas nesse assunto tão complicado, mas por ser um exemplo de professor, profissional e pessoa. Tenho tamanha admiração por sua sabedoria, paciência, e capacidade de entender as dificuldades dos alunos e sempre buscar ajudar no que poder. Mas, acima de tudo, gostaria de agradecer a sua compreensão e preocupação com os problemas que enfrentei nesse fim de curso, por causa dos problemas de saúde da minha mãe.

Agradeço a todos os meus amigos de faculdade, pelos momentos bons que eles me proporcionaram e também as ajudas com as dificuldades de um curso tão exigente. Saibam que guardarei na memória, com muito carinho, as lembranças de vocês.

Agradeço a OKI Brasil, não só pela a oportunidade de emprego, mas por ter me acolhido em uma verdadeira família. Trabalho em um lugar onde sempre tive todo o apoio para aumentar meus conhecimentos e dar sugestões para a melhoria do nosso produto. Além disso, foi na empresa que eu descobri como o trabalho pode ser prazeroso e divertido.

O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis
—JOSÉ DE ALENCAR

Resumo

Devido as dimensões reduzidas, antenas de micro fita encontram aplicações em áreas onde existam restrições com relação à tamanho, peso, performance, frequência de transmissão, facilidade de instalação e etc. Dentre essas antenas, as de formato planar são as mais debatidas na literatura por possuírem maior facilidade de instalação em circuitos impressos. Entretanto, em objetos onde a superfície não é plana, e.g. superfícies aerodinâmicas de aviões e mísseis, antenas planares apresentam um problema de adequação à superfície. Nesses casos, antenas de micro fita anelares são uma boa maneira de ter as vantagens das antenas de micro fita mantendo a facilidade instalação. Neste TG, serão estudadas as características de radiação de uma antena de micro fita anelar formada por um radiador, em formato de micro fita, envolvendo uma esfera condutora metálica. Dentre essas características estão: a impedância de entrada; o campo elétrico no interior e exterior da cavidade, o fator de qualidade e as potências dissipadas. A modelagem da antena será feita através do modelo da cavidade aplicado a região entre o radiador e a esfera condutora e simulada utilizando um software desenvolvido em MATLAB.

Palavras-chave: Antenas, Microfita, Cavidades Envoltórias, Esféricas

Abstract

Due to the reduced dimensions, microstrip antennas find applications in areas where there are restrictions regarding size, weight, performance, frequency of transmission, ease of installation, etc. Among these antennas, the ones with planar format are the most discussed in the literature because they have a better ease of installation on printed circuits. However, in objects where the surface is not flat, e.g. aerodynamic surfaces of aircraft and missiles, planar antennas present a problem of surface adequacy. In such cases, annular microstrip antennas are a good way to have the advantages of microstrip antennas while maintaining the ease of installation. In this graduation work, the radiation characteristics of an annular microstrip antenna formed by a radiator, in a patch format, involving a metallic conductor sphere, will be studied. Among these characteristics are: the input impedance; The electric field inside and outside the cavity, the quality factor and the dissipated power. The modeling of the antenna will be done through the model of the cavity applied to the region between the radiator and the sphere and simulated using a software developed in MATLAB.

Keywords: Antennas, Microstrip, Wraparound, Spherical

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Antenas de micro fitas esféricas	1
1.3	Modelo da cavidade	4
1.4	Estruturação do trabalho	6
2	Antena anelar de micro fita envoltória	7
2.1	Descrição da antena	7
2.2	Análise Modal na Cavidade	9
2.2.1	Modos TE_r sem variação radial ($\frac{\partial}{\partial r} F_r = 0$)	10
2.2.2	Modos TM_r sem variação radial ($\frac{\partial}{\partial r} A_r = 0$)	11
2.2.3	Equação diferencial para E_r com $\frac{\partial}{\partial r} = 0$	11
2.2.4	Modos TM_r na cavidade	13
2.2.5	Frequência de ressonância do modo v, m	15
2.2.6	Campos Modais $TM'_{v,m}$	15
2.3	Alimentação da antena	15
2.4	Campos no Interior da cavidade	17
2.5	Correntes Magnéticas Equivalentes	19
2.6	Modos Externos à esfera condutora	20
2.6.1	Modos TM_r	20
2.6.2	Potência dos modos TM_r	21
2.6.3	Modos TE_r	21
2.6.4	Potência dos modos TE_r	22
2.7	Expansão dos campos externos em modos TM_r e TE_r	23
2.8	Condições de contorno do campo externo	23
2.9	Impedância de entrada	24
2.9.1	Cálculo da tangente de perdas dielétricas	26
2.9.2	Cálculo da tangente de perdas condutivas	26
2.9.3	Cálculo da tangente de perdas de irradiação	26
2.10	Correção dos campos da Borda	27
3	Simulações Computacionais	29
3.1	Parâmetros de entrada	29
3.2	Frequências de ressonâncias	30
3.3	Tangente de perdas e Impedância de Entrada	31

3.4	Diagramas de irradiação	32
4	Conclusão	35
A	Apêndice	37
A.1	Constantes	37
A.2	Funções e Equações Utilizadas	38
B	Código Fonte	39

Lista de Figuras

1.1	Elementos de uma antena esférica	2
1.2	Antena esférica com fita anelar (Tsitsas, 2011)	3
1.3	Antena esférica com fita circular (Ferreira, 2011)	3
2.1	Coordenadas esféricas adotadas.	8
2.2	Antena de micro fita esférica.	8
2.3	Exemplo de alimentação formado por uma rede com $N_f = 4$ alimentadores	16
2.4	Detalhes da localização de um alimentador.	16
2.5	Superfícies das correntes magnéticas	20
3.1	Impedância de entrada x Frequência	32
3.2	Diagrama de Irradiação do campo $E \times \theta$, quando $\phi = \pi$ e $\phi = 0$	33
3.3	Diagrama de irradiação do campo $E \times \theta$, quando $\phi = -\frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$	33
3.4	Diagrama de irradiação do campo $E \times \phi$	34

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros de entrada do simulador	29
3.2	Frequências de ressonância	30
3.3	Tangentes de perdas	31
A.1	Constantes	37
A.2	Funções e Equações Utilizadas	38

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação

Antenas de micro fita são amplamente utilizadas nos dispositivos modernos por sua versatilidade. Elas possuem tamanho reduzido, baixo custo, fácil instalação, boa performance, trabalham em altas frequências, e etc. Esses fatores as tornam uma boa opção para serem utilizadas em conjunto com circuitos impressos (Balanis, 2012). Por isso, existe um largo estudo sobre antenas de micro fita.

Em situações onde as antenas devem ser instaladas sobre superfícies curvas, é possível utilizar antenas de micro fita esféricas, AMFE, adaptadas a superfície em questão. Alguns exemplos de aplicação desse tipo de antenas são: mísseis, satélites e aeronaves, onde superfícies planas no exterior são pouco encontradas devido a questões aerodinâmicas.

Além disso, AMFEs, também são mais eficientes no escaneamento de frequências, problema frequente em antenas planares, devido a sua conformidade (Tsitsas, 2011). Apesar dessas qualidades, o estudo sobre antenas de micro fita ainda está muito concentrado em antenas planares devido a gama maior de aplicações práticas. Portanto, esse trabalho propõe uma análise sobre esse tipo de antenas, ainda pouco discutidas na literatura.

1.2 Antenas de micro fitas esféricas

As antenas de micro fitas se assemelham bastante a capacitores, pois, assim como os capacitores, são formadas por duas superfícies metálicas com um dielétrico entre elas. De fato, esse tipo de antena pode ser visto como capacitores que, ao invés de armazenar a energia eficientemente, apresentam perdas energéticas em forma de radiação.

Os elementos básicos de uma antena de micro fita são: o radiador, que para este tipo de antena são formados por fitas metálicas; o plano condutor, também chamado de plano de aterramento; e o dielétrico entre ambos. Em AMFEs, o plano condutor tem a forma de uma esfera metálica, enquanto que o radiador é uma micro fita metálica que envolve o dielétrico. A localização desses elementos é exemplificada na figura 1.1.

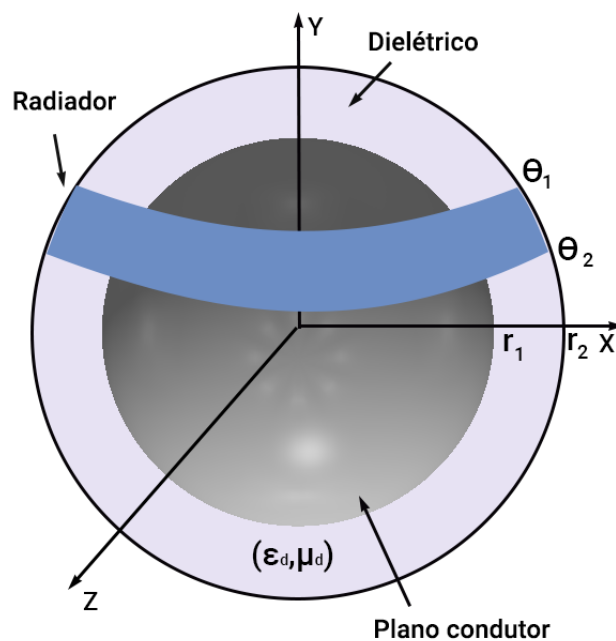


Figura 1.1 Elementos de uma antena esférica

Dentre os tipos de antenas de micro fita esféricas, dois estão entre os mais utilizados: o anelar e o circular, exibidos nas figuras 1.2 e 1.3, respectivamente. Nesse trabalho, analisaremos as antenas do tipo anelar.

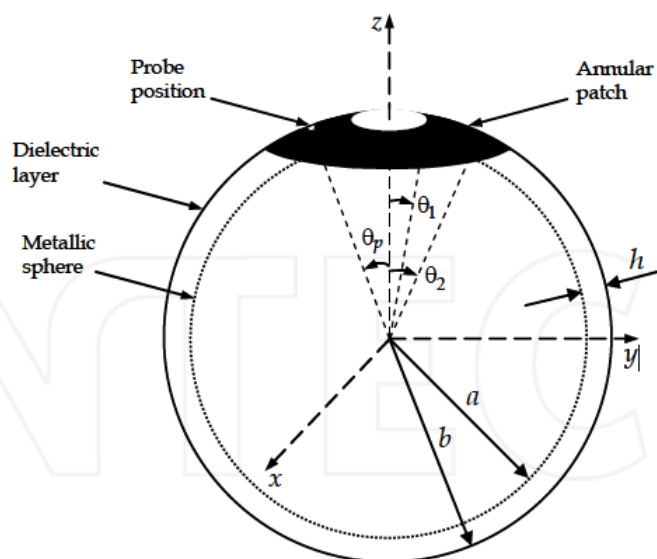


Figura 1.2 Antena esférica com fita anelar (Tsitsas, 2011)

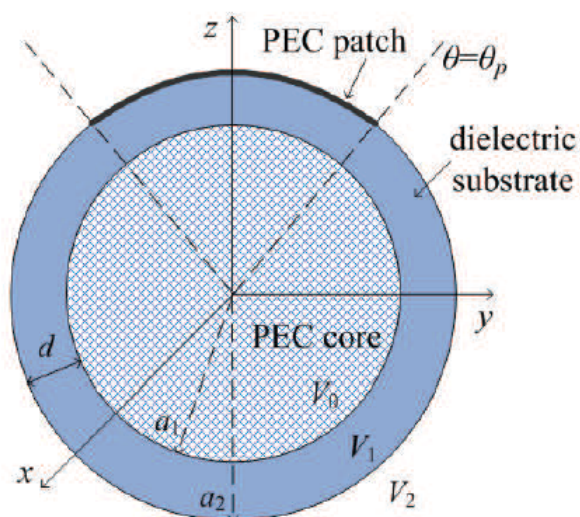


Figura 1.3 Antena esférica com fita circular (Ferreira, 2011)

1.3 Modelo da cavidade

Devido a quantidade de fatores que devem ser levados em consideração, determinar a forma como o campo é irradiado por uma antena de micro fitas é algo complexo. Por isso, na literatura científica, existem vários métodos ou modelos, para a análise de antenas de micro fitas. Em (Balanis, 2012) são mencionados três métodos mais usados, descritos abaixo:

- **O modelo da linha de transmissão:** é o mais simples entre eles. Basicamente, o modelo da linha de transmissão representa a antena como duas aberturas separadas por uma linha de transmissão de baixa impedância. Apesar da simplicidade, esse modelo possui menor precisão quando comparado com os resultados reais.
- **O modelo da cavidade:** Este é o modelo utilizado neste trabalho. O modelo da cavidade é matematicamente mais complexo que o modelo da linha de transmissão. Entretanto, também apresenta melhores resultados e consegue manter uma percepção física dos fenômenos que ocorrem na antena.
- **O método dos momentos:** Dentre os três modelos citados, esse geralmente apresenta melhores resultados. Entretanto, possui uma complexidade matemática muito maior que os outros. Devido a essa complexidade matemática, esse modelo reduz a percepção física do que ocorre no interior da antena.

O modelo da cavidade consiste em assumir que a cavidade da antena é envolta por condutores magnéticos e elétricos. Assim, as regiões interior e exterior da antena estão isoladas. No processo de envio de um sinal, o sinal é introduzido nos alimentadores e surge um campo eletromagnético no interior da cavidade. Esse campo pode ser obtido através das leis de Maxwell que levam a uma equação de onda. Às soluções dessa equação, são aplicadas as condições de contorno e obtemos os modos presentes no interior da cavidade.

Para o exterior da antena, um processo análogo é realizado para obter as soluções da equação de onda nessa região. Entretanto, para descobrir as condições de contorno do campo no exterior, é necessário considerar a existência de correntes magnéticas nas paredes condutoras magnéticas. Essas correntes, surgem devido ao campo interior e geram o campo no exterior.

Em realidade, não há comprovação ou observação na natureza da existência de correntes magnéticas na natureza. Para que elas existam é necessário também a comprovação da existência de monopolos magnéticos. Entretanto, a existência desses monopolos é uma questão em aberto na física.

Apesar disso, podemos considerar que, se essas correntes existem, o comportamento descrito no método das cavidades de fato ocorre. Caso não, o modelo das cavidades continuará válido, pois, as correntes magnéticas se tornarão apenas um artifício matemático, baseado no princípio da dualidade, para obtenção do campo exterior.

Assim, para conhecer o campo irradiado no exterior da esfera, deve-se seguir os passos:

1. Encontrar os modos presentes na cavidade, dados pelas soluções da equação de onda.
2. Encontrar o campo interno resultante, dado pela sobreposição dos modos internos.

3. Encontrar a corrente magnética produzida pelo campo interno.
4. Encontrar os modos no exterior da antena, dados pelas soluções da equação de onda.
5. Encontrar o campo externo, dado pela sobreposição dos modos externos.
6. Utilizar a corrente magnética para determinar os coeficientes do campo externo.

Apesar do método das cavidades resultar em uma boa aproximação dos campos externos irradiados, ele possui algumas divergências do campo real nas regiões de borda da micro fita. Uma maneira de solucionar esses erros é utilizar uma correção das bordas. A correção de bordas será explicada ao final do capítulo 2.

1.4 Estruturação do trabalho

No capítulo 2 será feita uma análise das antenas anelares utilizando o modelo da cavidade para descrever características como: modos na região interna e externa, campo total externo, potência do campo irradiado, correntes magnéticas hipotéticas nas paredes não metálicas da cavidade, tangente de perdas, fator de qualidade e impedância de entrada. Ao final do capítulo 2, é explicada a utilização de correção de bordas no método das cavidades.

No capítulo 3 são apresentados resultados de um software de simulação. Este software foi desenvolvido em MATLAB, para simular a antena e implementa toda a modelagem que é descrita no capítulo 2. Ele também leva em consideração efeitos de franjamento do campo elétrico nas bordas da cavidade, para tornar a simulação mais precisa.

No apêndice, há descrições de variáveis, constantes e equações que foram utilizadas nos cálculos do capítulo 2.

Ao final, está anexado o código em MATLAB utilizado para simular a antena.

CAPÍTULO 2

Antena anelar de micro fita envoltória

Neste capítulo o modelo da cavidade será aplicado em uma antena esférica de modo a obter os campos no interior e no exterior da cavidade. Além dos campos, encontraremos também a impedância de entrada, a potência irradiada pelos modos e, ao final, realizaremos a correção de bordas para aumentar a precisão do método das cavidades.

2.1 Descrição da antena

A antena estudada nesse trabalho é composta por um radiador, formado por uma fita condutora metálica e uma esfera condutora, também metálica, que funciona como o plano condutor. O radiador envolve a esfera, como mostrado na figura 1.1, formando uma cavidade entre eles. Essa cavidade é preenchida por um dielétrico de permissividade elétrica ϵ_d e permeabilidade magnética μ_d .

Quando um sinal é introduzido nos alimentadores da antena, surge na cavidade um campo eletromagnético devido à diferença de potencial entre a micro fita e a esfera. E, em razão das perdas energéticas ocorridas no dielétrico, parte desse campo eletromagnético escapa da cavidade, i.e., é irradiado para o meio externo. O campo irradiado contém o sinal introduzido na entrada da antena, dessa maneira, o sinal é transmitido para no ambiente.

Para a análise da antena podemos utilizar um sistema de coordenadas esféricas, pois, ele permite expressar as dimensões e posições de maneira mais convenientes. Vide figura 2.1

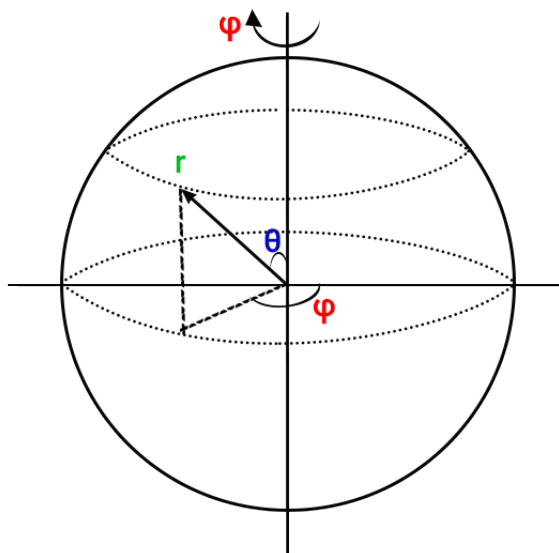


Figura 2.1 Coordenadas esféricas adotadas.

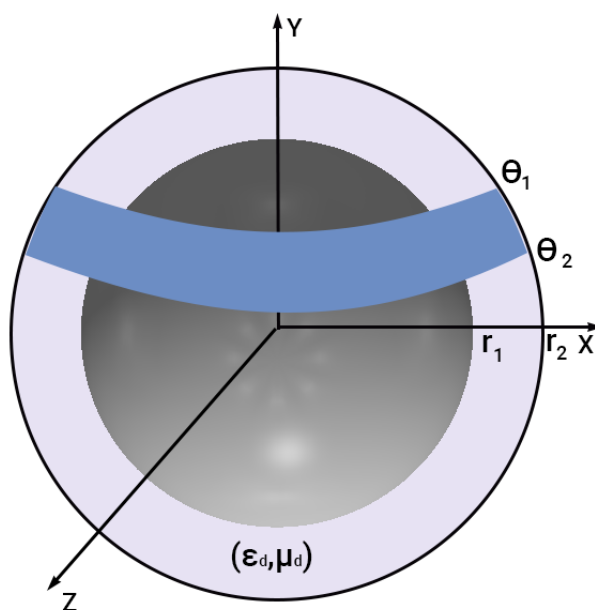


Figura 2.2 Antena de micro fita esférica.

Portanto, conforme mostrado na figura 2.2, a localização espacial da cavidade é parametrizada como $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $r_1 \leq r \leq r_2$.

Enquanto que as características do dielétrico são dadas por: $\epsilon_d = \epsilon_r \epsilon_o (1 - j \tan \delta)$, $\mu_d = \mu_o$, $h = r_2 - r_1$.

Uma característica comum às antenas micro fita é que elas devem possuir uma espessura do dielétrico muito menor que o comprimento da onda eletromagnética no espaço livre, isto é, $h \ll \lambda_0$. Por essa razão, iremos considerar que as variações radiais no interior da cavidade podem ser consideradas desprezíveis, i.e., $\frac{\partial}{\partial r} = 0$.

2.2 Análise Modal na Cavidade

Ondas eletromagnéticas podem ser descritas como uma superposição de suas componentes TE e TM (Harrington, 2001, pags. 130,131). Em razão disso, escolheremos as componentes TE_r e TM_r , i.e., as componentes TE e TM na direção radial, para expressar nosso campo. Portanto, os potenciais vetores serão dados por $\vec{A} = \hat{r}A_r$ e $\vec{F} = \hat{r}F_r$.

Utilizando o princípio da dualidade e a superposição entre os campos elétricos e magnéticos formados devido a $\vec{A}$ e $\vec{F}$, obtemos as equações dos campos em função dos vetores potenciais conforme mostrado nas equações (2.1a) e (2.1b). Para maiores detalhes sobre o princípio da dualidade vide (Harrington, 2001, pags. 98,99).

$$\vec{E} = -\nabla \times \vec{F} + \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (2.1a)$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu_d} \nabla \times \nabla \times \vec{F} \quad (2.1b)$$

Ondas eletromagnéticas podem ser descritas como uma superposição de suas componentes TE e TM (Harrington, 2001, pags. 130,131). Em razão disso, escolheremos as componentes TE_r e TM_r , i.e., as componentes TE e TM na direção radial, para expressar nosso campo. Portanto, os potenciais vetores serão dados por $\vec{A} = \hat{r}A_r$ e $\vec{F} = \hat{r}F_r$. Fazendo essa substituição nas equações (2.1a) e (2.1b), expandindo os rotacionais e tomando as formas dos campos em coordenadas esféricas $\vec{E} = (E_r, E_\theta, E_\phi)$ e $\vec{H} = (H_r, H_\theta, H_\phi)$, teremos os campos em função de A_r e F_r como mostrado nas equações (2.2a - 2.2f),

$$E_r = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_d^2 \right) A_r \quad (2.2a)$$

$$E_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\epsilon_d r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \quad (2.2b)$$

$$E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\epsilon_d r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi} \quad (2.2c)$$

$$H_r = \frac{1}{j\omega\mu_d} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_d^2 \right) F_r \quad (2.2d)$$

$$H_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\mu_d r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \quad (2.2e)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\mu_d r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi} \quad (2.2f)$$

2.2.1 Modos TE_r sem variação radial ($\frac{\partial}{\partial r} F_r = 0$)

TE_r , do inglês *transverse electric to r*, é a componente do campo eletromagnético onde o campo elétrico na direção radial é nulo ($E_r = 0$). Substituindo esse valor em (2.2a), concluímos que $A_r = 0$ também deve ser zero. Além disso, considerando que qualquer variação radial pode ser considerada desprezível, conforme mencionado anteriormente, também temos que: $\frac{\partial}{\partial r} = 0$. Portanto, as equações (2.2a - 2.2f) se tornam:

$$E_r = 0 \quad (2.3a)$$

$$E_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \quad (2.3b)$$

$$E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \quad (2.3c)$$

$$H_r = \frac{1}{j\omega\mu_d} k_d^2 F_r \quad (2.3d)$$

$$H_\theta = 0 \quad (2.3e)$$

$$H_\phi = 0 \quad (2.3f)$$

Aplicando as condições de contorno em $r = a$ e $r = b$, obtemos que $E_\theta = E_\phi = 0$, pois, há a presença de dois condutores nessas regiões, a fita metálica e a esfera metálica. Substituindo esses valores nas equações (2.3b) e (2.3c), obtemos que $F_r = 0$ nas regiões $r = a$ e $r = b$, e como a variação em r é considerada desprezível na região ($\frac{\partial F_r}{\partial r} = 0$), concluímos que, $F_r = 0$ em toda a cavidade. Portanto, não existem modos TE_r sem variação radial.

2.2.2 Modos TM_r sem variação radial ($\frac{\partial}{\partial r}A_r = 0$)

TM_r , ou *transverse magnetic to r*, é a componente do campo eletromagnético onde o campo magnético na direção radial é nulo ($H_r = 0$). Desta vez, analisando a equação (2.2d), concluímos que, para modos TM_r , $F_r = 0$, e novamente considerando que as variações radiais são nulas, chegamos as equações (2.4a-2.4f).

$$E_r = \frac{k_d^2}{j\omega\epsilon_d}A_r \quad (2.4a)$$

$$E_\theta = 0 \quad (2.4b)$$

$$E_\phi = 0 \quad (2.4c)$$

$$H_r = 0 \quad (2.4d)$$

$$H_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \quad (2.4e)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}. \quad (2.4f)$$

Como E_θ e E_ϕ são nulos, as condições de contorno em $r = a$ e $r = b$, previamente citadas, são automaticamente satisfeitas.

2.2.3 Equação diferencial para E_r com $\frac{\partial}{\partial r} = 0$

Na seção anterior concluímos que o campo $\vec{E}$ apresenta apenas componentes radiais, e o campo $\vec{H}$ componentes na direção θ e ϕ , ou seja:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_r \hat{r} \\ \vec{H} &= H_\theta \hat{\theta} + H_\phi \hat{\phi} \end{aligned}$$

Partindo das Leis de Faraday e Ampère, descritas em (2.6) e (2.7) na forma diferencial e no domínio da frequência.

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_c\vec{E} + \vec{J}_f \quad (2.7)$$

Podemos aplicar o operador rotacional em ambos os lados da equação (2.6). E, substituir $\nabla \times \vec{H}$ no lado direito do resultado pela equação (2.7), obtendo:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = k_d^2 \vec{E} - j\omega\mu_d \vec{J}_f \quad (2.8)$$

Expandido o rotacional em coordenadas esféricas, e desenvolvendo a equação (2.8) chegamos na forma expandida da equação de onda:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \phi^2} + k_d^2 E_r = j\omega \mu_d J_{fr}. \quad (2.9)$$

Comparando com a equação (2.9) com a expressão do Laplaciano em coordenadas esféricas, deduzimos que a equação (2.9) é equivalente a:

$$\nabla^2 E_r + k_d^2 E_r = j\omega \mu_d J_{fr} \quad (2.10)$$

2.2.4 Modos TM_r na cavidade

Por um instante, consideraremos que não existem fontes no interior da cavidade, dessa forma, podemos descobrir os modos que podem existir em seu interior. Posteriormente, descobriremos como esses mesmos modos são excitados pelas fontes existentes.

De (2.9), para o caso sem fontes e usando $\bar{r} = \frac{r_1+r_2}{2}$

$$\frac{1}{\bar{r}^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \phi^2} + k_d^2 E_r = 0 \quad (2.11)$$

Através do método da separação das variáveis, iremos procurar soluções de $E_r(\theta, \phi)$ do tipo $E_r(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$, pois, caso elas existam, será mais simples resolver a equação diferencial obtida.

Substituindo a solução proposta na equação (2.11) e multiplicando ambos os lados da equação por $r^2 \sin^2 \theta$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + k^2 \bar{r}^2 \sin^2 \theta = 0. \quad (2.12)$$

Para que a igualdade acima seja satisfeita, o termo $\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}$ deverá ser constante, pois, caso contrário, sempre seria possível variar ϕ enquanto ou outros termos são mantidos constantes, e isso tornaria a igualdade inválida. Assumimos, sem perda de generalidade, que a forma dessa constante é $-m^2$ [onde m é constante]. Portanto

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2 \quad (2.13)$$

Fazendo a substituição na equação (2.12) e dividindo tudo por $\sin^2 \theta$

$$\frac{1}{\sin \theta \Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + k^2 \bar{r}^2 = 0 \quad (2.14)$$

Novamente, os termos em θ devem ser constantes para que a igualdade seja válida, dessa vez, escolheremos a constante como $-n(n-1)$, onde n é constante:

$$\frac{1}{\sin \theta \Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -n(n+1) \quad (2.15)$$

Fazendo a substituição

$$n(n+1) = k^2 \bar{r}^2 \quad (2.16)$$

Podemos resumir os resultados previamente obtidos em duas equações:

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + \Phi(\phi)m^2 = 0 \quad (2.17a)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta(\theta) = 0 \quad (2.17b)$$

$$(2.17c)$$

A solução da primeira equação (2.24a) é a combinação de funções harmônicas tradicionais $[e^{jmx}, e^{-jmx}]$. Além disso, para satisfazer as condições de contorno e continuidade em ϕ , m deve ser um número inteiro.

Para a segunda equação (2.24b), as soluções são chamadas de funções associadas de Legendre, e denotadas por $L_v^m(\cos(\theta))$, para mais detalhes sobre essas funções, ver (Harrington, 2001, Apêndice E). A equação 2.18, mostra campo elétrico para o modo mv

$$E_{rvm}(\theta, \phi) = L_v^m(\cos(\theta))e^{\pm jmx}. \quad (2.18)$$

Como pretendemos avaliar o campo no interior da cavidade, supomos a existência de paredes magnéticas perfeitas em $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$. Por isso, nessas regiões temos que são condições de contorno $H_r = H_\phi = 0$

Da equação (2.6) segue que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ H_\phi &= -\frac{1}{j\omega\mu}(\nabla \times \vec{E})_\phi \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{j\omega\mu r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta} L_v^{|m|}(\cos\theta) = 0, \text{ quando } \theta = \theta_1, \theta_2$$

Como $\frac{d}{d\theta} L_v^{|m|}(\cos\theta_1) = 0$, uma possível solução de $L_v^{|m|}(\cos\theta)$ é:

$$L_v^{|m|}(\cos\theta) = P_v^{|m|}(\cos\theta) \frac{d}{d\theta} Q_v^{|m|}(\cos\theta_1) - Q_v^{|m|}(\cos\theta) \frac{d}{d\theta} P_v^{|m|}(\cos\theta_1) \quad (2.19)$$

Contudo, ainda nos resta saber os possíveis valores de v para cada m . Portanto, usaremos a segunda condição de contorno em θ ($\frac{d}{d\theta} L_v^{|m|}(\cos\theta_2) = 0$) na expressão (2.20), o que nos leva a equação transcendental:

$$\frac{d}{d\theta} P_v^{|m|}(\cos\theta_2) \frac{d}{d\theta} Q_v^{|m|}(\cos\theta_1) - \frac{d}{d\theta} Q_v^{|m|}(\cos\theta_2) \frac{d}{d\theta} P_v^{|m|}(\cos\theta_1) = 0 \quad (2.20)$$

Essa equação deve ser resolvida, através de métodos numéricos, para cada valor de m . Dessa maneira, descobriremos os valores de v que satisfazem a equação para o m .

2.2.5 Frequência de ressonância do modo v, m

A partir da equação (2.16), descobrimos quais são as frequências que excitam os modos:

$$k = \frac{\sqrt{v(v+1)}}{\bar{r}} \quad (2.21)$$

$$2\pi f_{vm} \sqrt{\mu \epsilon_o \epsilon_r} = \sqrt{v(v+1)} \quad (2.22)$$

$$f_{vm} = \frac{\sqrt{v(v+1)}}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon_o \epsilon_r}} \quad (2.23)$$

2.2.6 Campos Modais $TM'_{v,m}$

A partir da equação 2.18, encontramos também, as duas componentes do campo magnético descritas em (2.24a - 2.24c).

$$E_{r_{vm}} = L_v^{|m|}(\cos\theta)e^{jm\phi} \quad (2.24a)$$

$$H_{\theta_{vm}} = \frac{-1}{j\omega\mu\bar{r}\sin\theta} \frac{\partial E_{r_{vm}}}{\partial\phi} = \frac{-m}{\omega\mu\bar{r}\sin\theta} L_v^{|m|}(\cos\theta)e^{jm\phi} \quad (2.24b)$$

$$H_{\phi_{vm}} = \frac{1}{j\omega\mu\bar{r}} \frac{\partial E_{r_{vm}}}{\partial\theta} = \frac{1}{j\omega\mu\bar{r}} \frac{d}{d\theta} L_v^{|m|}(\cos\theta)e^{jm\phi} \quad (2.24c)$$

2.3 Alimentação da antena

Para modelar a alimentação da antena, utilizaremos uma rede de N_f alimentadores em formato de fitas condutoras conforme mostrada nas imagens [2.3 e 2.4]. Onde cada fita se estende entre: $\theta = \theta_f$; $\phi_{1f}(i) < \phi < \phi_{1f}(i)$; $r_1 \leq r \leq r_2$.

O ângulo central $\phi_f(i)$ é dado por $\phi_f(i) = \frac{\phi_{1f}(i) + \phi_{2f}(i)}{2}$. Enquanto que a variação de ϕ em cada fita é dada por $\Delta\phi_f(i) = \phi_{2f}(i) - \phi_{1f}(i)$

ou:

$$\phi_{1f}(i) = \phi_f(i) - \frac{\Delta\phi_f(i)}{2} \quad (2.25a)$$

$$\phi_{2f}(i) = \phi_f(i) + \frac{\Delta\phi_f(i)}{2} \quad (2.25b)$$

Logo, a largura média da fita é expressa por $W_f(i)$, onde

$$W_f(i) = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \sin\theta_f \Delta\phi_f(i). \quad (2.26)$$

A densidade volumétrica de corrente na fita i é dada por

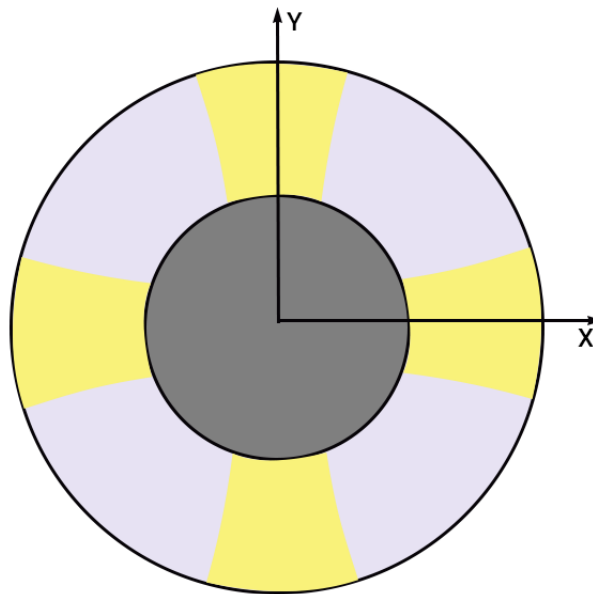


Figura 2.3 Exemplo de alimentação formado por uma rede com $N_f = 4$ alimentadores

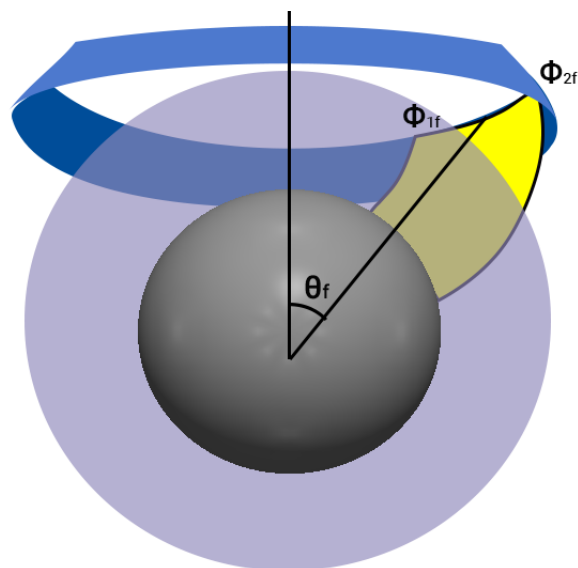


Figura 2.4 Detalhes da localização de um alimentador.

$$\vec{J}_f(i) = \frac{I_o \delta(\theta - \theta_f)}{r^2 \sin \theta \Delta \phi_f(i)} \hat{r}. \quad (2.27)$$

A corrente total na fita i é

$$I(i) = \int_0^\pi \int_{\phi_{1f}(i)}^{\phi_{2f}(i)} \left(\frac{I_o \delta(\theta - \theta_f)}{r^2 \sin \theta \Delta \phi_f(i)} \right) r^2 \sin \theta d\phi d\theta = I_o. \quad (2.28)$$

E a densidade volumétrica total:

$$\vec{J}_f = \sum_{i=1}^{N_f} \vec{J}_{fi}(\vec{r}). \quad (2.29)$$

2.4 Campos no Interior da cavidade

Agora que já possuímos os campos modais e a alimentação da antena, podemos descobrir como os modos são excitados pelos alimentadores e qual o campo elétrico resultante quando sobrepomos todos esses modos. Então, a partir da equação (2.10) o campo excitado vale:

$$\nabla^2 E_r + k_d^2 E_r = j\omega\mu_d J_{fr}$$

Expandindo em autofunções $E_{r_{vm}}$, soluções de

$$\nabla^2 E_{r_{vm}} + k_d^2 E_{r_{vm}} = 0$$

$$E_r = \sum_v \sum_m A_{vm} E_{vm} \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.10)

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_d^2) \sum_v \sum_m A_{vm} E_{r_{vm}} &= j\omega\mu_d J_{fr} \\ \sum_v \sum_m A_{vm} (k_d^2 - k_{vm}^2) E_{r_{vm}} &= j\omega\mu_d J_{fr} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tomando o produto interno abaixo, e usando a ortogonalidade dos modos:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(\theta, \phi) g^*(\theta, \phi) \hat{r}^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad (2.32)$$

$$A_{vm} (k_d^2 - k_{vm}^2) \langle E_{r_{vm}}, E_{r_{vm}} \rangle = j\omega\mu_d \langle J_{fr}, E_{r_{vm}} \rangle \quad (2.33)$$

$\langle E_{r_{vm}}, E_{r_{vm}} \rangle = ||E_{r_{vm}}||^2$, logo:

$$A_{vm} = \frac{j\omega\mu}{k_d^2 - k_{vm}^2} \frac{\langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle}{\|E_{r_{vm}}\|^2}$$

$$E_r = \sum_v \sum_m \frac{j\omega\mu}{k_d^2 - k_{vm}^2} \frac{\langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle}{\|E_{r_{vm}}\|^2} E_{r_{vm}}(\theta, \phi) \quad (2.34)$$

O produto interno entre a densidade de corrente para todas as fitas e o modo $E_{r_{vm}}$, i.e. $\langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle$, é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle &= \sum_{i=1}^{N_f} \langle J_{fi}, E_{r_{vm}} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N_f} \int_0^\pi \int_{\phi_{1f}(i)}^{\phi_{2f}(i)} J_f(\theta, \Delta\phi_f) E_{r_{vm}}^*(\theta, \phi) \hat{r}^2 \sin\theta d\phi d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{N_f} \int_0^\pi \int_{\phi_{1f}(i)}^{\phi_{2f}(i)} \left[\frac{I_o \delta(\theta - \theta_f)}{r^2 \sin\theta \Delta\phi_f} \right] [L_v^{(m)}(\cos(\theta)) e^{jm\phi}]^* \hat{r}^2 \sin\theta d\phi d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{N_f} \frac{I_o}{\Delta\phi_f} L_v^{(m)}(\cos(\theta_f)) \int_{\phi_f(i) - \frac{\Delta\phi_f}{2}}^{\phi_f(i) + \frac{\Delta\phi_f}{2}} e^{-jm\phi} d\phi \end{aligned}$$

Se $m = 0$:

$$\int_{\phi_f(i) - \frac{\Delta\phi_f}{2}}^{\phi_f(i) + \frac{\Delta\phi_f}{2}} e^{-jm\phi} d\phi = \Delta\phi_f$$

Se $m \neq 0$:

$$\int_{\phi_f(i) - \frac{\Delta\phi_f}{2}}^{\phi_f(i) + \frac{\Delta\phi_f}{2}} e^{-jm\phi} d\phi = e^{-jm\phi_f(i)} \Delta\phi_f \text{sinc}\left(\frac{m\Delta\phi_f}{2\pi}\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle &= \sum_{i=1}^{N_f} \frac{I_o}{\Delta\phi_f} L_v^{(m)}(\cos(\theta_f)) e^{-jm\phi_f(i)} \Delta\phi_f \text{sinc}\left(\frac{m\Delta\phi_f}{2\pi}\right) \\ \langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle &= I_o L_v^{(m)}(\cos(\theta_f)) \text{sinc}\left(\frac{m\Delta\phi_f}{2\pi}\right) \sum_{i=1}^{N_f} e^{-jm\phi_f(i)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

O cálculo da magnitude ao quadrado dos campos elétricos modais, $\|E_{r_{vm}}\|^2$, pode ser obtido assim:

$$\begin{aligned}
||E_{r_{vm}}||^2 &= \langle E_{r_{vm}}, E_{r_{vm}} \rangle \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\pi}^{\pi} [L_v^{[m]}(\cos(\theta))e^{jm\phi}] [L_v^{[m]}(\cos(\theta))e^{jm\phi}]^* \vec{r}^2 \sin \theta d\phi d\theta \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\pi}^{\pi} [L_v^{[m]}(\cos(\theta))e^{jm\phi}] [L_v^{[m]}(\cos(\theta))e^{jm\phi}]^* \vec{r}^2 \sin \theta d\phi d\theta \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\pi}^{\pi} [L_v^{[m]}(\cos(\theta))]^2 \vec{r}^2 \sin \theta d\phi d\theta \\
&= 2\pi \vec{r}^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [L_v^{[m]}(\cos(\theta))]^2 \sin \theta d\theta \\
&= 2\pi \vec{r}^2 ||L_v^{[m]}(\cos(\theta))||^2
\end{aligned}$$

Logo:

$$||E_{r_{vm}}||^2 = 2\pi \vec{r}^2 ||L_v^{[m]}(\cos(\theta))||^2 \quad (2.36)$$

Onde:

$$||L_v^{[m]}(\cos(\theta))||^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [L_v^{[m]}(\cos(\theta))]^2 \sin \theta d\theta \quad (2.37)$$

2.5 Correntes Magnéticas Equivalentes

Pelo princípio da equivalência, as correntes magnéticas equivalentes são as correntes que geram o mesmo campo no lado externo da cavidade (Harrington, 2001). Portanto, descobrindo essas correntes produzidas pelo campo interno, poderemos, mais a frente, utilizá-las nas condições de contorno do campo externo.

(I) Análise da corrente na face $\theta = \theta_1$, ver figura 2.5

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= -\hat{a}_\theta \vec{M}_{s1} = -\hat{n} \times \vec{E}(\theta_1, \phi) \\
&= +\hat{a}_\theta \times E_r(\theta_1, \phi) \hat{a}_r \\
\vec{M}_{s1} &= -\hat{a}_\phi E_r(\theta_1, \phi)
\end{aligned} \quad (2.38)$$

Corrente total na face (I):

$$\vec{M}_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{M}_{s1}(\phi) dr = -h E_r(\theta_1, \phi) \hat{a}_\phi \quad (2.39)$$

concentrando a corrente sobre a superfície $r = r_2$, a corrente superficial vale:

$$\vec{M}_{s1} = \vec{M}_1 \frac{\delta(\theta - \theta_1)}{r_2} = -h E_r(\theta_1, \phi) \frac{\delta(\theta - \theta_1)}{r_2} \hat{a}_\phi \quad (2.40)$$

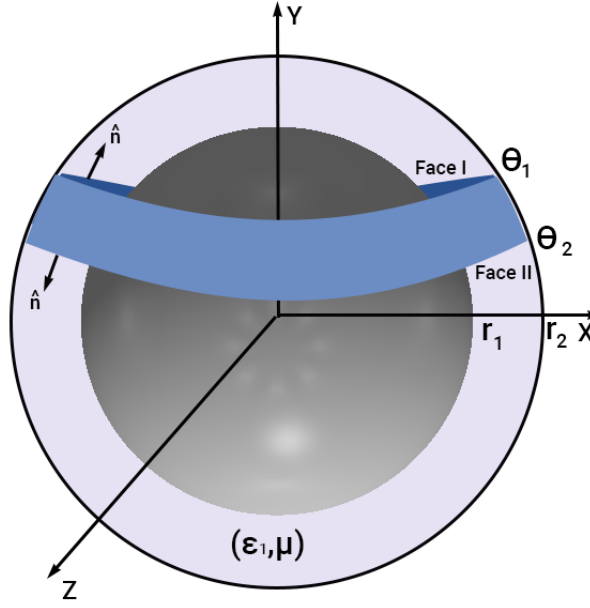


Figura 2.5 Superfícies das correntes magnéticas

(II) Análise da corrente na face $\theta = \theta_2$

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \hat{a}_\theta \vec{M}_{s2} = -\hat{n} \times \vec{E}(\theta_2, \phi) \\ &= -\hat{a}_\theta \times E_r(\theta_2, \phi) \hat{a}_r \\ \vec{M}_{s2} &= \hat{a}_\phi E_r(\theta_2, \phi)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Corrente total na face (II):

$$\vec{M}_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{M}_{s2}(\phi) dr = -h E_r(\theta_2, \phi) \hat{a}_\phi\tag{2.42}$$

concentrando a corrente sobre a superfície $r = r_2$, a corrente superficial vale:

$$\vec{M}_{s2} = \vec{M}_2 \frac{\delta(\theta - \theta_2)}{r_2} = h E_r(\theta_2, \phi) \frac{\delta(\theta - \theta_2)}{r_2} \hat{a}_\phi\tag{2.43}$$

2.6 Modos Externos à esfera condutora

No exterior da esfera temos modos TM_r e TE_r . Por isso, repetiremos os passos dados na seção 2.2.2, mas, sem a restrição $\frac{\partial}{\partial r} = 0$, uma vez que, o campo externo encontrasse no espaço livre.

2.6.1 Modos TM_r

O potencial vetor para modos TM_r é dado por:

$$A_{rnm}(r, \theta, \phi) = H_n^{(2)}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.44)$$

$H_n^{(2)}$, satisfaz à condição de contorno de radiação

$\bar{P}_n^{|m|}$, satisfaz à condição de contorno de campo finito em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$

$e^{+jm\phi}$, satisfaz à condição de contorno periódica em ϕ

Novamente analisando as equações (2.2), mas, desta vez, levando em consideração a variação radial ($\frac{\partial}{\partial r}$) que representa o distanciamento da antena, obtemos:

$$E_{r_{mn}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_d^2 \right) A_{rnm} = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_d^2 \right) H_n^{(2)}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.45a)$$

$$E_{\theta_{mn}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_o r} \frac{\partial^2 A_{rnm}}{\partial r \partial \theta} = \frac{k_o}{j\omega\epsilon_o r} H_n^{(2)'}(k_o r) \frac{\partial \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta)}{\partial \theta} e^{+jm\phi} \quad (2.45b)$$

$$E_{\phi_{mn}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_o r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_{rnm}}{\partial r \partial \phi} = \frac{k_o j m}{j\omega\epsilon_o r \sin \theta} H_n^{(2)'}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.45c)$$

$$H_{r_{mn}} = 0 \quad (2.45d)$$

$$H_{\theta_{mn}} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{rnm}}{\partial \phi} = \frac{j m}{r \sin \theta} H_n^{(2)}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.45e)$$

$$H_{\phi_{mn}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_{rnm}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} H_n^{(2)}(k_o r) \frac{\partial \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta)}{\partial \theta} e^{+jm\phi} \quad (2.45f)$$

2.6.2 Potência dos modos TM_r

Agora que sabemos a expressão para os modos TM_{nm}^r , podemos calcular a potência irradiada por eles através do vetor de Poyting:

$$\begin{aligned} P_{TM_{nm}} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \hat{a}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi\eta_0}{2} \frac{2n(n+1)}{2n+1} |H_n^{(2)'}(k_o r)|^2 \\ &= \frac{\eta_0}{2} s(n) |H_n^{(2)'}(k_o r)|^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Quando o sinal é medido a uma distância muito grande da antena ($r \rightarrow \infty$), a expressão para o valor da potência se torna:

$$P_{TM_{nm}} = \frac{\eta_0}{2} s(n) \quad (2.47)$$

2.6.3 Modos TE_r

Para encontrar os modos TE_r utilizamos os mesmos procedimentos usados para encontrar os modos TM_r . O potencial vetor elétrico na direção r que satisfaz as condições de contorno é

dado por:

$$F_{rnm}(r, \theta, \phi) = H_n^{(2)}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.48)$$

$H_n^{(2)}$, satisfaz à condição de contorno de radiação

$\bar{P}_n^{|m|}$, satisfaz à condição de contorno de campo finito em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$

$e^{+jm\phi}$, satisfaz à condição de contorno periódica em ϕ

Através das equações (2.2), levando em consideração a variação radial ($\frac{\partial}{\partial r}$):

$$E_{r_{mn}} = 0 \quad (2.49a)$$

$$E_{\theta_{mn}} = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_{r_{mn}}}{\partial \phi} = \frac{-jm}{r \sin \theta} H_n^{(2)}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.49b)$$

$$E_{\phi_{mn}} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_{r_{mn}}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} H_n^{(2)}(k_o r) \frac{\partial \bar{P}_n^{|m|}}{\partial \theta}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.49c)$$

$$H_{r_{mn}} = \frac{1}{j\omega\mu_o} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_o^2 \right) A_{r_{mn}} = \frac{1}{j\omega\mu_o} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_o^2 \right) H_n^{(2)}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.49d)$$

$$H_{\theta_{mn}} = \frac{1}{j\omega\mu_o r} \frac{\partial^2 F_{r_{mn}}}{\partial r \partial \theta} = \frac{k_o}{j\omega\mu_o r} H_n^{(2)'}(k_o r) \frac{\partial \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta)}{\partial \theta} e^{+jm\phi} \quad (2.49e)$$

$$H_{\phi_{mn}} = \frac{1}{j\omega\mu_o r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_{r_{mn}}}{\partial r \partial \phi} = \frac{k_o jm}{j\omega\mu_o r \sin \theta} H_n^{(2)'}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{+jm\phi} \quad (2.49f)$$

2.6.4 Potência dos modos TE_r

Com as expressões para os campos dos modos TE_{nm}^r , podemos calcular a potência irradiada por eles, através do vetor de Poynting:

$$\begin{aligned} P_{TE_{nm}} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \hat{a}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi}{2\eta_0} \frac{2n(n+1)}{2n+1} |H_n^{(2)}(k_o r)|^2 \\ &= \frac{1}{2\eta_0} s(n) |H_n^{(2)}(k_o r)|^2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Quando o sinal é medido a uma distância muito grande da antena ($r \rightarrow \infty$), a expressão para o valor da potência se torna:

$$P_{TE_{nm}} = \frac{s(n)}{2\eta_0} \quad (2.51)$$

2.7 Expansão dos campos externos em modos TM_r e TE_r

O campo externo resultante pode ser considerado como o campo resultante de todos os modos TM_r e TE_r que possam existir. Esses modos são multiplicados por constantes que caracterizam sua relevância no campo resultante. As constantes do modo $TM_{r_{mn}}$ e $TE_{r_{mn}}$ são aqui descritas por d_{mn} e f_{mn} , respectivamente. Assim o campo elétrico externo resultante é dado por:

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^m \left[d_{mn} \frac{k_o}{j\omega\epsilon_o r} H_n^{(2)'}(k_o r) \frac{\partial \bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta)}{\partial \theta} e^{+jm\phi} - f_{mn} \frac{jm}{r \sin \theta} H_n^{(2)}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta) e^{+jm\phi} \right] \quad (2.52)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^m \left[d_{mn} \frac{k_o jm}{j\omega\epsilon_o r \sin \theta} H_n^{(2)'}(k_o r) \bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta) e^{+jm\phi} + f_{mn} \frac{1}{r} H_n^{(2)}(k_o r) \frac{\partial \bar{P}_n^{|m|}}{\partial \theta}(\cos\theta) e^{+jm\phi} \right] \quad (2.53)$$

Para reduzir o esforço matemático que teríamos para considerar a influência da região da micro fita no campo externo, usaremos a transformada vetorial de Legendre descrita em Tsitsas (2011). No domínio da transformada de Legendre, o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}(r, n, m) = \begin{bmatrix} -j\eta_o \sqrt{s(n)} \frac{H_n^{(2)'}(k_o r)}{r} d_{nm} \\ \sqrt{s(n)} \frac{H_n^{(2)}(k_o r)}{r} f_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

2.8 Condições de contorno do campo externo

Para determinar os coeficientes de cada modo, devemos utilizar as condições de contorno impostas pelas correntes magnéticas equivalentes geradas pelo campo interno. Como definido previamente, na seção de correntes magnéticas equivalentes, a corrente magnética está localizada na direção ϕ e concentrada em $(r = r_2)$. Logo, a expressão para a corrente magnética é dada por

$$\begin{aligned} \vec{M}_s &= [M_{s\theta 1}(\theta, \phi) + M_{s\theta 2}(\theta, \phi)] \hat{a}_\phi \\ &= [M_\phi(\theta, \phi)] \hat{a}_\phi \end{aligned} \quad (2.55)$$

E deve satisfazer a condição de contorno

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}(r_2, \theta, \phi) = \hat{a}_r \times [E_\theta(r_2, \theta, \phi) \hat{a}_\theta + E_\phi(r_2, \theta, \phi) \hat{a}_\phi] \quad (2.56)$$

Logo, $\vec{M}_s = M_\theta(\theta, \phi) \hat{a}_\theta + M_\phi(\theta, \phi) \hat{a}_\phi$, onde $M_\phi(\theta, \phi)$ e $M_\theta(\theta, \phi)$ são

$$M_\phi(\theta, \phi) = -E_\theta(r_2, \theta, \phi) \quad (2.57)$$

$$M_\theta(\theta, \phi) = +E_\phi(r_2, \theta, \phi) \quad (2.58)$$

Passando M_ϕ e M_θ para o domínio da transformada de Legendre e utilizando os valores dos campos obtidos como resultado para o campo externo em (2.54)

$$M_u(n, m) = \sqrt{s(n)} \frac{H_n^{(2)}(k_o r)}{r_2} f_{nm} \quad (2.59)$$

$$M_d(n, m) = j\eta_o \sqrt{s(n)} \frac{H_n^{(2)'}(k_o r_2)}{r} d_{nm} \quad (2.60)$$

Isolando os coeficientes

$$f_{nm} = \frac{r_2}{H_n^{(2)}(k_o r_2) \sqrt{s(n)}} M_u(n, m) \quad (2.61)$$

$$d_{nm} = \frac{r_2}{j\eta_o \sqrt{s(n)} H_n^{(2)'}(k_o r_2)} M_d(n, m) \quad (2.62)$$

Para encontrar os valores de $M_u(n, m)$ e $M_d(n, m)$, podemos aplicar a transformada de Legendre na expressão da corrente magnética em função do campo elétrico interno expresso nas equações (2.40) e (2.43), resultando em

$$M_u(n, m) = \frac{1}{\sqrt{s(n)}} \frac{-jmh}{r_2} \int_{-\pi}^{\pi} [-\bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta_1) E_r(\theta_1, \phi) + \bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta_2) E_r(\theta_2, \phi)] e^{-jm\phi} d\phi \quad (2.63)$$

$$M_d(n, m) = \frac{1}{\sqrt{s(n)}} \frac{h}{r_2} \int_{-\pi}^{\pi} [-\frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta_1) E_r(\theta_1, \phi) \sin\theta_1 + \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta_2) E_r(\theta_2, \phi)] e^{-jm\phi} d\phi \quad (2.64)$$

2.9 Impedância de entrada

Conforme descrito em Balanis (2012), "A impedância de entrada é a impedância apresentada pela antena em seus polos, ou a razão entre a voltagem pela corrente entre um par de terminais ou a proporção entre os componentes apropriados do campo elétrico pelos do magnético".

A impedância em cada alimentador de corrente $\vec{J}_{fi}$ é dada por

$$Z_{in} = \frac{-1}{I_0} \int \int_v \vec{E} \cdot \vec{J}_{fi} dv \quad (2.65)$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico total, gerado pelos N_f alimentadores.

Como a impedância é a mesma em cada alimentador

$$N_f \cdot Z_{in} = \frac{-1}{I_0^2} \int \int \int \vec{E} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_f} \vec{J}_{fi} \right) dv \quad (2.66)$$

Portanto, o valor da impedância de entrada em cada alimentador é dado por

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{-1}{N_f I_0^2} \int \int \int \vec{E} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_f} \vec{J}_{fi} \right) dv \\ &= \frac{-1}{N_f I_0^2} \int \int \int \vec{E} \cdot (\vec{J}_f) dv \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$Z_{in} = \frac{-1}{N_f I_0^2} \int \int \int \left[\sum_v \sum_m \frac{j\omega\mu}{k_d^2 - k_{vm}^2} \frac{\langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle}{||E_{r_{vm}}||^2} E_{r_{vm}}(\theta, \phi) \right] \cdot \vec{J}_f(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr \quad (2.68)$$

Resolvendo a integral acima

$$Z_{in} = \frac{-h}{N_f I_0^2} \sum_v \sum_m \frac{j\omega\mu}{k_d^2 - k_{vm}^2} \frac{\langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle^2}{||E_{r_{vm}}||^2} \quad (2.69)$$

As perdas de radiação e condução são incluídas através da tangente de perdas efetivas

$$k_d^2 \rightarrow k_{ef}^2 = \omega\mu_o\epsilon_o\epsilon_r(1 - j\tan\delta_{ef}) \quad (2.70)$$

tangente de δ_{ef} também é expresso como o inverso do fator de qualidade da antena

$$\tan\delta_{ef} = \frac{1}{Q} \quad (2.71)$$

O fator de qualidade de uma antena é uma relação da energia que ela armazena sobre a energia que ela dissipa. A equação 2.72 mostra a expressão para determinar o fator de qualidade, onde: w_e é a energia elétrica armazenada, w_m é a energia magnética armazenada e P_{dis} é a potência dissipada.

$$Q = \omega \frac{w_e + w_m}{P_{dis}} \quad (2.72)$$

Onde: w_e é a energia elétrica armazenada

w_m é a energia magnética armazenada

P_{dis} é a potência dissipada.

A potência dissipada é a soma das potências dissipadas no dielétrico, no condutor e irradiadas

$$P_{dis} = P_d + P_c + P_r \quad (2.73)$$

Das equações (2.71) e (2.72) resulta

$$\tan\delta_{ef} = \frac{P_{dis}}{\omega(w_e + w_m)} = \tan\delta_d + \tan\delta_c + \tan\delta_r \quad (2.74)$$

$$Z_{in} = \frac{-h}{N_f I_0^2} \sum_v \sum_m \frac{j\omega\mu}{k_{ef}^2 - k_{vm}^2} \frac{\langle J_f, E_{r_{vm}} \rangle^2}{||E_{r_{vm}}||^2} \quad (2.75)$$

2.9.1 Cálculo da tangente de perdas dielétricas

A tangente de perdas no dielétrico está ligada as perdas na potência total, recebida pela antena, devido a campos eletromagnéticos variantes no tempo. A polarização das moléculas do dielétrico não são instantâneas e portanto não acompanham a fase do campo eletromagnético, causando aquecimento no dielétrico.

$$P_d = \frac{\sigma + w\epsilon''}{2} \int \int \int |\vec{E}|^2 dv$$

$$w_e = \frac{\epsilon'}{2} \int \int \int |\vec{E}|^2 dv$$

$$\tan \delta_d = \frac{P_d}{2\omega W_e} = \frac{\sigma + w\epsilon''}{\omega\epsilon'}$$

2.9.2 Cálculo da tangente de perdas condutivas

As perdas condutivas ocorrem devido a colisões de elétrons com os núcleos dos átomos. Essa colisão provoca o aquecimento do condutor, ocasionando perdas.

$$P_{c_{vm}} = \frac{R_s}{2} \int \int |\vec{H}|^2 ds$$

$$= \frac{R_s \pi (r_1^2 + r_2^2)}{(w\mu\vec{r})^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(\frac{m^2}{\sin \theta} L_v^{|m|} (\cos \theta) \right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} L_d^{|m|} (\cos \theta) \right)^2 \right] \sin \theta d\theta$$

$$w_{e_{vm}} = \frac{\epsilon_o \epsilon_r}{4} \int \int \int |\vec{E}_{r_{vm}}|^2 dv = \frac{\epsilon_o \epsilon_r (r_2^3 - r_1^3)}{12\vec{r}^2} ||\vec{E}_{r_{vm}}||$$

$$\text{Onde } R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_c}}$$

$$\tan \delta_{c_{vm}} = \frac{P_{c_{vm}}}{2\omega W_{e_{vm}}}$$

2.9.3 Cálculo da tangente de perdas de irradiação

Apesar do nome perdas de irradiação, em realidade, elas refletem a potência irradiada pela antena. Portanto, quanto maior a perda de irradiação, melhor será nossa antena na transmissão do sinal.

$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} [|d_{nm}|^2 P_{TM_{nm}} + |f_{nm}|^2 P_{TE_{nm}}]$$

$$w_{e_{vm}} = \frac{\epsilon_o \epsilon_r}{4} \int \int \int |\vec{E}_{r_{vm}}|^2 dv = \frac{\epsilon_o \epsilon_r (r_2^3 - r_1^3)}{12\vec{r}^2} ||\vec{E}_{r_{vm}}||$$

Onde $P_{TM_{nm}}$ e $P_{TE_{nm}}$ foram obtidos nas expressões (2.50) e (2.46).

$$\tan \delta_{r_{vm}} = \frac{P_{r_{vm}}}{2\omega w_{e_{vm}}}$$

2.10 Correção dos campos da Borda

Os chamados, efeitos de franjeamento é o nome dado quando o campo eletromagnético não fica restrito a cavidade, e acaba saindo um pouco do limite das bordas. Para tentar corrigir os efeitos de franjeamento do campo eletromagnético nas bordas da cavidade, é comum considerar que a cavidade é um pouco maior do que ela realmente é, de modo que, todo o campo que deva ser interno à cavidade permaneça realmente dentro da cavidade.

Portanto iremos aumentar nossa cavidade, na direção θ , de acordo com o proposto por Hammerstad (1975). Logo

$$\epsilon_{eff}(w) = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)(1 + 10h/w)^{-1/2}}{2} \quad (2.76)$$

$$\Delta l = \frac{0,412h(\epsilon_{eff}(a) + 0,3)(a/h + 0,264)}{(\epsilon_{eff}(a) - 0,258)(a/h + 0,8)} \quad (2.77)$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta l}{r_2} \quad (2.78)$$

Simulações Computacionais

Para analisar o comportamento da antena, foi desenvolvido um simulador em MATLAB. Esse simulador reproduz os cálculos demonstrados aqui no capítulo 2. Os parâmetros de uma antena de micro fita esférica, exibidos na Tabela 3.1, foram passados ao simulador. Esses parâmetros foram escolhidos de forma a excitarem, primordialmente, o modo ($m=1$), pois, assim o lobo principal pode ser direcionado no eixo $\theta = 0$. Esse direcionamento do lobo principal, têm aplicações, por exemplo, em radares aeronáuticos que precisam detectar objetos em uma determinada direção.

3.1 Parâmetros de entrada

Tabela 3.1 Parâmetros de entrada do simulador

Parâmetros	Valor Utilizado	Descrição
r_1	$5 \cdot 10^{-2}$	Raio da esfera condutora
σ_c	$5,38 \cdot 10^7$	Condutividade da esfera condutora
ϵ_r	2,2	Permissividade elétrica do dielétrico
$\tan(\delta)$	0	Tangente de perdas do dielétrico
h_d	$1,9 \cdot 10^{-3}$ m	Largura do dielétrico
θ_1	$33,3^\circ$	Ângulo onde se localiza a borda superior da micro fita
θ_2	$66,6^\circ$	Ângulo onde se localiza a borda inferior da micro fita
N_f	2	Número de alimentadores na antena.
θ_f	43°	Ângulo θ no centro dos alimentadores.
ϕ_{1f}	0°	Ângulo ϕ no centro do alimentador 1.
W_f	$6,5 \cdot 10^{-3}$ m	Larguras dos alimentadores.
$Phase(1)$	0°	fase do sinal do alimentador 1.
$Phase(2)$	180°	fase do sinal do alimentador 2.

3.2 Frequências de ressonâncias

As frequências de ressonância estão relacionadas diretamente com o modo v através da equação

$$f_{vm} = \frac{\sqrt{v(v+1)}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon_o\epsilon_r}} \quad (3.1)$$

Mas também estão indiretamente relacionadas com o modo m , uma vez que, o modo v é encontrado para cada modo m através da equação (2.20). Notamos através da tabela 3.2 que o aumento de v causa também um aumento na frequência de ressonância.

Tabela 3.2 Frequências de ressonância

m	v	f_{vm}
0	4.746291e+00	3.307380e+09
0	9.803579e+00	6.517624e+09
0	1.489928e+01	9.747305e+09
0	2.000578e+01	1.298256e+10
0	2.511673e+01	1.622012e+10
1	9.293037e-01	8.479930e+08
1	4.939778e+00	3.430457e+09
1	9.897878e+00	6.577413e+09
1	1.496159e+01	9.786786e+09
1	2.005234e+01	1.301205e+10
2	2.199865e+00	1.680262e+09
2	5.490214e+00	3.780396e+09
2	1.017679e+01	6.754248e+09
2	1.514727e+01	9.904438e+09
2	2.019149e+01	1.310021e+10
3	3.455856e+00	2.485172e+09
3	6.326718e+00	4.311785e+09
3	1.062945e+01	7.041222e+09
3	1.545274e+01	1.009799e+10
3	2.042166e+01	1.324601e+10

3.3 Tangente de perdas e Impedância de Entrada

Pela tabela 3.3, notamos como as tangentes de perdas do dielétrico e do condutor diminuem com o aumento de v . A tangente de irradiação, entretanto, não possui um padrão claro para a variação dos modos.

Tabela 3.3 Tangentes de perdas

m	v	$\tan \delta_d$	$\tan \delta_c$	$\tan \delta_r$	$\tan \delta_i$
0	4.746291e+00	0.000000e+00	7.220241e-04	5.171334e-02	5.243536e-02
0	9.803579e+00	0.000000e+00	5.143386e-04	5.743699e-02	5.795132e-02
0	1.489928e+01	0.000000e+00	4.205828e-04	5.906737e-02	5.948795e-02
0	2.000578e+01	0.000000e+00	3.644296e-04	5.155416e-02	5.191858e-02
0	2.511673e+01	0.000000e+00	3.260369e-04	4.198605e-02	4.231209e-02
1	9.293037e-01	0.000000e+00	1.425928e-03	1.451683e-03	2.877611e-03
1	4.939778e+00	0.000000e+00	7.089536e-04	4.048896e-02	4.119792e-02
1	9.897878e+00	0.000000e+00	5.119956e-04	5.867446e-02	5.918646e-02
1	1.496159e+01	0.000000e+00	4.197336e-04	5.745868e-02	5.787842e-02
1	2.005234e+01	0.000000e+00	3.640163e-04	4.892076e-02	4.928478e-02
2	2.199865e+00	0.000000e+00	1.012990e-03	2.491561e-03	3.504551e-03
2	5.490214e+00	0.000000e+00	6.753441e-04	2.551376e-02	2.618910e-02
2	1.017679e+01	0.000000e+00	5.052488e-04	5.379565e-02	5.430090e-02
2	1.514727e+01	0.000000e+00	4.172332e-04	5.135068e-02	5.176792e-02
2	2.019149e+01	0.000000e+00	3.627895e-04	5.047479e-02	5.083757e-02
3	3.455856e+00	0.000000e+00	8.329433e-04	3.089080e-03	3.922023e-03
3	6.326718e+00	0.000000e+00	6.323612e-04	1.529148e-02	1.592384e-02
3	1.062945e+01	0.000000e+00	4.948456e-04	3.635834e-02	3.685318e-02
3	1.545274e+01	0.000000e+00	4.132151e-04	5.342594e-02	5.383916e-02
3	2.042166e+01	0.000000e+00	3.607872e-04	4.126462e-02	4.162540e-02

Na Figura 3.1, podemos observar a variação da impedância de entrada com a frequência. Para a uma frequência de 3.43GHz a impedância de entrada é de $Z_{in} = 53.191331 + 1.834744i$.

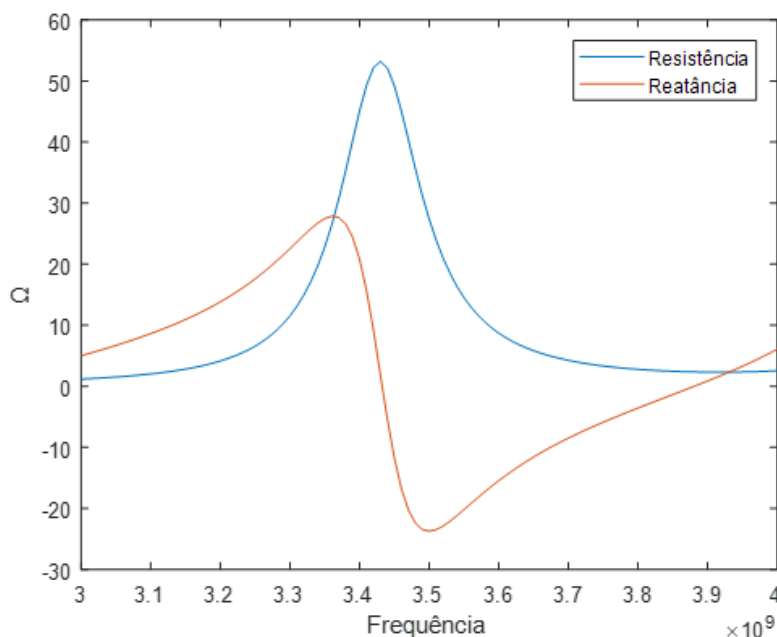


Figura 3.1 Impedância de entrada x Frequência

3.4 Diagramas de irradiação

A Figura 3.2 apresenta a magnitude do campo elétrico no exterior da cavidade, variando o ângulo θ com o ângulo ϕ fixo em $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ (localização dos alimentadores), dessa forma podemos ver a influência dos alimentadores no campo externo. Pela figura, o lobo principal da irradiação está localizado em $\theta = 0$, mas, ainda existem 5 outros lobos secundários.

A Figura 3.3 apresenta a magnitude do campo magnético no exterior da cavidade, novamente, variando o ângulo θ com o ângulo ϕ fixado em $\phi = -\frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$. Pela figura, o lobo principal da irradiação está localizado em $\theta = 0$ e concentra quase que a totalidade da energia irradiada. Entretanto, é possível notar também um lobo secundário defasado de 180 graus.

A Figura 3.4 apresenta a magnitude do campo magnético no exterior da cavidade, desta vez, variando o ângulo ϕ com o ângulo θ fixado em $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. Pela figura, a distribuição do campo é quase elíptica e possui uma intensidade maior nas regiões de ϕ onde se localizam os radiadores.

Todos esses diagramas de radiação foram simulados em uma distância de 87m da antena a uma frequência de 3,43GHz.

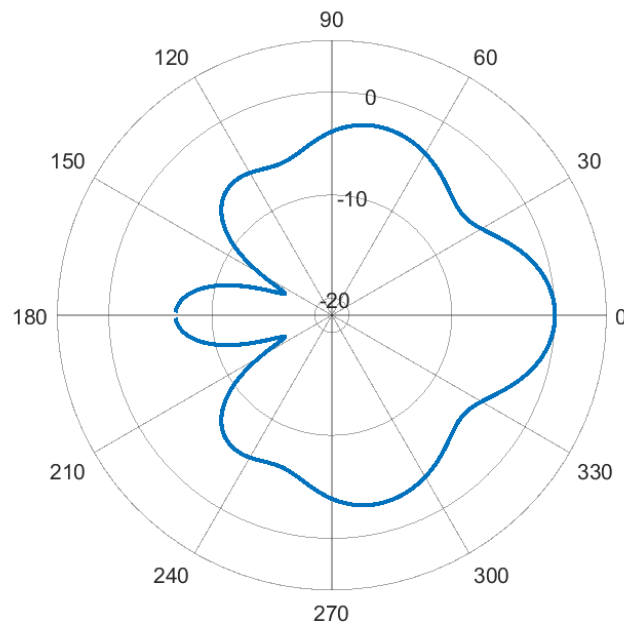


Figura 3.2 Diagrama de Irradiação do campo $E_x\theta$, quando $\phi = \pi$ e $\phi = 0$

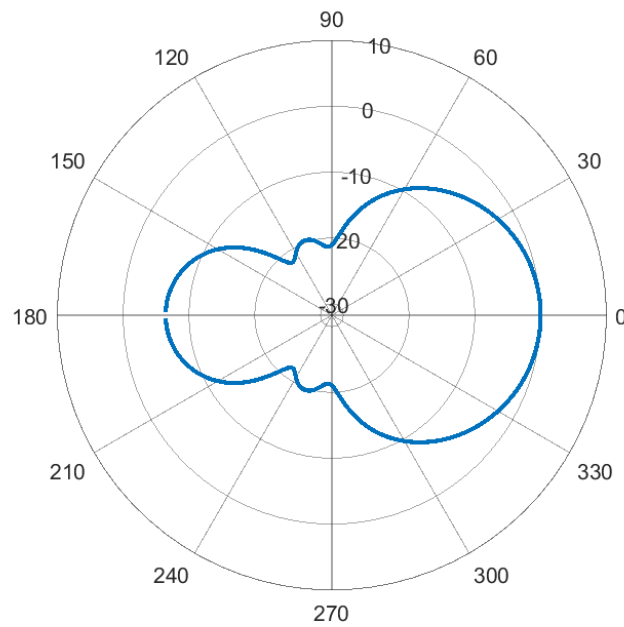


Figura 3.3 Diagrama de irradiação do campo $E \times \theta$, quando $\phi = -\frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$

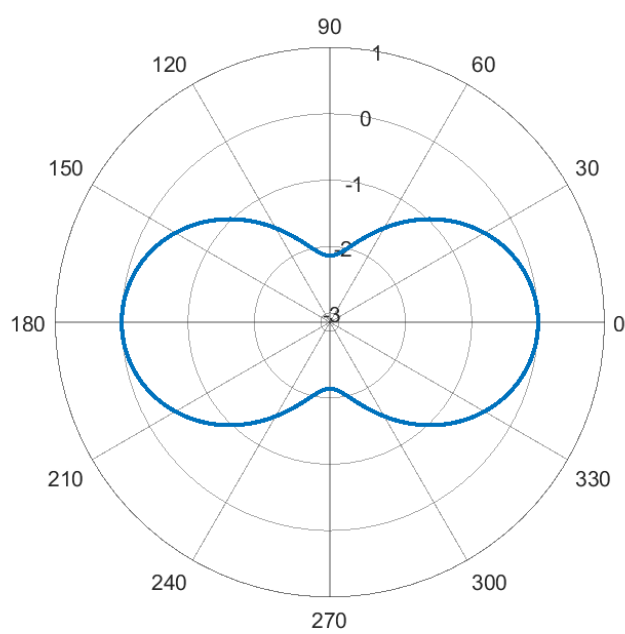


Figura 3.4 Diagrama de irradiação do campo $E \times \phi$

CAPÍTULO 4

Conclusão

Esse trabalho de graduação teve como objetivo estudar as antenas de micro fita, que vêm sendo cada vez mais utilizadas, em função de seus tamanhos reduzidos, capacidade de instalação em circuitos impressos e etc. Porém, foi de especial interesse, o estudo das antenas de micro fitas esféricas, uma vez que, esse tipo de antena não é tão discutido pelos pesquisadores quanto as antenas planares. Entretanto, não é o objetivo desse estudo propor a substituição de antenas planares pelas esféricas. A escolha entre planar e esférica deve ser feita de acordo com a superfície onde será instalada a antena. Para que esse estudo fosse possível, foi preciso fazer uma formulação da antena, para compreender os fundamentos teóricos. E desenvolver um simulador em MATLAB capaz de apresentar os dados de maneira mais intuitiva.

A modelagem da antena, feita com o método das cavidades, apesar de não ter sido validada por não haver dados para uma antena de microfita esférica que sirva como referência, se mostrou bastante condizente com os resultados esperados. Além disso, o modelo, embora complexo quando comparado a outros, é capaz de dar esclarecimentos sobre os fenômenos físicos que estão ocorrendo na antena real. Por isso, torna mais intuitivo o apreendizado.

Em trabalhos futuros, poderão ser desenvolvidas antenas esféricas reais para que o uso do método da cavidade seja devidamente validado. Também, poderão ser utilizadas outras aproximações para os campos de borda comparando elas com resultados do software HFSS.

APÊNDICE A

Apêndice

A.1 Constantes

Constantes utilizadas nesse trabalho.

Tabela A.1 Constantes			
Constante	Valor	Unidade	Descrição
ϵ_o	$8,854187817 \times 10^{-12}$	$[F.m^{-1}]$	Permissividade (vácuo)
μ_o	$12,5663706143 \times 10^{-7}$	$[N.A^{-2}]$	Permeabilidade Magnética (vácuo)
η_o	3.7673430918×10^2	$[\Omega]$	Impedância no espaço livre
c_o	2.9979563769×10^8	$[m.s^{-1}]$	Velocidade da onda (vácuo)
ϵ_r		$[F.m^{-1}]$	Permissividade relativa
ϵ_d		$[F.m^{-1}]$	Permissividade do dielétrico
μ_d		$[N.A^{-2}]$	permeabilidade magnética do dielétrico
δ_d			Tangente de perdas do dielétrico

A.2 Funções e Equações Utilizadas

Tabela A.2 Funções e Equações Utilizadas

Equação/Função	Descrição
$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$	Lei de Faraday
$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_c\vec{E} + \vec{J}_f$	Lei de Ampere
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{vf}}{\epsilon_c}$	Lei de Gauss
$\nabla \cdot \vec{H} = 0$	Lei de Gauss Magnética
$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla \times \vec{A}$	
$\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla \Phi$	
$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$	
$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$	
$L_n^m(\cos\theta)$	Funções de Legendre
$P_m^n(\cos\theta)$	Função de Legendre do primeiro tipo
$Q_m^n(\cos\theta)$	Função de Legendre do segundo tipo
$J_n(r)$	Função de Bessel do primeiro tipo
$Y_n(r)$	Função de Bessel do segundo tipo
$H_n^{(1)}(r)$	Função de Hankel do primeiro tipo
$H_n^{(2)}(r)$	Função de Hankel do segundo tipo
$\nabla \times \vec{A} = \hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$	Expressão do rotacional em coordenadas esféricas
$s(n) = \frac{4\pi n(n+1)}{2n+1}$	
$k_d = \omega^2 \mu_d \epsilon_d$	Número de onda no meio do dielétrico

APÊNDICE B

Código Fonte

Código fonte do simulador:

```
%% Script de simulação da antena
%% de microfita envoltória esférica
%%
%% Autor:
%% Luiz Lima (lls@cin.ufpe.br)
%%
%% PARAMETROS
Nfmax=10;
Mphi=10;
NmodCav=50;
Ntheta=150;

%% INICIALIZAÇÃO DE MATRIZES
phif = zeros(Nfmax+1);
phasef = zeros(Nfmax+1);
s = zeros(NmodCav+1,Mphi+2);
rksm = zeros(NmodCav+1,Mphi+2);
rNsm = zeros(NmodCav+1,Mphi+2);
rIntPc = zeros(NmodCav+1,Mphi+2);
taneff = zeros(NmodCav+1,Mphi+2);
diagTheta = zeros(358,1);
diagEtheta = zeros(358,1);
diagHtheta = zeros(358,1);
diagPhi = zeros(181,1);
diagEphi = zeros(181,1);
cf = zeros(Ntheta+2,2*Mphi+2);
cd = zeros(Ntheta+2,2*Mphi+2);

%% ABERTURA\CRIAÇÃO DE ARQUIVOS
f1 = fopen('out.txt','w');
f2 = fopen('GxthetaPE.txt','w');
f3 = fopen('in.txt','r');
f4 = fopen('GxthetaPH.txt','w');
```

```

f7 = fopen('Gxphi.txt', 'w');
f8 = fopen('Zin.txt', 'w');
f9 = fopen('out_latex.txt', 'w');
%% CONSTANTES
gamm = 1.781072418; %gamma (Euler-Masceroni)
expmin = 200;
argmax = 300;
eo = 8.854e-12;      %permissividade elétrica no vácuo
rmu = pi*4e-7;      %?
etao = sqrt(rmu/eo);%?

%% FUNCOES
hankel2 = @(nu, Z) besselj(nu,Z)-bessely(nu,Z)*1i;
sphericalH2 = @(nu, Z) hankel2(nu+0.5,Z)*sqrt(pi/2*Z);
derSphericalH2 = @(nu, Z) sqrt(pi/(8*Z))*( Z*hankel2(nu-0.5,Z)
    + hankel2(nu+0.5,Z) -Z*hankel2(nu+1.5,Z));
dnLegPmn = @(m,n,x) sqrt(factorial(n-abs(m))/factorial(n+abs(m)
    ))*pmvr(m,n,x);
dnLegPmnDer = @(m,n,x) sqrt(factorial(n-abs(m))/factorial(n+
    abs(m)))*dpmvr(m,n,x);

fprintf('***_Spheric-Wraparound_Microstrip_Antenna_***\n');
fprintf('***_Cavity_Method_***\n\n');
fprintf(f1, '***_Spheric-Wraparound_Microstrip_Antenna_***\n');
fprintf(f1, '***_Cavity_Method_***\n\n'
    );

%% LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
r1 = fscanf(f3, "%f", 1);      %raio do condutor interno
sigmac = fscanf(f3, "%f", 1); %condutividade eletrica do
    condutor
fprintf('Inner_Spherical_conductor\n');
fprintf('r1_=%f\n', r1);
fprintf('sigmac_=%f\n\n', sigmac);
fprintf(f1, 'Inner_Spherical_conductor\n');
fprintf(f1, 'r1_=%f\n', r1);
fprintf(f1, 'sigmac_=%f\n\n', sigmac);

er = fscanf(f3, "%f", 1);      %constante dielétrica
tand = fscanf(f3, "%f", 1);    %tangente de perdas do
    dielétrico
hd = fscanf(f3, "%f", 1);      %largura do dielétrico

```

```

ced = er*eo*(1-tand*li);           %constante dielétrica efetiva
    do dielétrico
r2=r1+hd;                          %raio máximo do dielétrico
r12 = (r1+r2)/2;                   %raio medio
fprintf('Antenna:\n');
fprintf('_er_=%f\n', er);
fprintf('_tand_=%f\n', tand);
fprintf('_hd_=%f\n', hd);
fprintf('_r2_=%f\n', r2);
fprintf(f1, 'Antenna:\n');
fprintf(f1, '_er_=%f\n', er);
fprintf(f1, '_tand_=%f\n', tand);
fprintf(f1, '_hd_=%f\n', hd);
fprintf(f1, '_r2_=%f\n', r2);
if (imag(ced) >= 0)
    fprintf('_ced_=%f+%fi\n\n', real(ced), imag(ced) );
    fprintf(f1, '_ced_=%f+%fi\n\n', real(ced), imag(ced) );
else
    fprintf('_ced_=%f-%fi\n\n', real(ced), imag(ced) );
    fprintf(f1, '_ced_=%f-%fi\n\n', real(ced), imag(ced) );
end

theta1 = fscanf(f3, "%f", 1);      %ângulo teta1
theta2 = fscanf(f3, "%f", 1);      %ângulo teta2
theta1 = theta1*pi/180;             %ângulo teta1 em graus
theta2 = theta2*pi/180;             %ângulo teta2 em graus
theta12 = (theta1+theta2)/2;        %ângulo teta medio em
    graus
Dtheta = theta2 - theta1;           %variação de teta em graus
rLtheta = Dtheta*r2;                %largura da fita
fprintf('*_Original_dimensions_of_the_antenna:\n');
fprintf('_theta1_=%f_degrees\n', theta1*180/pi);
fprintf('_theta2_=%f_degrees\n', theta2*180/pi);
fprintf('_theta12_=%f_degrees\n', theta12*180/pi);
fprintf('_Dtheta_=%f_degrees\n', Dtheta*180/pi);
fprintf('_rLtheta_=%f_degrees\n', rLtheta);
fprintf(f1, '*_Original_dimensions_of_the_antenna:\n');
fprintf(f1, '_theta1_=%f_degrees\n', theta1*180/pi);
fprintf(f1, '_theta2_=%f_degrees\n', theta2*180/pi);
fprintf(f1, '_theta12_=%f_degrees\n', theta12*180/pi);
fprintf(f1, '_Dtheta_=%f_degrees\n', Dtheta*180/pi);
fprintf(f1, '_rLtheta_=%f_degrees\n', rLtheta);
theta1b = theta1;

```

```
theta2b = theta2;
```

```
%% CORREÇÕES DE BORDAS
```

```
rLphi = 2*pi*r2;
erff = (er+1)/2 + 0.5*(er-1)/sqrt(1+10*hd/rLphi);
Deltat = 0.412*hd*(erff+0.3)*(rLphi/hd+0.264)/((erff-0.258)*
    (rLphi/hd+0.8));
DeltaTheta = Deltat/r2;
theta1 = theta1 - DeltaTheta;
theta2 = theta2 + DeltaTheta;
Dtheta = theta2 - theta1;
rLtheta = Dtheta*r2;
fprintf('*_After_Fringing_fields_corrections:\n');
fprintf('_theta1_=%f_degrees\n', theta1*180/pi);
fprintf('_theta2_=%f_degrees\n', theta2*180/pi);
fprintf('_theta12_=%f_degrees\n', theta12*180/pi);
fprintf('_Dtheta_=%f_degrees\n', Dtheta*180/pi);
fprintf('_rLtheta_=%f_degrees\n', rLtheta);
fprintf(f1, '*_After_Fringing_fields_corrections:\n');
fprintf(f1, '_theta1_=%f_degrees\n', theta1*180/pi);
fprintf(f1, '_theta2_=%f_degrees\n', theta2*180/pi);
fprintf(f1, '_theta12_=%f_degrees\n', theta12*180/pi);
fprintf(f1, '_Dtheta_=%f_degrees\n', Dtheta*180/pi);
fprintf(f1, '_rLtheta_=%f_degrees\n', rLtheta);
```

```
%% ALIMENTAÇÃO DA ANTENA
```

```
fprintf('*_Feeding_Network:\n');
fprintf(f1, '*_Feeding_Network:\n');
Nf = fscanf(f3, "%f", 1); %Numero de probes
thetaf = fscanf(f3, "%f", 1); %centro do alimentador na
    direcao teta
phif(1) = fscanf(f3, "%f", 1); %centro do alimentador l
Wf = fscanf(f3, "%f", 1); %Largura do alimentador
thetaf = thetaf*pi/180;
phif(1) = phif(1)*pi/180;
fprintf('_number_of_probes:_Nf_=%f\n', Nf);
fprintf('_thetaf_=%f_degrees\n', thetaf*180/pi);
fprintf('_phif(1)_=%f_degrees\n', phif(1));
fprintf('_Wf_=%f\n', Wf);
fprintf(f1, '_number_of_probes:_Nf_=%f\n', Nf);
fprintf(f1, '_thetaf_=%f_degrees\n', thetaf*180/pi);
fprintf(f1, '_phif(1)_=%f_degrees\n', phif(1));
fprintf(f1, '_Wf_=%f\n', Wf);
```

```
if (Nf>Nfmax)
    fprintf(f1 , '***_Nf>Nfmax._Increase_Nfmax!\n');
end
for n=1:Nf
    phasef(n) = fscanf(f3 , "%f" , 1);%fase do alimentador n
    phasef(n) = phasef(n)*pi/180;
end
fprintf( '_n\t\t\t\t_phif_\t\t\t\t\t\t\t_phasef\n' );
fprintf(f1 , '_n\t\t\t\t\t\t\t_phif_\t\t\t\t\t\t\t_phasef\n' );
DF= 2*pi/Nf;
for n=1:Nf
    phif(n) = phif(1) + (n-1)*DF;      %centro do alimentador l
    fprintf( '_%d\t\t\t\t\t_%e\t\t\t\t\t_%e\n' , n , phif(n)*180/pi ,
        phasef(n)*180/pi );
    fprintf(f1 , '_%d\t\t\t\t\t_%e\t\t\t\t\t_%e\n' , n , phif(n)*180/pi ,
        phasef(n)*180/pi );
end

%% ALIMENTAÇÃO APÓS CORREÇÃO DAS BORDAS
fprintf( '*_thetaf_after_Fringing-fields_corrections:\n' );
fprintf(f1 , '*_thetaf_after_Fringing-fields_corrections:\n' );
if(thetaf <= theta12)
    x = ((theta12-thetaf)/(theta12-theta1b))*(theta1b-theta1);
    thetaf = thetaf -x;
else
    x = ((thetaf-theta12)/(theta2b-theta12))*(theta2-theta2b);
    thetaf = thetaf +x;
end
fprintf( '_thetaf_=_%f_degrees\n' , thetaf*180/pi );
fprintf(f1 , '_thetaf_=_%f_degrees\n' , thetaf*180/pi );
dphif = Wf/(r12*sin(thetaf));
fprintf( '_dphif_=_%f_degrees\n' , dphif*180/pi );
fprintf(f1 , '_dphif_=_%f_degrees\n' , dphif*180/pi );

%% NÚMERO DE MODOS NA CAVIDADE
fprintf( 'Number_of_modes_in_the_cavity:\n' );
fprintf(f1 , 'Number_of_modes_in_the_cavity:\n' );
Mmax= fscanf(f3 , "%f" , 1);          %max number of modes TMr
in the cavity
iSmax= fscanf(f3 , "%f" , 1);         %number of eivenvalues "s"
for each value of |m| (0,...,Mmax)
fprintf( '_Mmax_=_%f_iSmax_=_%f\n' , Mmax,iSmax );
fprintf(f1 , '_Mmax.=.%f.iSmax.=.%f\n' , Mmax,iSmax );
```

```

if (Mmax > Mphi)
    fprintf( '***_Mmax>Mphi._Increase_Mphi!\n' );
    fprintf( f1 , '***_Mmax>Mphi._Increase_Mphi!\n' );
    exit;
end
if (iSmax > NmodCav)
    fprintf( '***_iSmax>NmodCav._Increase_NmodCav!\n' );
    fprintf( f1 , '***_iSmax>NmodCav._Increase_NmodCav!\n' );
    exit;
end

%% Numero de modos no exterior
fprintf( 'Number_of_modes_in_the_exterior:\n' );
fprintf( f1 , 'Number_of_modes_in_the_exterior:\n' );
Nmax= fscanf( f3 , "%f", 1);           %max number of modes TMr
    in the cavity
fprintf( '_Nmax=_%f\n' ,Nmax);
fprintf( f1 , '_Nmax=_%f\n' ,Nmax);
if (Nmax > Ntheta)
    fprintf( '***_Nmax_must_be_<=_Ntheta!_***\n' );
    fprintf( f1 , '***_Nmax_must_be_<=_Ntheta!_***\n' );
    exit;
end
if (Mmax > Nmax)
    fprintf( '***_Mmax_must_be_<=_to_Nmax!!_***\n' );
    fprintf( f1 , '***_Mmax_must_be_<=_to_Nmax!!_***\n' );
    exit;
end

%% FREQUÊNCIAS
fprintf( 'Frequency:\n' );
fprintf( f1 , 'Frequency:\n' );
fini= fscanf( f3 , "%f", 1);           %frequencia inicial
fstep= fscanf( f3 , "%f", 1);         %passo da frequencia
fend= fscanf( f3 , "%f", 1);          %frequencia final
fprintf( '_fini_(GHz)_=_%e\n' , fini/1e9);
fprintf( '_fstep_(GHz)_=_%e\n' , fstep/1e9);
fprintf( '_fend_(GHz)_=_%e\n' , fend/1e9);
fprintf( f1 , '_fini_(GHz)_=_%e\n' , fini/1e9);
fprintf( f1 , '_fstep_(GHz)_=_%e\n' , fstep/1e9);
fprintf( f1 , '_fend_(GHz)_=_%e\n' , fend/1e9);

```

```

%% DADOS DA IRRADIAÇÃO
fprintf(' Radiation_data:\n');
fprintf(f1,' Radiation_data:\n');
ipat= fscanf(f3, "%f", 1);          %flag para salvar o padrão
    de radiacao
fpat= fscanf(f3, "%f", 1);          %frequência do padrão de
    radicao
phifront= fscanf(f3, "%f", 1);      %valor de phi para o
    padrão de radiacao
fprintf('_radiation_pattern_flag=_%d\n', ipat);
fprintf('_frequency_of_the_rad._patterns:_fpat_(GHz)=_%e\n',
    fpat/1e9);
fprintf('_phifront=_%e_(degrees)\n', phifront*pi/180);
fprintf(f1, '_radiation_pattern_flag=_%d\n', ipat);
fprintf(f1, '_frequency_of_the_rad._patterns:_fpat_(GHz)=_%e\n',
    fpat/1e9);
fprintf(f1, '_phifront=_%e_(degrees)\n', phifront*pi/180);

% amplitude da corrente no alimentador
cIo = 1;

%% SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSCENDENTAL (DESCOBERTA DOS MODOS)

for m=0:Mmax
    if(m == 0)
        sini = 0.0001;
    else
        sini = m - 0.999;
    end
    ds=0.05;
    s1 = sini;
    s2 = sini +ds;
    iter=1;
    tlm = @(s) T1(m,double(s),theta1,theta2);
    options = optimset('TolX',1e-7);
    while(iter <= iSmax)
        try
            s(iter,m+1) = fzero(tlm, [s1 s2],options);
            rksm(iter,m+1) = sqrt(s(iter,m+1)*(s(iter,m+1)+1))
                /r12;
            fsm = rksm(iter,m+1)/(2*pi*sqrt(rmu*er*eo));
            fprintf('_m=%d_i=%d_s(i,_m+1)=_%e_fsm=_%e\n', m,
                iter, s(iter,m+1), fsm);

```



```

    si = s(i, m+1);
    rIntPc(i, m+1) = 0;
    dt = Dtheta/i;
    for n=1:i
        XL = theta1 + (n-1)*dt;
        XU = XL + dt;
        rIntPcR = @(x) rIntegPc(x, si, m, theta1);
        val = integral(rIntPcR, XL, XU, 'ArrayValued', true);
        rIntPc(i, m+1) = rIntPc(i, m+1) + val;
    end
    fprintf('m=%d i=%d rIntPc=%e\n', m, i, rIntPc(i, m+1));
    fprintf(f1, 'm=%d i=%d rIntPc=%e\n', m, i, rIntPc(i, m+1));
end
end

%% TANGENTE DE PERDAS

fprintf('Loss_tangents:\n');
fprintf(f1, 'Loss_tangents:\n');
for m=0:Mmax
    for i=1:iSmax
        si = s(i, m+1);
        E2 = rNsm(i, m+1);
        rk = rksm(i, m+1);
        w = rk/sqrt(rmu*er*eo);
        rko = w*sqrt(eo*rmu);
        Rs = sqrt(0.5*w*rmu/sigmac);
        We = eo*er*(r2^3 - r1^3)*E2/(12*(r12^2));
        Pc = Rs*pi*(r1^2+r2^2)*rIntPc(i, m+1)/((w*rmu*r12)^2);
        tanc = Pc/(2*w*We);
        Pr = 0;
        nmin = max(1, m);
        for n=nmin:Nmax
            Sn = 4*pi*n*(n+1)/(2*n+1);
            ax3 = dnLegPmn(abs(m), n, cos(theta1))*T3(m, si, theta1, theta1);
            ax4 = dnLegPmn(abs(m), n, cos(theta2))*T3(m, si, theta2, theta1);
            cMu = -1i*m*hd*2*pi*(-ax3+ax4)/(r2*sqrt(Sn));
            cx1 = rko*r2;

```



```

end
Rs = sqrt(0.5*d0*w*rmu/sigmac);

%% IMPEDÂNCIA DE ENTRADA
cZin = 0.d0;
for m=-Mmax:Mmax
    ma = abs(m);
    if (m == 0)
        ax2 = 1;
    else
        ax1 = m*dphif/2;
        ax2 = sin(ax1)/ax1;
    end
    for i=1:iSmax
        si = s(i,ma+1);
        E2 = rNsm(i,ma+1);
        ck2eff = (w^2)*rmu*eo*er*(1-li*taneff(i,ma+1));
        cJfEsm = 0;
        for ii=1:Nf
            cJfEsm = cJfEsm + exp(-li*m*phif(ii))*exp(li*
                phasef(ii));
        end
        cJfEsm = cIo*T3(m,si,thetaf,theta1)*ax2*cJfEsm;
        cZin = cZin + (cJfEsm^2)/((ck2eff-rksm(i,ma+1)^2)*
            E2);
    end
end

cZin = cZin*(-li)*w*rmu*hd/(Nf*(cIo^2));
iterador = iterador + 1;
graphZin(iterador) = cZin;
freqZin(iterador) = f;

fprintf('f_=%f_cZin_=%f_f_+%fi\n',f/1e9,real(cZin),
    imag(cZin));
fprintf(f1,'f_=%f_cZin_=%f_f_+%fi\n',f/1e9,real(cZin),
    imag(cZin));
fprintf(f9,'%f_&%f_+%fi\\\\\\_\\hline_\n',f/1e9,real(
    cZin),imag(cZin));
%% COEFICIENTES DOS MODOS TEr e TMr IRRADIADOS

if (ipat == 1 && f == fpat)
    fprintf('Coefficients_of_TEr_and_TMr_radiation_modes\n
        ');
end

```

```

fprintf(f1, 'Coefficients_of_TEr_and_TMr_radiation_
modes\n');
Pr=0;
for n=1:Nmax
    Sn = 4*pi*n*(n+1)/(2*n+1);
    nmin = min(n,Mmax);
    for m=-nmin:nmin
        cf(n+1,Mmax+m+1) = 0;
        cd(n+1,Mmax+m+1) = 0;
        ma = abs(m);
        if (m == 0)
            ax2 = 1;
        else
            ax1 = m*dphif/2;
            ax2 = sin(ax1)/ax1;
        end
        for i=1:iSmax
            si = s(i,ma+1);
            E2 = rNsm(i,ma+1);
            cJfEsm = 0;
            for ii=1:Nf
                cJfEsm=cJfEsm + exp(-1i*m*phif(ii))*
                    exp(1i*phasef(ii));
            end
            cJfEsm = cIo*T3(m, si , thetaf , theta1)*ax2*
                cJfEsm;
            coef = 1i*w*rmu*cJfEsm/((ckd^2-rksm(i,ma
                +1)^2)*E2);
            ax3 = dnLegPmn(abs(m),n,cos(theta1))*T3(m,
                si,theta1,theta1);
            ax4 = dnLegPmn(abs(m),n,cos(theta2))*T3(m,
                si,theta2,theta1);
            cMu = -1i*m*hd*2*pi*(-ax3+ax4)/(r2*sqrt(Sn
                ));
            cx1 = rko*r2;
            rn = n;
            cfnm = r2*cMu/(sqrt(Sn)*sphericalH2(rn,cx1
                ));
            cf(n+1,Mmax+m+1) = cf(n+1,Mmax+m+1) + cfnm
                *coef;

            ax3 = -dnLegPmnDer(abs(m),n,cos(theta1))
                *...

```

```

        ( sin(theta1)^2)*T3(m, si , theta1 , theta1 )
        ;
ax4 = -dnLegPmnDer( abs(m) , n , cos(theta2))
*...
        ( sin(theta2)^2)*T3(m, si , theta2 , theta1 )
        ;
cMd = 2*pi*hd*(-ax3+ax4)/(r2*sqrt(Sn));
cdnm = r2*cMd/(1i*etao*sqrt(Sn))*
        derSphericalH2(rn , cx1));
cd(n+1,Mmax+m+1) = cd(n+1,Mmax+m+1) + cdm
        *coef;
end
Pte = 0.5*Sn/etao;
Ptm = 0.5*etao*Sn;
Pr = Pr + (abs(cf(n+1,Mmax+m+1))^2)*Pte;
Pr = Pr + (abs(cd(n+1,Mmax+m+1))^2)*Ptm;
fprintf(' _ _ _ _ n=%3d \ t _ m=%3d \ t _ cd=_%+13.4e _ _
        %+9.4e _ \ t _ cf=_%+13.4e _ _ %+13.4e \ n' ...
        , n, m, real(cd(n+1,Mmax+m+1)) , imag(cd(n+1,
        Mmax+m+1)) , ...
        real(cf(n+1,Mmax+m+1)) , imag(cf(n+1,Mmax+m
        +1)));
fprintf(f1 , ' _ _ _ _ n=%3d \ t _ m=%3d \ t _ cd=_%+13.4e _ _
        %+9.4e _ \ t _ cf=_%+13.4e _ _ %+13.4e \ n' ...
        , n, m, real(cd(n+1,Mmax+m+1)) , imag(cd(n+1,
        Mmax+m+1)) , ...
        real(cf(n+1,Mmax+m+1)) , imag(cf(n+1,Mmax+m
        +1)));
end
end
fprintf(' _ _ Radiated _ Power _ =_%e \ n' , Pr);
fprintf(f1 , ' _ _ Radiated _ Power _ =_%e \ n' , Pr);

%%  DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO

Gmax = 0;

fprintf(' Radiation _ diagrams ... _ -pi<theta<pi _ _ E-plane \ n
        ');
fprintf(f1 , ' Radiation _ diagrams ... _ -pi<theta<pi _ _ E-
        plane \ n');
rlambda = 3e8/f; % lambda = c /f

```

```

r = 1e3*max(r2,rlambda); % pega o maior entre r2 e
lambda
phi = phifront - pi; % phi = -pi
Npoints = 180; %Fara para 180 pontos
dt = pi/Npoints; % Determina o tamanho do passo em
radianos
for it=(Npoints-1):-1:1
    theta = it*dt; %Definio o theta para a iteracao
    atual
    cEphi = 0; %Inicializa o acumulador de Etheta com
    zero
    cEtheta = 0; %Inicializa o acumulador de Ephi com
    zero
    for n=1:Nmax
        nmin = min(n,Mmax);
        rn = n;
        cx0 = rko*r;
        for m=-nmin:nmin
            cx1 = sphericalH2(rn,cx0);
            cx2 = derSphericalH2(rn,cx0);
            cx3 = dnLegPmn(abs(m),n,cos(theta));
            cx4 = -dnLegPmnDer(abs(m),n,cos(theta))*
                sin(theta);
            cx5 = exp(1i*m*phi);
            cx6 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*cx2*cx4*cx5/(1i
                *w*eo*r);
            cx7 = -cf(n+1,Mmax+m+1)*1i*m*cx1*cx3*cx5/(
                r*sin(theta));
            cEtheta = cEtheta + cx6 + cx7;
            cx8 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*1i*m*cx2*cx3*
                cx5 / ...
                (1i*w*eo*r*sin(theta));
            cx9 = cf(n+1,Mmax+m+1)*cx1*cx4*cx5/r;
            cEphi = cEphi + cx8 + cx9;
        end
    end
    U = 0.5*r*r*(abs(cEtheta)^2 + abs(cEphi)^2 )/etao;
    G = 4*pi*U/Pr;
    if (G > Gmax)
        Gmax = G;
    end
    fprintf(' _ _ %10.5f _ _ _ %14.6e\n', -theta*180/pi, G);

```

```

fprintf(f1, '_%10.5f_%14.6e\n', -theta*pi,
G);
diagTheta(180-it) = -theta;
diagEtheta(180-it) = U;
end

phi = phifront;
Npoints = 180;
dt = pi/Npoints;
for it=1:(Npoints-1)
    theta = it*dt;
    cEphi = 0;
    cEtheta = 0;
    for n=1:Nmax
        nmin = min(n,Mmax);
        rn = n;
        cx0 = rko*r;
        for m=-nmin:nmin
            cx1 = sphericalH2(rn,cx0);
            cx2 = derSphericalH2(rn,cx0);
            cx3 = dnLegPmn(abs(m),n,cos(theta));
            cx4 = -dnLegPmnDer(abs(m),n,cos(theta))*
                sin(theta);
            cx5 = exp(1i*m*phi);
            cx6 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*cx2*cx4*cx5/(1i
                *w*eo*r);
            cx7 = -cf(n+1,Mmax+m+1)*1i*m*cx1*cx3*cx5/(
                r*sin(theta));
            cEtheta = cEtheta + cx6 + cx7;
            cx8 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*1i*m*cx2*cx3*
                cx5/...
                (1i*w*eo*r*sin(theta));
            cx9 = cf(n+1,Mmax+m+1)*cx1*cx4*cx5/r;
            cEphi = cEphi + cx8 + cx9;
        end
    end
    U = 0.5*r*r*( abs(cEtheta)^2 + abs(cEphi)^2 )/etao
    ;
    G = 4*pi*U/Pr;
    if (G>Gmax)
        Gmax = G;
    end
fprintf('_%10.5f_%14.6e\n', theta*pi, G);

```

```

fprintf(f1, '_%10.5f_%%14.6e\n', theta*180/pi, G
);
diagTheta(179+it) = theta;
diagEtheta(179+it) = U;
end
fprintf('**_Maximum_Gain_=%e\n',Gmax);
fprintf(f1, '**_Maximum_Gain_=%e\n',Gmax);

fprintf(' Radiation_diagrams ... _-pi<theta<pi_ _H-plane\n
');
fprintf(f1, ' Radiation_diagrams ... _-pi<theta<pi_ _H-
plane\n');
phi = phifront - pi/2;
Npoints = 180;
dt = pi/Npoints;
for it=(Npoints-1):-1:1
    theta = it*dt;
    cEphi = 0;
    cEtheta = 0;
    for n=1:Nmax
        nmin = min(n,Mmax);
        rn = n;
        cx0 = rko*r;
        for m=-nmin:nmin
            cx1 = sphericalH2(rn,cx0);
            cx2 = derSphericalH2(rn,cx0);
            cx3 = dnLegPmn(abs(m),n,cos(theta));
            cx4 = -dnLegPmnDer(abs(m),n,cos(theta))*
sin(theta);
            cx5 = exp(1i*m*phi);
            cx6 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*cx2*cx4*cx5/(1i
*w*eo*r);
            cx7 = -cf(n+1,Mmax+m+1)*1i*m*cx1*cx3*cx5
/...
(r*sin(theta));
            cEtheta = cEtheta + cx6 + cx7;
            cx8 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*1i*m*cx2*cx3*
cx5/...
(1i*w*eo*r*sin(theta));
            cx9 = cf(n+1,Mmax+m+1)*cx1*cx4*cx5/r;
            cEphi = cEphi + cx8 + cx9;
        end
    end
end

```

```

U = 0.5*r*r*( abs(cEtheta)^2 + abs(cEphi)^2 )/etao
;
G = 4*pi*U/Pr;
fprintf( '%%10.5f%%14.6e\n', -theta*180/pi, G);
fprintf(f1, '%%10.5f%%14.6e\n', -theta*180/pi,
G);
diagHtheta(180-it) = U;
end

phi = phifront + pi/2;
Npoints = 180;
dt = pi/Npoints;
for it=1:(Npoints-1)
    theta = it*dt;
    cEphi = 0;
    cEtheta = 0;
    for n=1:Nmax
        nmin = min(n,Mmax);
        rn = n;
        cx0 = rko*r;
        for m=-nmin:nmin
            cx1 = sphericalH2(rn,cx0);
            cx2 = derSphericalH2(rn,cx0);
            cx3 = dnLegPmn(abs(m),n,cos(theta));
            cx4 = -dnLegPmnDer(abs(m),n,cos(theta))*
                sin(theta);
            cx5 = exp(1i*m*phi);
            cx6 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*cx2*cx4*cx5/(1i
                *w*eo*r);
            cx7 = -cf(n+1,Mmax+m+1)*1i*m*cx1*cx3*cx5
                /...
                (r*sin(theta));
            cEtheta = cEtheta + cx6 + cx7;

            cx8 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*1i*m*cx2*cx3*
                cx5/...
                (1i*w*eo*r*sin(theta));
            cx9 = cf(n+1,Mmax+m+1)*cx1*cx4*cx5/r;
            cEphi = cEphi + cx8 + cx9;
        end
    end
    U = 0.5*r*r*(abs(cEtheta)^2 + abs(cEphi)^2 )/etao;
    G = 4*pi*U/Pr;

```

```

fprintf( ' _ _ %10.5f _ _ _ %14.6e \n ', theta*180/pi, G);
fprintf(f1, ' _ _ %10.5f _ _ _ %14.6e \n ', theta*180/pi, G
);
diagHtheta(179+it) = U;
end

fprintf( ' Radiation _ diagrams ... _ -  $\pi$  <  $\phi$  <  $\pi$  \n ');
fprintf(f1, ' Radiation _ diagrams ... _ -  $\pi$  <  $\phi$  <  $\pi$  \n ');
theta = theta12;
Npoints = 180;
dp = 2*pi/Npoints;
for iphi=0:Npoints
    phi = -pi + iphi*dp;
    cEphi = 0;
    cEtheta = 0;
    for n=1:Nmax
        nmin = min(n,Mmax);
        rn = n;
        cx0 = rko*r;
        for m=-nmin:nmin
            cx1 = sphericalH2(rn,cx0);
            cx2 = derSphericalH2(rn,cx0);
            cx3 = dnLegPmn(abs(m),n,cos(theta));
            cx4 = -dnLegPmnDer(abs(m),n,cos(theta))*
                sin(theta);
            cx5 = exp(1i*m*phi);
            cx6 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*cx2*cx4*cx5/(1i
                *w*eo*r);
            cx7 = -cf(n+1,Mmax+m+1)*1i*m*cx1*cx3*cx5
                /...
                (r*sin(theta));
            cEtheta = cEtheta + cx6 + cx7;
            cx8 = cd(n+1,Mmax+m+1)*rko*1i*m*cx2*cx3*
                cx5/...
                (1i*w*eo*r*sin(theta));
            cx9 = cf(n+1,Mmax+m+1)*cx1*cx4*cx5/r;
            cEphi = cEphi + cx8 + cx9;
        end
    end
    U = 0.5*r*r*(abs(cEtheta)^2 + abs(cEphi)^2 )/etao;
    G = 4*pi*U/Pr;
    fprintf( ' _ _ %10.5f _ _ _ %14.6e \n ', phi*180/pi, G);
    fprintf(f1, ' _ _ %10.5f _ _ _ %14.6e \n ', phi*180/pi, G);

```

```

        diagPhi( iphi+1)= phi;
        diagEphi( iphi+1) = U;
    end
%% Resultados
%%Normalizacao
    nDiagEtheta = diagEtheta/max(diagEtheta);
    nDiagHtheta = diagHtheta/max(diagHtheta);
    nDiagEphi = diagEphi/max(diagEphi);

%%10log
    lDiagEtheta = 10*log10(diagEtheta);
    lDiagHtheta = 10*log10(diagHtheta);
    lDiagEphi = 10*log10(diagEphi);

%%10log of normalized
    lnDiagEtheta = 10*log10(nDiagEtheta);
    lnDiagHtheta = 10*log10(nDiagHtheta);
    lnDiagEphi = 10*log10(nDiagEphi);

figure( 'Name', 'diagEtheta' ),
polarplot(diagTheta , diagEtheta , 'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print( 'figurasResultados\\diagEtheta', '-dpng' )

figure( 'Name', 'diagHtheta' ),
polarplot(diagTheta , diagHtheta , 'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print( 'figurasResultados\\diagHtheta', '-dpng' )

figure( 'Name', 'diagEphi' ),
polarplot(diagPhi , diagEphi , 'LineWidth',2 )
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print( 'figurasResultados\\diagEphi', '-dpng' )

figure( 'Name', 'nDiagEtheta' ),
polarplot(diagTheta , nDiagEtheta , 'LineWidth',2)
pax = gca;

```

```

pax.GridAlpha =0.4;
print('figurasResultados\\nDiagEtheta','-dpng')

figure('Name','nDiagHtheta'),
polarplot(diagTheta, nDiagHtheta,'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print('figurasResultados\\nDiagHtheta','-dpng')

figure('Name','nDiagEphi'),
polarplot(diagPhi, nDiagEphi,'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print('figurasResultados\\nDiagEphi','-dpng')

figure('Name','lDiagEtheta'),
polarplot(diagTheta, lDiagEtheta,'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print('figurasResultados\\lDiagEtheta','-dpng')

figure('Name','lDiagHtheta'),
polarplot(diagTheta, lDiagHtheta,'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print('figurasResultados\\lDiagHtheta','-dpng')

figure('Name','lDiagEphi'),
polarplot(diagPhi, lDiagEphi,'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
print('figurasResultados\\lDiagEphi','-dpng')

figure('Name','lnDiagEtheta'),
polarplot(diagTheta, lnDiagEtheta,'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
rlim([min(lnDiagEtheta)-5 max(lnDiagEtheta)+5])
print('figurasResultados\\lnDiagEtheta','-dpng')

figure('Name','lnDiagHtheta'),
polarplot(diagTheta, lnDiagHtheta,'LineWidth',2)
pax = gca;

```

```
pax.GridAlpha =0.4;
rlim([min(lnDiagHtheta)-10 max(lnDiagHtheta)+10])
print('figurasResultados\\lnDiagHtheta','-dpng')

figure('Name','lnDiagEphi'),
polarplot(diagPhi, lnDiagEphi,'LineWidth',2)
pax = gca;
pax.GridAlpha =0.4;
rlim([min(lnDiagEphi)-1 max(lnDiagEphi)+1])
print('figurasResultados\\lnDiagEphi','-dpng')

end

end

figure('Name','Impedancia_de_entrada'),
plot(freqZin, real(graphZin))
hold on
plot(freqZin, imag(graphZin))
print('figurasResultados\\graphZin','-dpng')
hold off
```


Referências Bibliográficas

Balanis, C.A. (2012), *Antenna Theory: Analysis and Design*. Wiley, URL <https://books.google.com.br/books?id=v1PSZ48DnuEC>.

Ferreira, JC da S, Daniel B e Lacava (2011), “Microstrip antennas conformed onto spherical surfaces.” In *Microstrip Antennas*, InTech.

Hammerstad, Erik O (1975), “Equations for microstrip circuit design.” In *Microwave Conference, 1975. 5th European*, 268–272, IEEE.

Harrington, R.F. (2001), *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, Wiley, URL <https://books.google.com.br/books?id=4-6kNAEACAAJ>.

Tsitsas, Constantinos A, Nikolaos L e Valagiannopoulos (2011), “Mathematical modeling of spherical microstrip antennas and applications.” In *Microstrip Antennas*, InTech.

