Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Informática

GeometricVis: Um aplicativo para auxiliar o ensino da geometria analítica e álgebra linear

Aluna: Gabriela Mota de Lacerda {gml@cin.ufpe.br}
Orientador: Paulo Salgado Gomes de Mattos Neto {psgmn@cin.ufpe.br}

Graduação em Ciência da Computação
2017.1

RESUMO

A motivação deste trabalho é ajudar os alunos a compreenderem melhor a base teórica de geometria analítica e álgebra linear de uma forma mais lúdica. O diferencial desta ferramenta é permitir uma aproximação da realidade dos estudantes com os conceitos de geometria analítica e álgebra linear, utilizando a flexibilização e visualização dos dados inseridos. Não somente a linguagem construída é mais próxima da utilizada nos livros didáticos, como também é possível fazer relações com outros elementos, como posicionamento relativo entre retas e interseção, podendo ser um grande aliado no aprendizado. O foco da ferramenta é diminuir a abstração de forma prática e auxiliar os alunos a compreenderem os conceitos básicos, de forma que seja possível construir uma certa assimilação do conteúdo teórico em algo que se possa ver e analisar.

Palavras Chaves: Geometria Analítica, Álgebra linear, Ensino, Ferramenta, Educação.

ÍNDICE

Lista de Figuras

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização e Motivação

No ENEM, matemática divide o último lugar com Física no ranking da taxa de acertos, com apenas 25% [1]. Os alunos, em geral, apresentam dificuldade maior em matemática [2] do que em outras disciplinas. Segundo pesquisas (Smith e Strick, 2001) essas dificuldades existem devido a problemas com a memória, atenção, atividades perceptivo-motora, organização espacial, falta de consciência, habilidades verbais, etc.

Dentre os assuntos da matemática, os conceitos de álgebra linear e geometria analítica estão dentre as disciplinas mais difíceis, pois envolvem um alto grau de abstração. Assim, apenas a intuição pode não ser suficiente para que os alunos desenvolvam o entendimento completo dos assuntos introdutórios dessas disciplinas. Assim, assuntos seguintes, que possuem um maior nível de complexidade e de maior abstração [3] se tornam extremamente difíceis de serem entendidos.

1.2 Objetivos

A motivação deste trabalho é ajudar alunos a compreender conceitos da geometria analítica e da álgebra linear de uma forma mais simples, através do ensino lúdico. Com isso foi desenvolvida uma ferramenta que visa aproximar-se da realidade dos estudantes que têm dificuldade em abstrair a escrita algébrica de figuras geométricas elementares em uma visualização da disposição dos elementos em planos coordenados, além de poder visualizar a relação entre esses elementos, no que tange à descobrir qual a interação ou posicionamento relativo entre eles.

1.3 Estrutura do Documento

No Capítulo 2, serão apresentadas as ferramentas existentes bem como suas características e limitações. Além disso, será também discutido as maneiras pelas quais a ferramenta foi pensada. No Capítulo 3, será apresentada a ferramenta, bem como sua forma de uso. Por fim, no Capítulo 4, é apresentada uma visão geral das principais conclusões deste trabalho e de possíveis contribuições futuras.

Capítulo 2
DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo, serão apresentados os fundamentos para a criação da ferramenta proposta neste trabalho, bem como uma mostra das ferramentas existentes e suas aplicações. O capítulo inicia com uma breve motivação para o desenvolvimento da pesquisa que foi desenvolvida através deste trabalho e a seguir serão descritas as ferramentas mais conhecidas. Nesse contexto, existem *softwares* desenvolvidos com o objetivo de facilitar a visualização dos conceitos de álgebra e geometria analítica, bem como seu aprendizado. São exemplos desses programas: , MATLAB [5], Wolfram [6], Calques3D [7] e Geogebra [4, 13]. Contudo, as funcionalidades apresentadas pelos *softwares* existentes na literatura e no mercado possuem alguns limitadores, quando temos como objetivo da ferramenta aproximar-se da realidade dos alunos que cursam as disciplinas de geometria analítica e álgebra linear.

"Segundo Hans Freudenthal (um importante matemático do séc. XX) o ensino da Geometria é fundamental nos quatro primeiros anos de escolaridade na medida em que está naturalmente integrada no desenvolvimento da criança, favorecendo a relação entre a matemática e o mundo real.

Segundo vários estudos, as primeiras experiências que as crianças vivem são de natureza geométrica, por exemplo, quando se deslocam de um ponto para outro ou quando verificam que um dado objeto está mais próximo de si e outro mais distante.

A Geometria permite o desenvolvimento da orientação espacial - o qual é imprescindível para escrever, seguir uma determinada direcção, localizar objectos e localizar-se a si próprio e aos outros, entre outros.
Assim, pode-se dizer que a Geometria está presente na vida das crianças a partir do momento em que estas começam a ver, sentir e movimentar-se no espaço que ocupam." [10]

Mesmo contendo a geometria como fundamental na grade curricular das crianças em seus primeiros anos de vida, adolescentes e adultos ainda têm dificuldade em certas competências necessárias para se desenvolver bem em geometria analítica e álgebra linear

"Historicamente, se pode observar que os cursos de Ciências Exatas estão entre os que mais reprovam, especialmente no que se refere à Matemática, não só no ensino superior, mas desde o ensino fundamental." [11]

Partindo do contexto citado acima, este trabalho foi desenvolvido estudando ferramentas existentes e acrescentando funcionalidades a partir da deficiência destas, além de buscar uma aproximação com a realidade dos estudantes que viriam a utilizá-la e do pressuposto do uso da ferramenta em questões reais das matérias da matemática que se aplicam. Alguns dos softwares ou recursos mais próximos da realidade, quando se é falado em redução da abstração de conceitos matemáticos básicos da geometria analítica e da álgebra linear estão descritos abaixo, são eles: MATLAB, Wolfram, Calques3D e Geogebra.

MATLAB

É uma linguagem de programação de alto nível e um ambiente de interação bastante utilizado no ambiente acadêmico para representar a matemática através da computação.

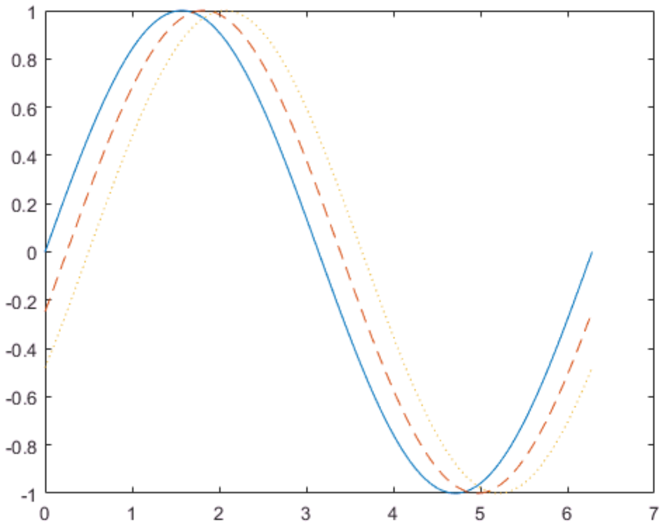


Figura 2.1: Imagem da ferramenta MatLab

O MatLab é um software de licença paga, mas que permite projetar elementos gráficos diversos, porém exige conhecimento em programação para realizar as operações. Possui apenas uma forma de inserção de dados, ou seja, no caso de retas em formatos diferentes é preciso passá-las todas para a forma que o MatLab entenda e então projete os objetos na tela. Esta ferramenta também não faz relação entre os elementos desenhados, apenas os desenha. Para utilizá-la é preciso baixar a ferramenta de aproximadamente 4GB para o computador.

Wolfram

O Wolfram possui uma série de serviços online e recentemente lançou sua própria linguagem de programação e uma plataforma online que compila o programa e gera o resultado no próprio navegador.

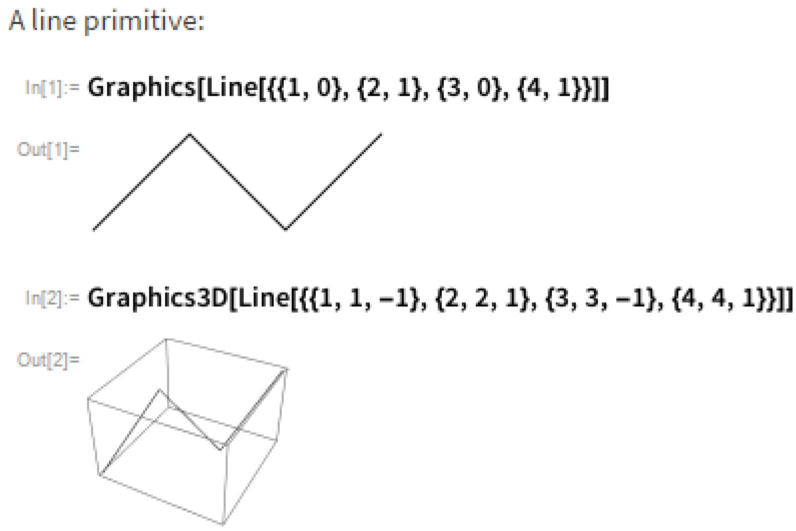


Figura 2.2: Imagem da documentação Wolfram

O Wolfram permite projetar elementos gráficos diversos, porém não faz relações entre os elementos desenhados de maneira simples. A documentação não é muito simples para encontrar as melhores formas de desenhar os elementos, além do mais não existe uma interface gráfica, ou seja, é preciso saber programar para utilizar desse recurso para auxiliar os estudos. Por existir uma forma predefinida de inserção dos dados, não existe uma flexibilidade na inserção dos dados, assim como na ferramenta acima.

Calques3D

Segundo informações contidas no site da ferramenta, a Calques3D foi desenhada para construir, observar e manipular figuras geométricas, provendo aos usuários algumas funções e um parecer visual no auxílio da visão e compreensão de objetos de 3 dimensões. Além disso permite a construção dinâmica de figuras geométricas a partir de objetos elementares e de operações, e explorar e descobrir propriedades da figura deformando-a.

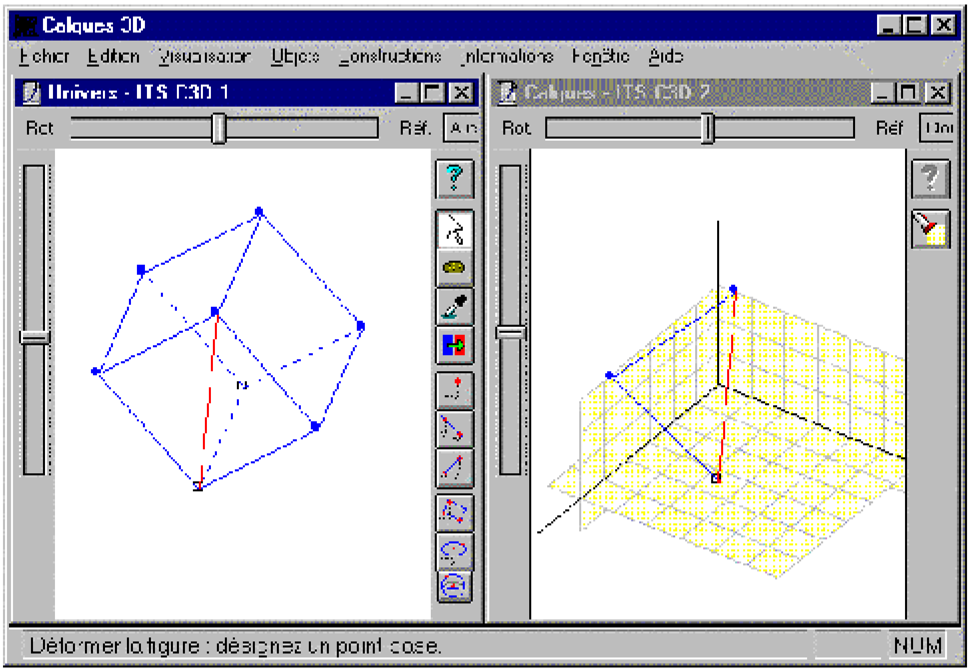


Figura 2.3: Imagem da ferramenta Calques3D

A ferramenta Calques3D desempenha muito bem o papel de desenhar os elementos dentro de uma malha tridimensional pré-definida, porém sem valores. Essa malha utiliza apenas de uma unidade pré-estabelecida, logo não aceita entrada de dados reais e, portanto não consegue desempenhar um papel fundamental que é aproximar-se da realidade dos alunos que precisa de uma noção palpável da fórmula algébrica que tem em mãos.

Geogebra

Criada em 2001, a ferramenta Geogebra é um software aberto e que está acessível em um website. Ela reúne ferramentas úteis para o desenvolvimento dos conhecimentos da geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas.

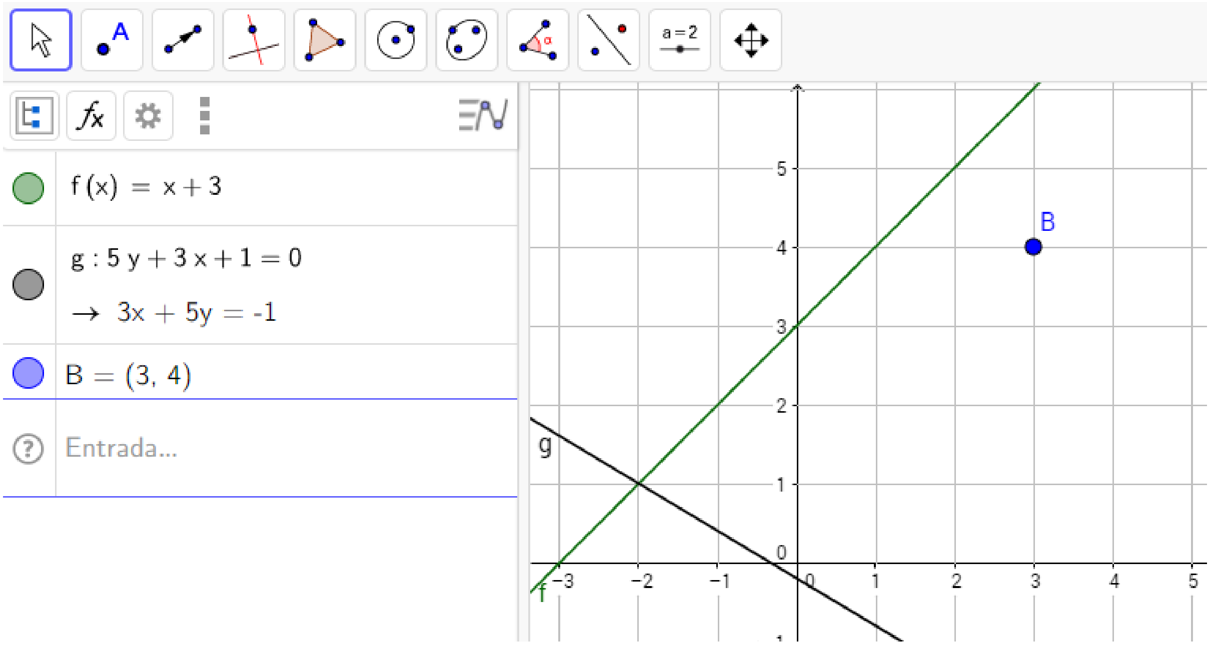


Figura 2.4: Imagem da ferramenta Geogebra

A ferramenta Geogebra possui uma interface visual para interação, mas não se limita a isso, é possível inserir alguns elementos por sua fórmula algébrica. Aceita a criação de retas nas formas cartesianas e geral, mas não da forma paramétrica. A criação de vetores é realizada apenas pela interface. Com esta ferramenta não é possível fazer relações entre os elementos, por exemplo: saber a interseção ou o posicionamento relativo. Também não dá para obter mais detalhes dos elementos desenhados na tela, mas - ainda sim - dá para fazer algumas análises mais superficiais. Em comparação com a GeometricVis, a ferramenta Geogebra possui mais funções e elementos que podem desenhados na tela.

Capítulo 3

A FERRAMENTA GEOMETRICVIS

A ferramenta GeometricVis foi desenvolvida com o objetivo de minimizar a dificuldade dos alunos em compreender os conceitos abstratos de Geometria Analítica e da Álgebra Linear. Essas disciplinas são importantes porque formam a base de disciplinas mais complexas, como computação gráfica, processamento gráfico, processamento linear de imagens, métodos numéricos, processamento de sinais, matemática computacional, etc. Contudo, apesar de básicas seus conceitos são difíceis de serem visualizados.

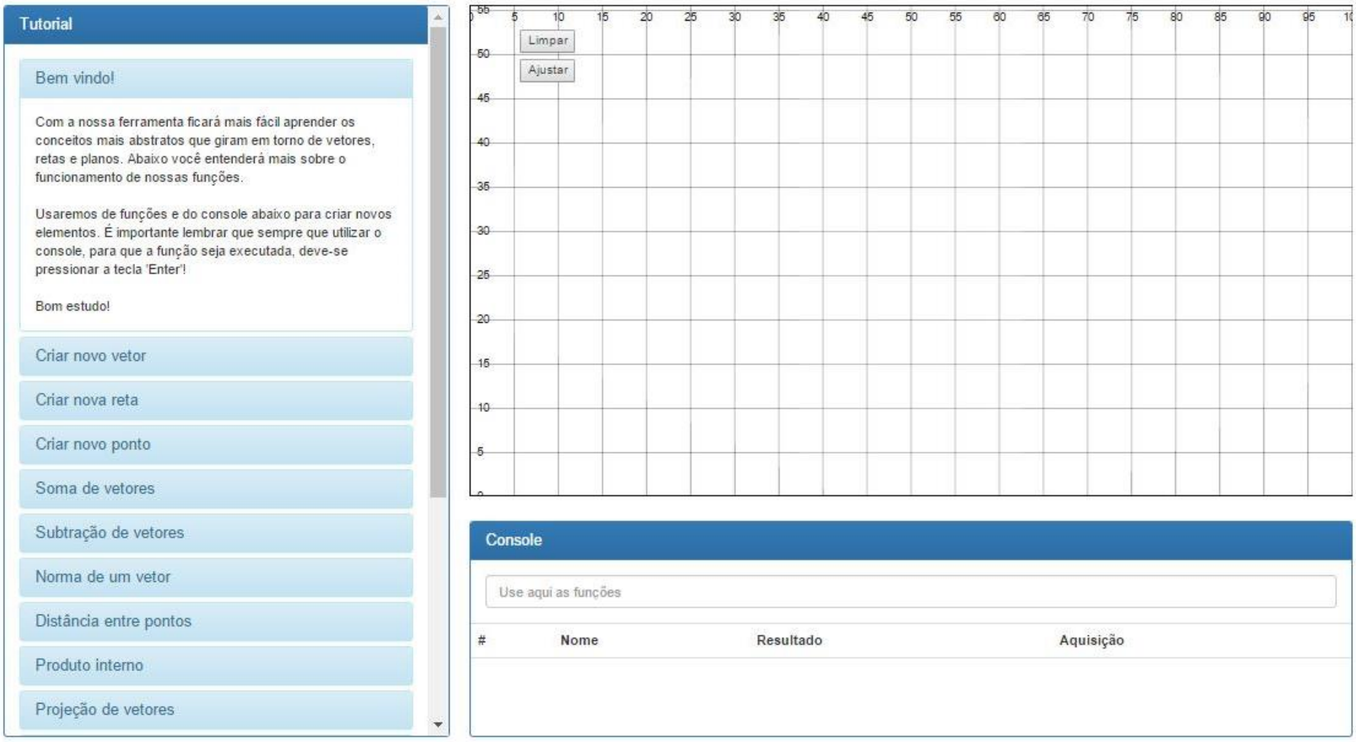


Figura 3.1: Recorte de tela mostrando o conteúdo geral da ferramenta.

A ferramenta foi configurada para ser acessada da forma mais simples possível pelo alunado. Todo o desenvolvimento foi feito utilizando a linguagem de marcação HTML, uma ferramenta que auxilia na construção visual de páginas da Internet chamado de Bootstrap e por fim a linguagem de programação Java Script. Portanto, não é necessário fazer o *download*, nem instalá-la ou qualquer outra ferramenta secundária para o seu pleno funcionamento. Além disso, o GeometricVis pode ser acessado de qualquer lugar, necessitando apenas da conexão Web.

A primeira vista da ferramenta podemos ver na lateral esquerda um painel de tutorial para a criação dos elementos matemáticos, na malha quadrática temos o local onde serão vistos esses elementos criados e na sessão console temos uma caixa de texto por onde a inserção dos elementos é realizada e abaixo ficam detalhes dos elementos que foram inseridos.

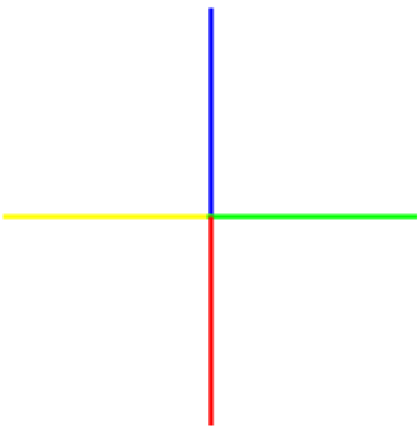
Funcionamento

Ao inserirmos uma expressão válida de um elemento no console ele será automaticamente criado na malha quadrática. A ferramenta foi construída para representar o espaço vetorial de duas dimensões (|R²).

Coordenadas de |R²

As coordenadas de |R são expressas da seguinte forma:

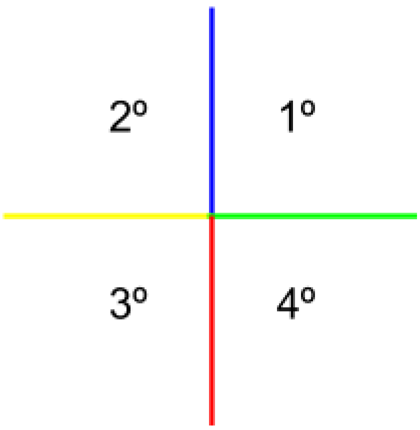
Figura 3.2: Eixos coordenados de |R².



- a semi-reta positiva de X fica à direita da origem e vai de 0 ao infinito positivo (representada em verde na figura 3.2);
- a semi-reta negativa de X fica à esquerda da origem e vai do infinito negativo à zero(representada em amarelo na figura 3.2);
- a semi-reta positiva de Y fica acima da origem e vai de 0 ao infinito positivo(representada em azul na figura 3.2);
- a semi-reta negativa de Y fica abaixo da origem e vai de 0 ao infinito positivo(representada em vermelho na figura 3.2).

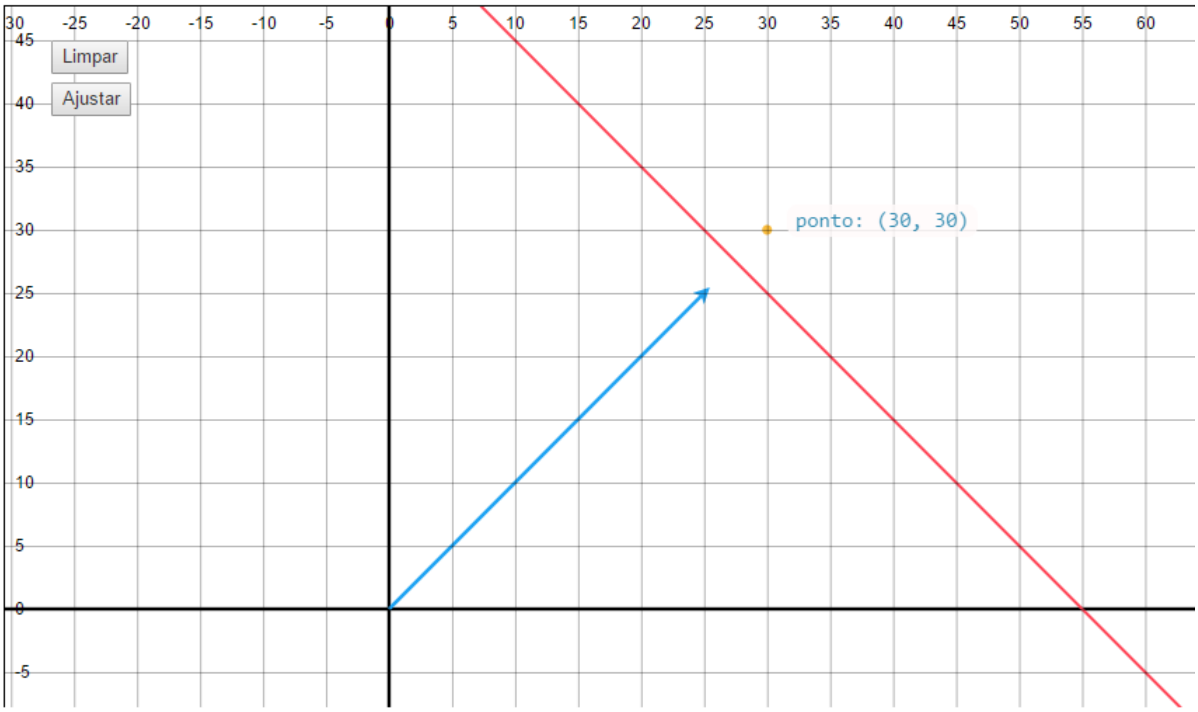
Quadrantes

Figura 3.3: Quadrantes dos eixos coordenados.



A ferramenta foca inicialmente no quadrante de número 1, indicado na figura 3.3, que é o quadrante que possui valores de x e y positivos (+x,+y). Caso queira ver os outros quadrantes é possível ir na malha e arrastar. O quadrante de número 2, possui valores de x negativos e y positivos (-x,+y). Já o quadrante de número 3, possui valores de x e y negativos (-x,-y). Enquanto o quadrante de número 4 possui valores de x positivos e y negativos (+x,-y).

Figura 3.4: Exemplo dos elementos na malha quadrática.



Neste caso podemos ver 3 elementos diferentes na malha quadrática (ou no plano): um ponto (amarelo), uma reta (vermelha) e um vetor (azul). Ao passar o ponteiro (seta) do mouse em cada elemento é possível suas propriedades. Dentro da malha é possível dar zoom e arrastar para ver algum elemento que tenha sido criado e eventualmente não esteja visível. Além dos elementos no plano, ainda é possível ver dois botões: ajustar e limpar.

Botão Limpar

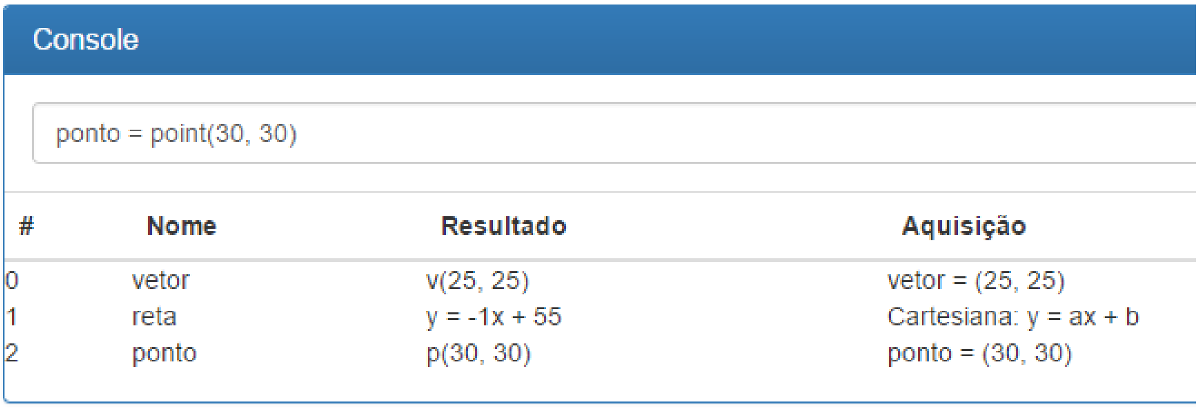
Este recurso faz com que os elementos da malha e do console sejam removidos, ou seja, fiquem limpos para que possamos recomeçar a utilizar a partir do estado inicial.

Botão Ajustar

Como conseguimos arrastar e aproximar no plano, este recurso faz com que o aluno possa ver apenas o primeiro quadrante do espaço vetorial em um tamanho já predefinido.

Console

Figura 3.5: Exemplo dos elementos da figura 3.4 inseridos no console.



Na primeira coluna temos a ordem de inserção dos elementos na memória. Por exemplo, uma das formas de criar uma reta (equação paramétrica) é utilizar um vetor e um ponto e para isso será necessário a identificação de cada elemento. É possível consultar esse valor na segunda coluna da memória (ou tabela) do console. Na coluna resultados pode-se ver a forma matemática de escrever o elemento e na quarta, e última coluna, a forma de aquisição do elemento.

Caso o mesmo nome de um elemento seja utilizado, este é sobrescrito.

Bem Vindo

A primeira sessão do tutorial é uma breve introdução à ferramenta, explicando seu o objetivo e como a ferramenta deve ser utilizada. Ao ler nas sessões do tutorial como devem ser inseridos os elementos na tela deve-se ir até o Console, inserir a expressão algébrica e após isso pressionar a tecla 'Enter' do teclado.

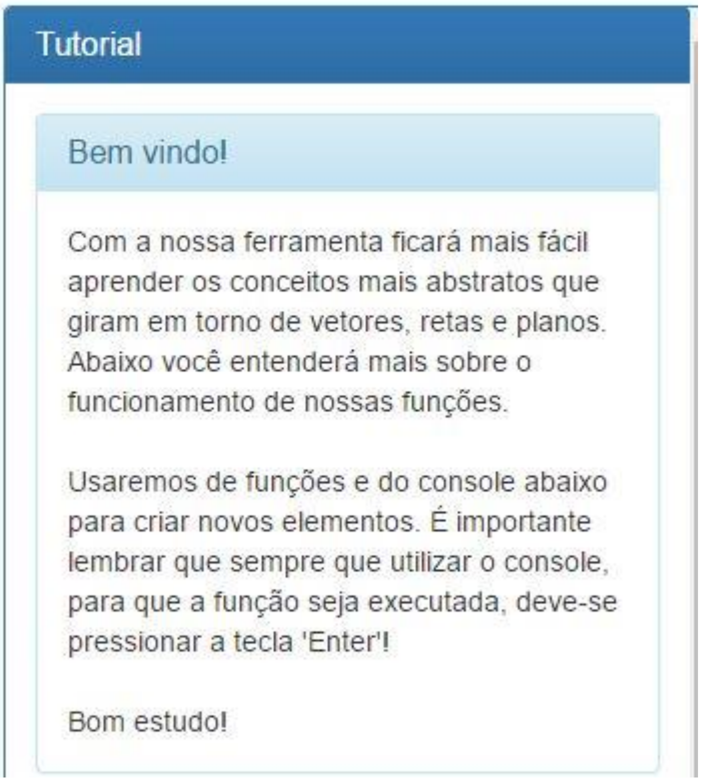
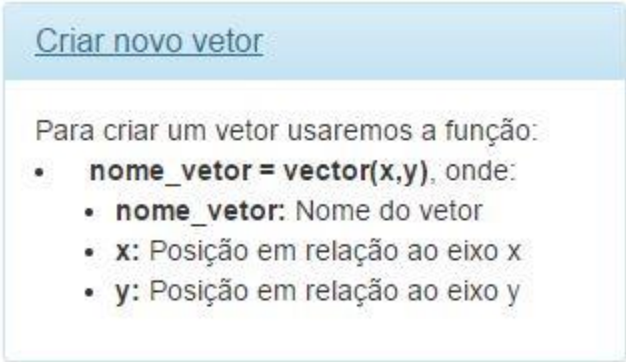


Figura 3.6: Primeiro item do tutorial da ferramenta.

Criar novo vetor

Figura 3.7: Segundo item do tutorial da ferramenta GeometricVis de como criar um novo vetor.



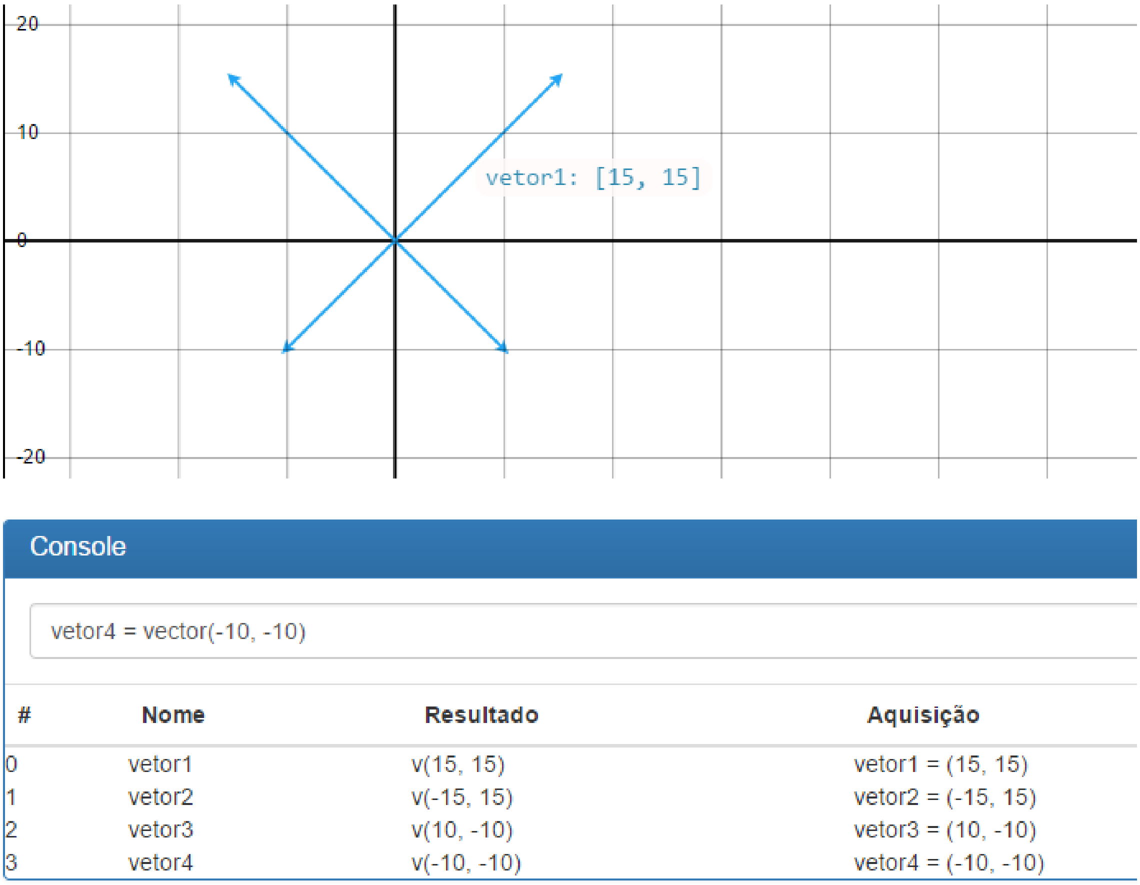
Segmento de reta orientado, representado por uma seta, que possui três características que o definem: intensidade (ou módulo, ou norma), direção e sentido (ou orientação)
A definição do módulo de um vetor é a medida do comprimento deste vetor, que pode ser calculado através da distância do seu ponto final até a origem. A direção de um vetor é definida pela reta suporte do segmento orientado que o representa, logo para descobrir a direção de um vetor, basta saber a direção de sua reta suporte. O sentido de um vetor é definido pela seta presente em uma de suas extremidades.

Todo vetor é representado por um único par ordenado, pois assume-se que os dois pontos dos quais o vetor é extraído são a origem (ponto (0, 0)) e o próprio ponto correspondente ao par ordenado.

Como a ferramenta representa um plano, são necessários apenas dois parâmetros para realizar a criação do vetor que irão representar os valores nas coordenadas x e y, respectivamente.

Exemplo:

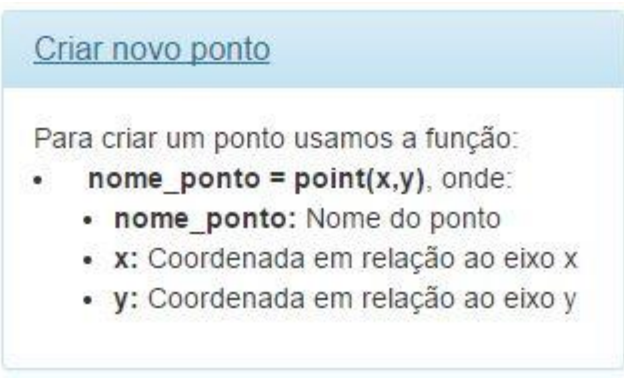
Figura 3.8: Representação gráfica de um novo vetor na malha e sua representação no console.



#	Nome	Resultado	Aquisição
0	vetor1	v(15, 15)	vetor1 = (15, 15)
1	vetor2	v(-15, 15)	vetor2 = (-15, 15)
2	vetor3	v(10, -10)	vetor3 = (10, -10)
3	vetor4	v(-10, -10)	vetor4 = (-10, -10)

Criar novo ponto

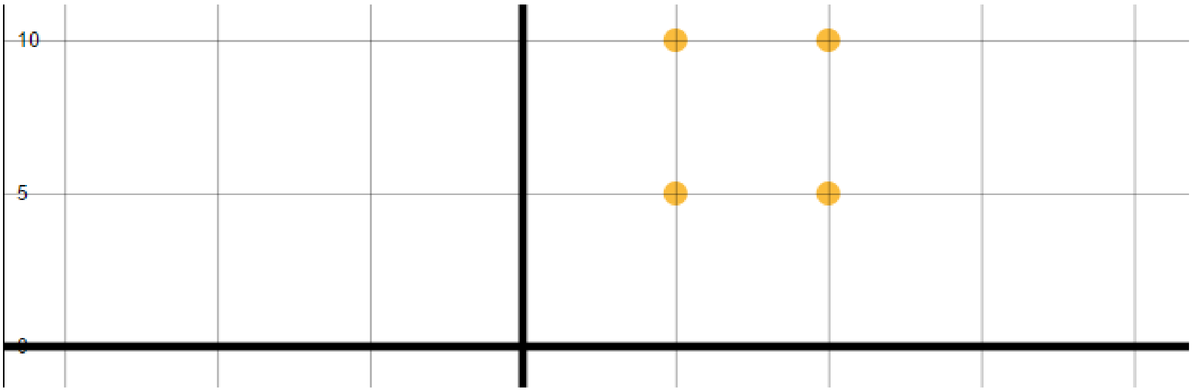
Figura 3.9: Tutorial da ferramenta GeometricVis de como criar um novo ponto.



O ponto será representado por esta ferramenta através de uma circunferência amarela. O ponto tem como características ser adimensional e não ocupar lugar no espaço[9]. É um elemento comumente utilizado para ajudar na imaginação de outros elementos, como a reta e o plano.

Abaixo está a criação de 4 pontos na malha, os quais os valores de x e y demonstrados na figura 3.9 acima recebem valores de números reais. O primeiro ponto criado foi determinado o valor de X igual à 10 e o valor de Y igual à 5 e sendo escrito no console segundo especificado acima ficamos com a expressão: p1 = point(10, 5), onde p1 é o nome dado ao ponto.

Figura 3.10: Representação gráfica de quatro pontos na malha e no console conforme a exemplificação da criação no tutorial da imagem 9.



Console

p4 = point(5, 5)

#	Nome	Resultado	Aquisição
0	p1	p(10, 5)	p1 = (10, 5)
1	p2	p(5, 10)	p2 = (5, 10)
2	p3	p(10, 10)	p3 = (10, 10)
3	p4	p(5, 5)	p4 = (5, 5)

Criar nova reta

Figura 3.11: Tutorial da ferramenta na criação de retas.

Reta é uma primitiva geométrica associada à localização e formada por infinitos pontos numa mesma direção.

Forma geral no |R²:

Toda reta r do plano cartesiano pode ser expressa por uma equação do tipo: *ax* + *by* + *c* = *0.* Onde a, b e c são são números reais, porém *a* e *b* não podem ser nulos simultaneamente, já que a reta deve ter valores em x e y.

Criar nova reta

Poderemos nos utilizar de 3 formas para criar uma reta:

- **geral = line(A,B,C)**, onde:
  - **geral:** Nome da reta
  - **A:** Coeficiente em x
  - **B:** Coeficiente em y
  - **C:** Variável independente de x ou y
- **cartesiana = line(m,b)**, onde:
  - **cartesiana:** Nome da reta
  - **m:** Coeficiente em x
  - **b:** Coeficiente linear ou variável independente
- **parametrica = line(p,v)**, onde:
  - **parametrica:** Nome da reta
  - **p:** Ponto já existente na memória
  - **v:** Vetor já existente na memória

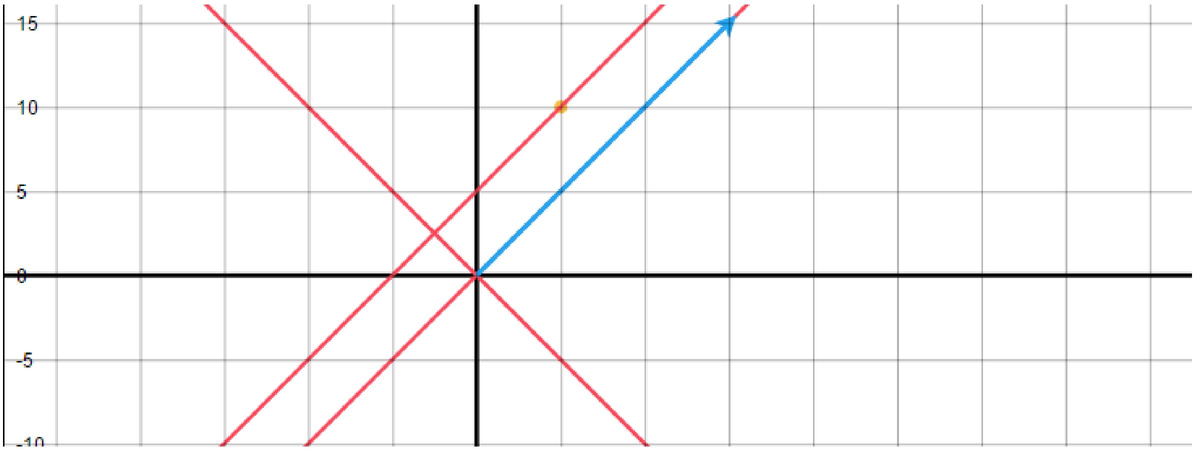
Forma cartesiana no |R²:

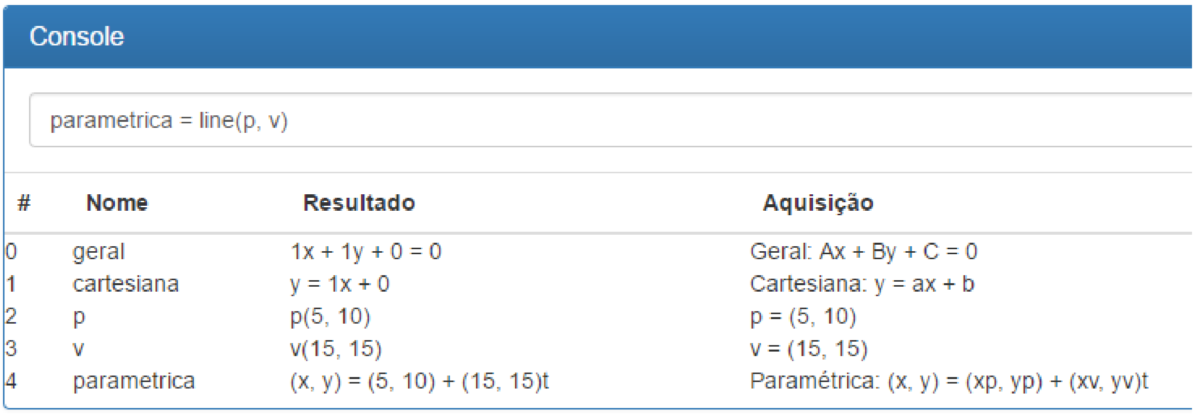
Também chamada de equação reduzida da reta, a forma cartesiana se apresenta na forma *y* = *mx* + *b*, onde m é o coeficiente angular da reta e b é o ponto em que a reta cruza com o eixo y, e sendo assim, é também valor independe de x. Quando o valor de m é zero, a reta desenhada é paralela ao eixo X e quando a reta é paralela ao eixo Y, não existe equação na forma reduzida que a represente.

Forma paramétrica no |R²:

Também conhecida como forma segmentária da reta, para definir esta reta é necessário um ponto e um vetor. Na forma paramétrica a reta é paralela a um vetor v e necessariamente passa por um ponto específico.

Figura 3.12: Representação gráfica de retas em suas 3 formas possíveis e também a criação dos elementos, outros, necessários para a criação de uma delas(um vetor e um ponto).





Console

parametrica = line(p, v)

#	Nome	Resultado	Aquisição
0	geral	1x + 1y + 0 = 0	Geral: Ax + By + C = 0
1	cartesiana	y = 1x + 0	Cartesiana: y = ax + b
2	p	p(5, 10)	p = (5, 10)
3	v	v(15, 15)	v = (15, 15)
4	parametrica	(x, y) = (5, 10) + (15, 15)t	Paramétrica: (x, y) = (xp, yp) + (xv, yv)t

Soma de Vetores

Quando estamos representando uma soma de vetores graficamente é comum utilizarmos a regra do polígono para realizá-la, porém para calcular essa soma podemos apenas fazer a soma das coordenadas em x, e em y, obtendo assim a soma de dois vetores.
Na Figura 3.14 podem ser visto os vetores v1, v2 e o vetor de soma entre eles, denominado sumVs.

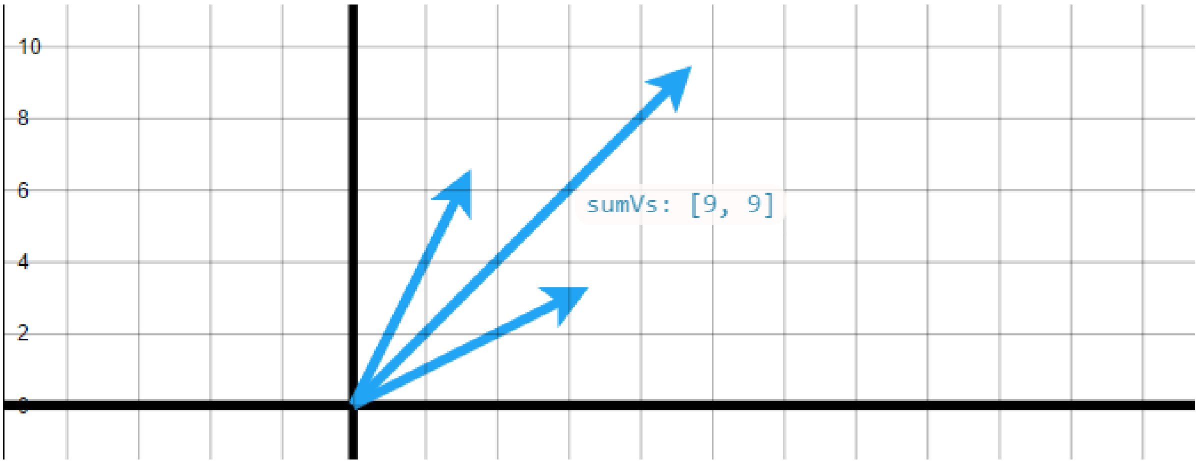
Figura 3.13: Tutorial da ferramenta na criação de um novo vetor a partir da soma de outros dois vetores

Soma de vetores

Entre as operações com vetores que estão implementadas temos a soma que retorna o resultado da soma entre dois vetores:

- **variavel_resultado = sum(x,y)**, onde:
  - **variavel_resultado:** Nome do vetor resultante
  - **x:** Vetor que esteja na memória
  - **y:** Vetor que esteja na memória

Figura 3.14: Representação gráfica do vetor da soma e dos vetores que deram origem a este.



Console

sumVs = sum(v1,v2)

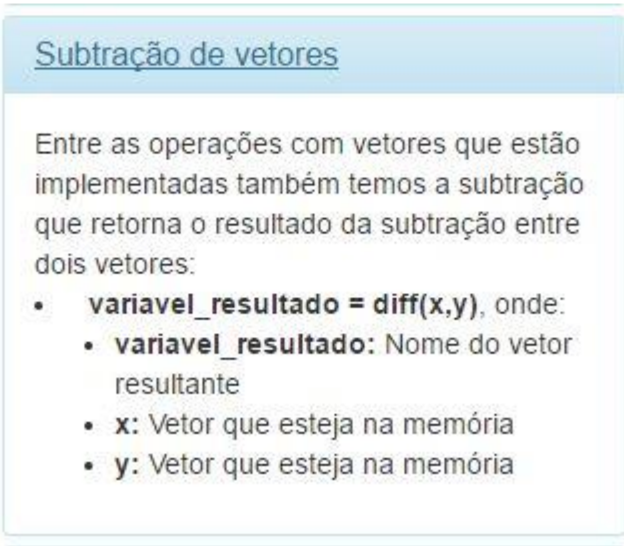
#	Nome	Resultado	Aquisição
0	v1	v(6, 3)	v1 = (6, 3)
1	v2	v(3, 6)	v2 = (3, 6)
2	sumVs	(9, 9) = (6 + 3, 3 + 6)	sumVs = (x_v1 + x_v2, y_v1 + y_v2

Subtração de Vetores

A subtração de vetores se assemelha bastante com a soma, porém, A – B, é igual à soma do vetor A com um vetor de mesmo módulo, mesma direção, mas de sentido oposto ao do vetor B, simbolizada pela inversão do valor de B.

Na Figura 3.16 podem ser visto os vetores v1, v2 e o vetor de diferença entre eles, denominado diffVs que tem o valor (3, -3).

Figura 3.15: Tutorial da ferramenta quanto a criação de um vetor resultante da operação de subtração de vetores



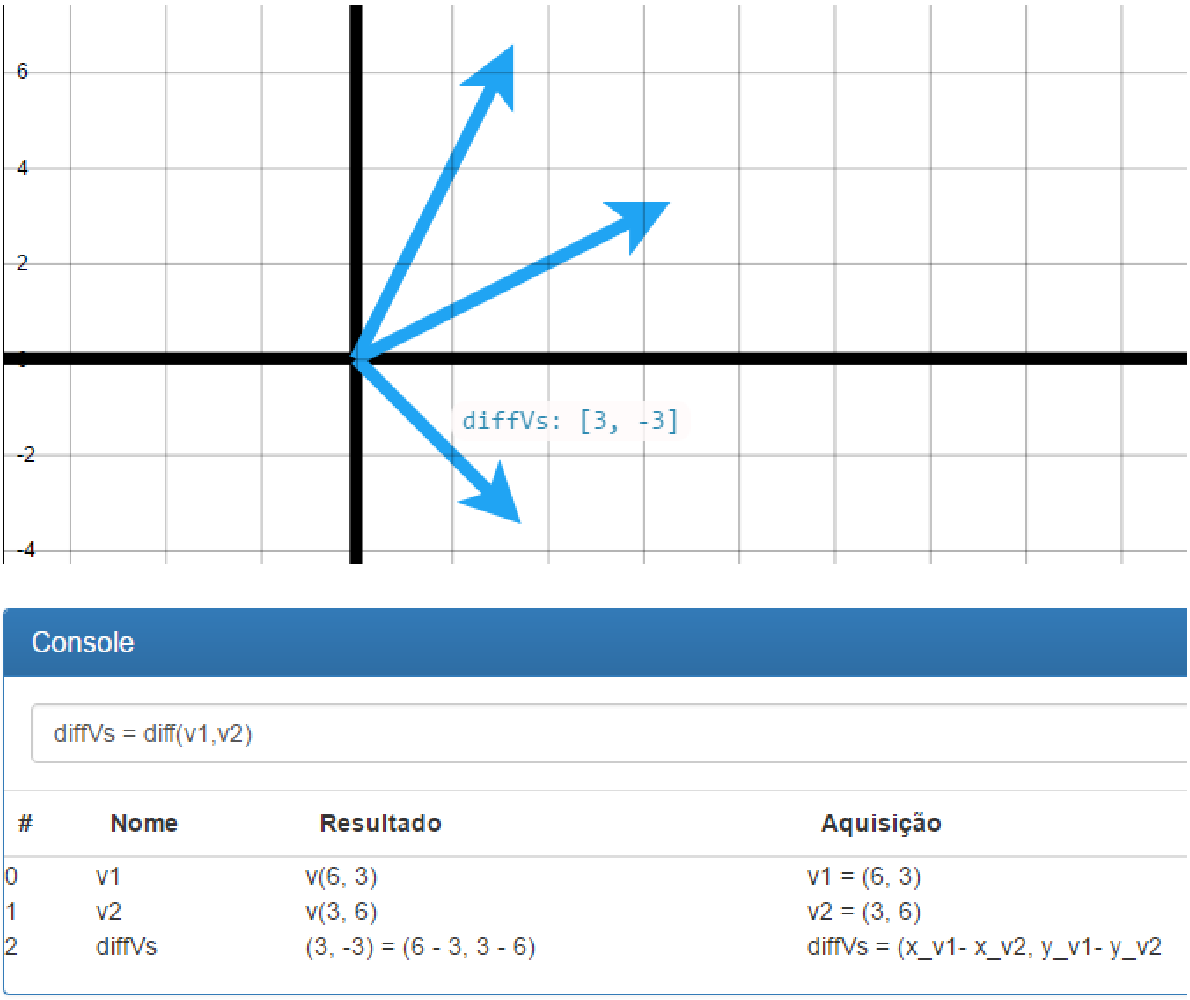
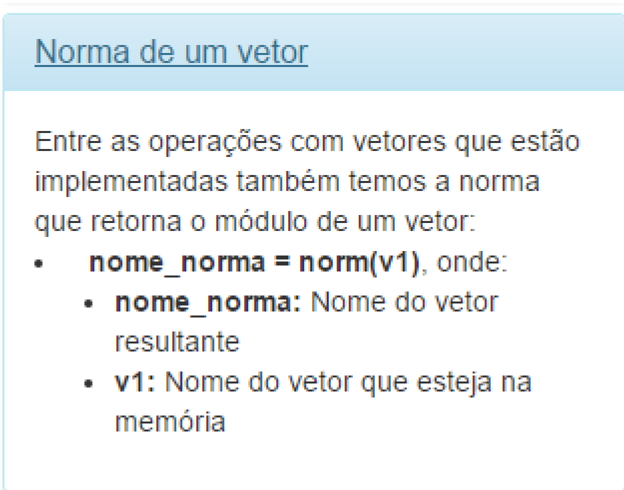


Figura 3.16: Representação gráfica do vetor da subtração e dos vetores que deram origem a este.

Norma de um Vetor

Como já foi explicado anteriormente no conceito de vetor, a norma ou módulo ou intensidade de um vetor pode ser calculado através do comprimento desse vetor, é a distância de seu ponto final até a origem. Por se tratar de um comprimento, seu valor deve ser sempre positivo.
Esse valor é calculado através da raiz quadrada da soma dos quadrados.

Figura 3.17:Tutorial da ferramenta explicando como obter a norma de vetor.



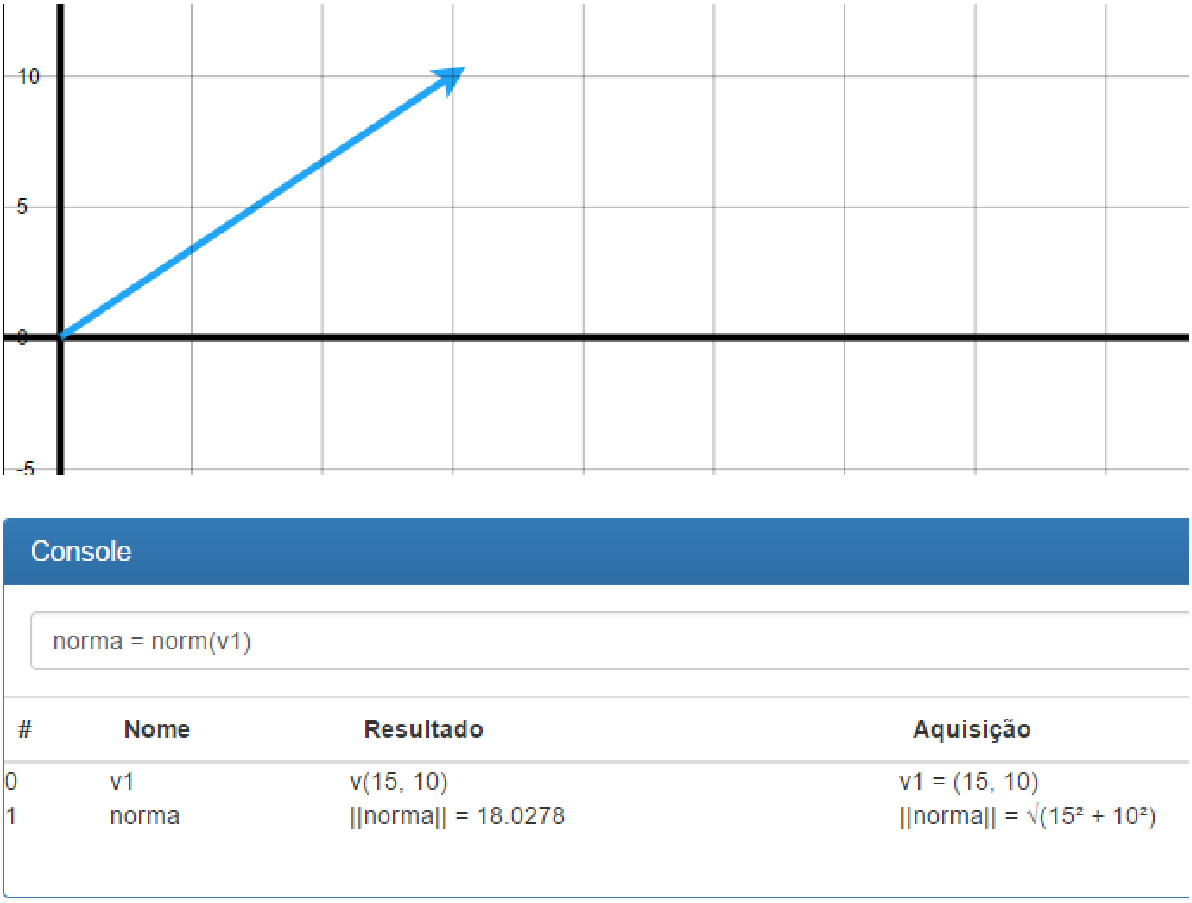
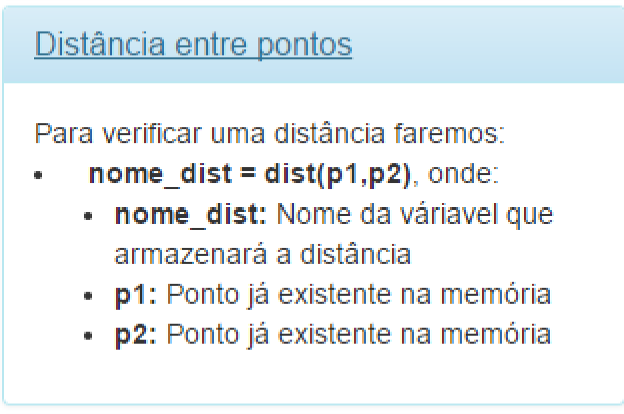


Figura 3.18: Representação de um vetor e no console é possível ver detalhes do cálculo da norma.

Distância entre pontos

A distância entre dois pontos é dada pelo menor comprimento entre os pontos, ou seja, é a medida do segmento de reta que os liga.
Essa medida em geometria analítica é calculada pela da hipotenusa de um triângulo retângulo, ou seja, pela raiz quadrada da soma dos quadrados da diferença.

Figura 3.19: Tutorial da ferramenta quanto ao cálculo da distância entre pontos.



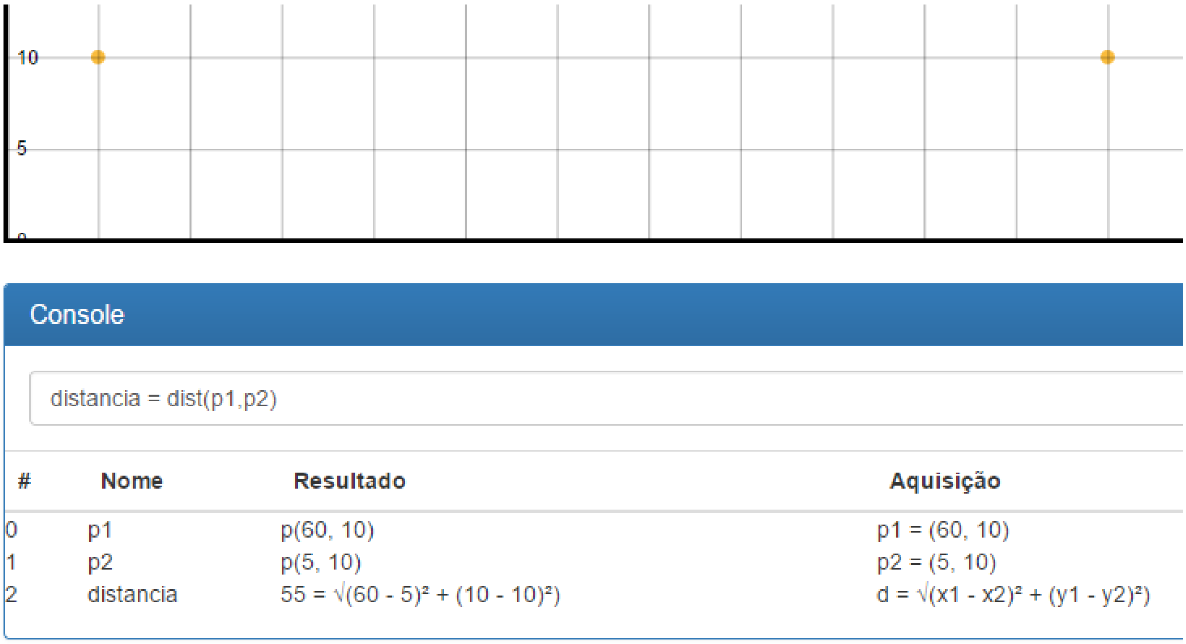
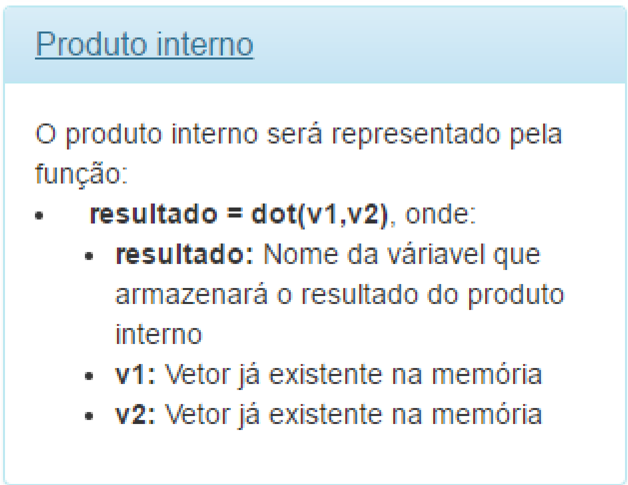


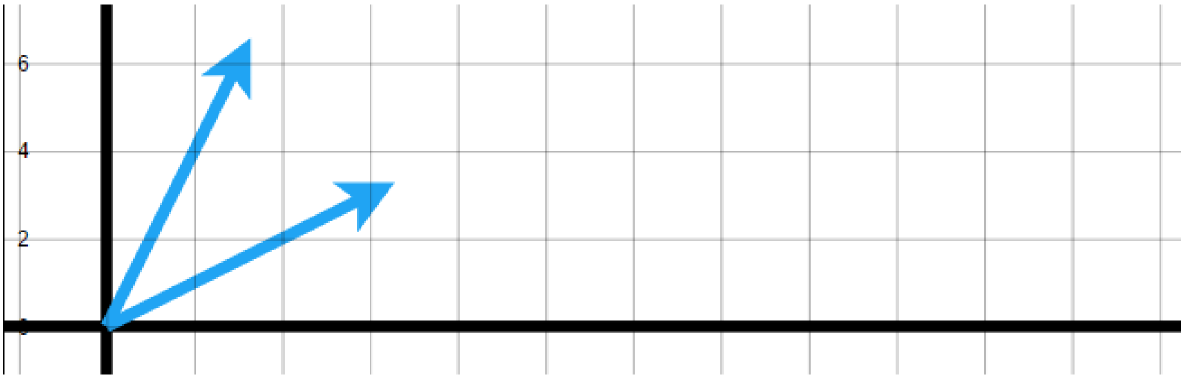
Figura 3.20: Representação gráfica dos pontos os quais a distância é calculada.

Produto Interno

O produto interno entre dois vetores é um número real que relaciona a norma desses vetores, isto é, seu comprimento, e o ângulo entre eles. Esta propriedade é calculada através da soma da multiplicação das coordenadas correspondentes.

Figura 3.21: Tutorial da ferramenta para o cálculo do produto interno.





Console

prodInt = dot(v1,v2)

#	Nome	Resultado	Aquisição
0	v1	v(6, 3)	v1 = (6, 3)
1	v2	v(3, 6)	v2 = (3, 6)
2	prodInt	36 = (6*3) + (3*6)	<(x1, y1),(x2, y2)> = (x1 * x2) + (y1 * y2)

Figura 3.22: Representação gráfica dos vetores os quais o produto interno é calculado.

Projeção de Vetores

A projeção de vetores nada mais é do que a projeção de um vetor sobre outro, como se o primeiro deles estivesse projetando sua sombra sobre o outro, o resultado desta operação é um vetor.
A projeção de vetores é calculada segundo a fórmula descrita na coluna de aquisição do exemplo abaixo:

Figura 3.23: Tutorial da ferramenta quanto a criação de um novo vetor que é criado a partir da projeção de dois outros.

Projeção de vetores

Para encontrar o vetor projeção de um vetor sobre outro, utilizamos a seguinte função:

- **nome_proj = proj(v1,v2)**, onde:
  - **nome_proj:** Nome do vetor projeção
  - **v1:** Vetor já existente na memória
  - **v2:** Vetor já existente na memória

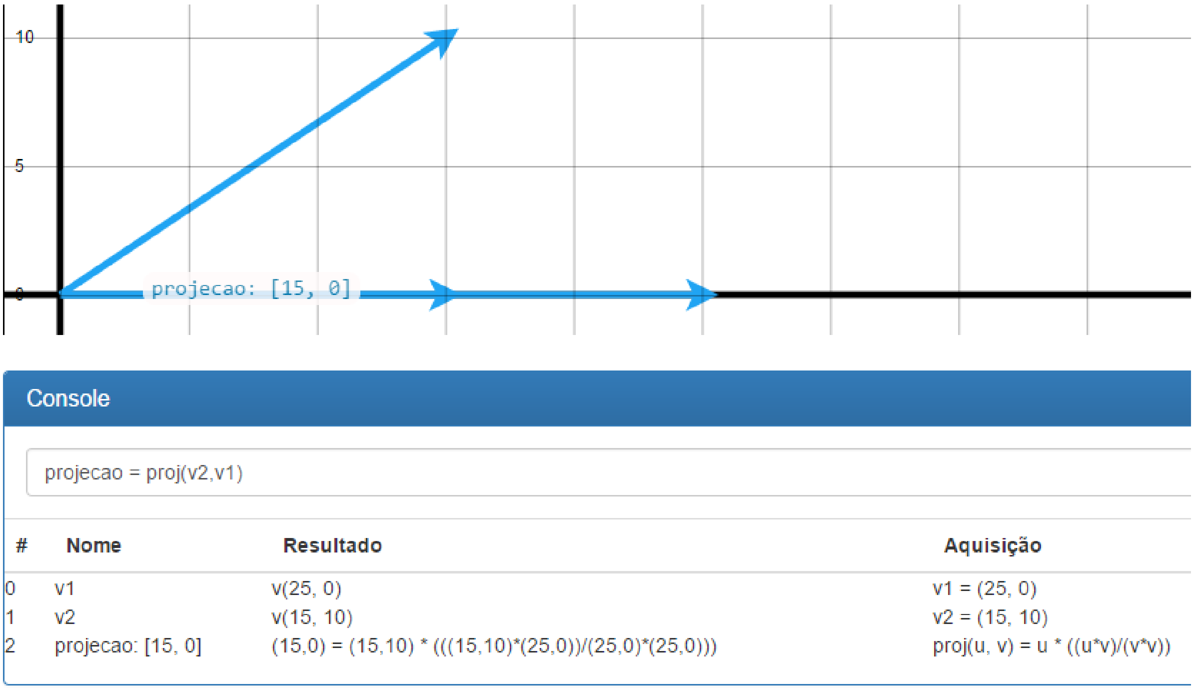


Figura 3.24: Representação gráfica do vetor da projeção e dos vetores os quais este é calculado.

Cosseno entre vetores

O cosseno entre vetores é utilizado para calcular o produto interno entre dois vetores, pois ele também é definido por meio do ângulo entre eles.

O cosseno entre vetores pode ser calculado segundo a fórmula de descrita no exemplo abaixo na coluna de aquisição:

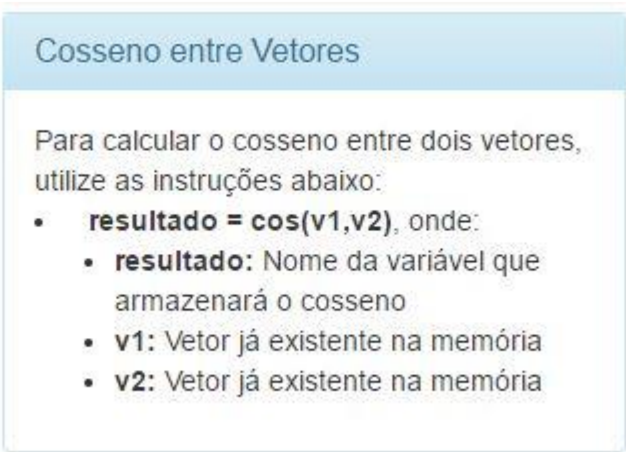


Figura 3.25: Tutorial da ferramenta quanto ao cálculo do cosseno entre vetores.

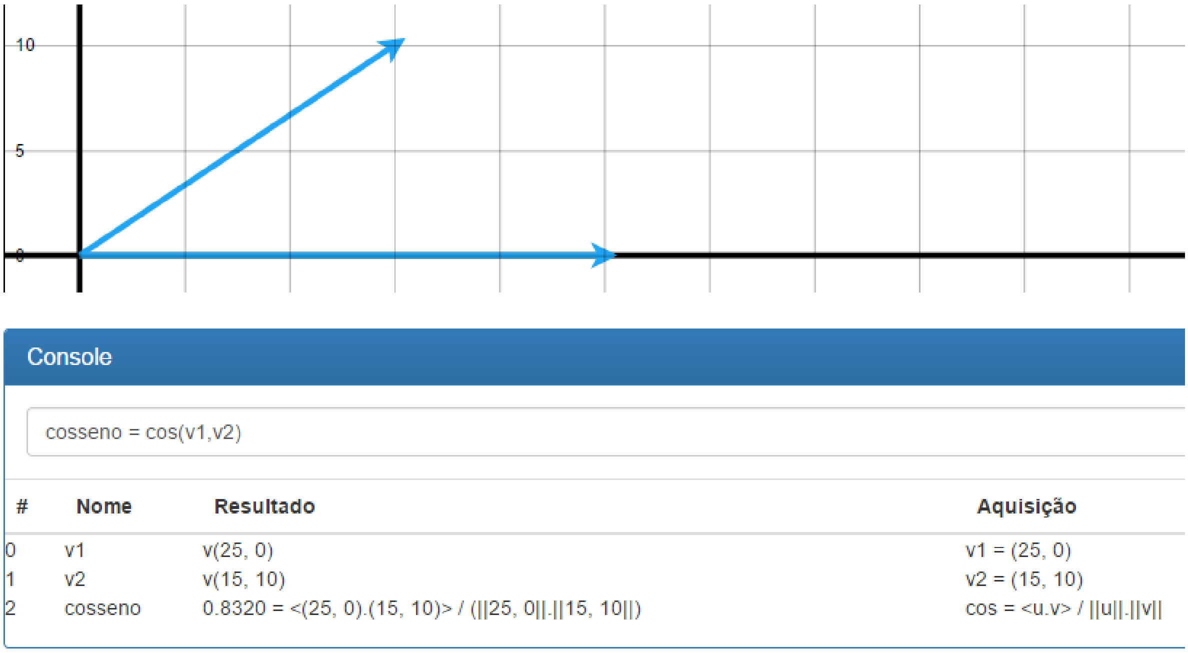
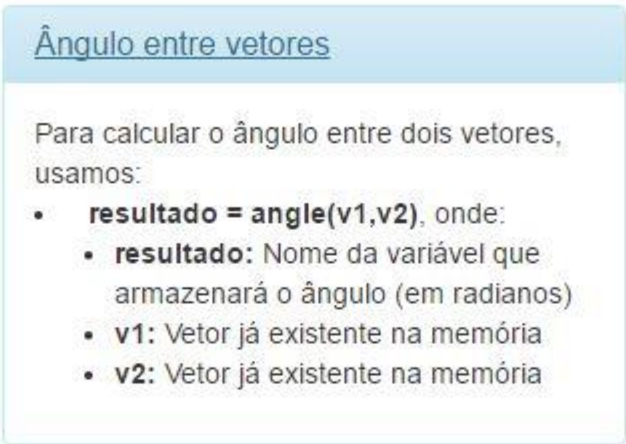


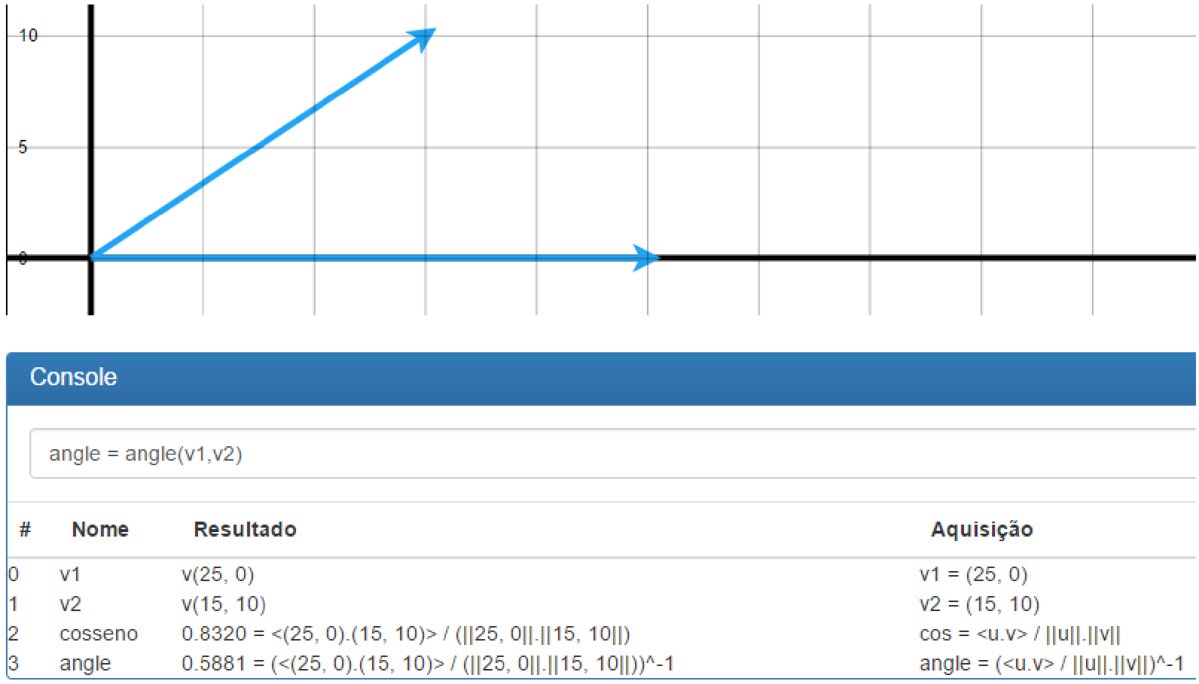
Figura 3.26: Representação gráfica dos vetores originários do resultado do cálculo do cosseno entre eles.

Ângulo entre vetores

O cálculo do ângulo entre vetores, nada mais é do que o inverso do cálculo do cosseno, facilitando assim alguns cálculos necessários.

Figura 3.27: Tutorial da ferramenta quanto ao cálculo do ângulo entre vetores.





#	Nome	Resultado	Aquisição
0	v1	v(25, 0)	v1 = (25, 0)
1	v2	v(15, 10)	v2 = (15, 10)
2	cosseno	0.8320 = <(25, 0).(15, 10)> / (||25, 0||.||15, 10||)	cos = <u.v> / ||u||.||v||
3	angle	0.5881 = (<(25, 0).(15, 10)> / (||25, 0||.||15, 10||))^-1	angle = (<u.v> / ||u||.||v||)^-1

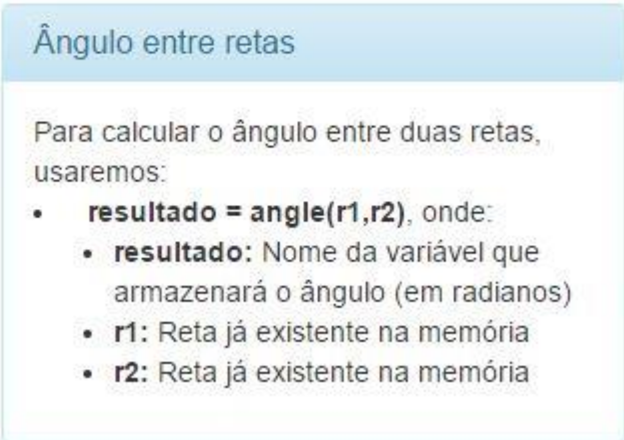
Figura 3.28: Representação gráfica dos vetores originários do resultado do cálculo do ângulo entre eles.

Ângulo entre retas

O cálculo do ângulo entre as retas se dá através dos coeficientes angulares, ou seja, do fator que multiplica a variável x na forma reduzida da reta(y = mx + b).

O ângulo entre retas pode ser calculado segundo a fórmula de descrita no exemplo abaixo na coluna de aquisição:

Figura 3.29: Tutorial da ferramenta quanto ao cálculo do ângulo entre retas.



Console

anguloRetas = angle(r1,r2)

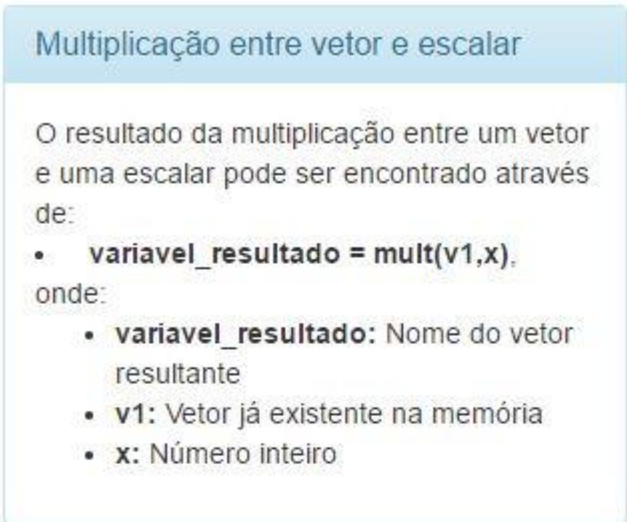
#	Nome	Resultado	Aquisição
0	r1	y = 1x + 0	Cartesiana: y = ax + b
1	r2	0x + 1y + 0 = 0	Geral: Ax + By + C = 0
2	anguloRetas	0.7853981633974483 = |(1 - 0)/[1 +(1*0)]|	angle = |((m1-m2) / (1+(m1*m2)))|

Figura 3.30: Representação gráfica das retas originárias do resultado do cálculo do ângulo entre elas.

Multiplicação entre vetor e escalar

A multiplicação entre um vetor e um escalar apenas altera o módulo deste vetor, ou seja, seu comprimento.

Figura 3.31: Tutorial da ferramenta quanto a criação de um novo vetor a partir da multiplicação de um vetor e de um número.



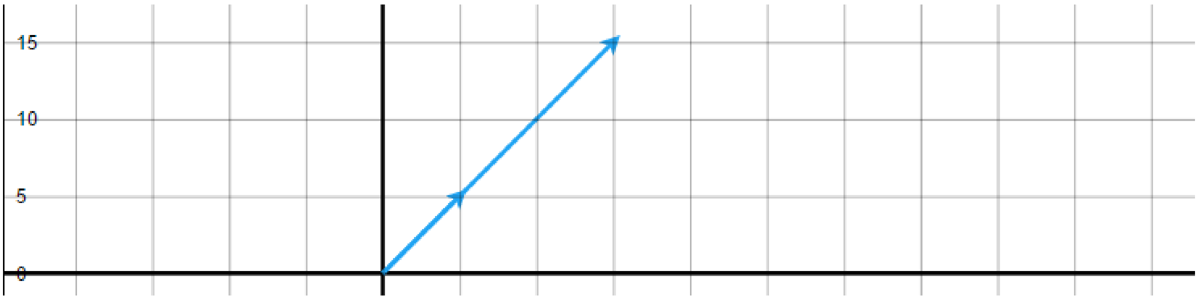
Multiplicação entre vetor e escalar

O resultado da multiplicação entre um vetor e uma escalar pode ser encontrado através de:

- **variavel_resultado = mult(v1,x)**,

onde:

- **variavel_resultado:** Nome do vetor resultante
- **v1:** Vetor já existente na memória
- **x:** Número inteiro



Console

mult = mult(v, 3)

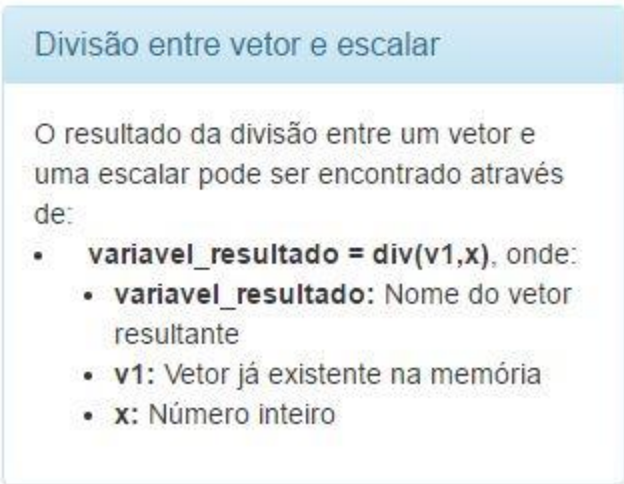
#	Nome	Resultado	Aquisição
0	v	v(5, 5)	v = (5, 5)
1	mult	(15, 15 = (5*3, 5*3)	mult = (x, y)*n

Figura 3.32: Representação gráfica do vetor a ser multiplicado pelo fator e seu resultante.

Divisão entre vetor e escalar

Figura 3.33: Tutorial da ferramenta quanto a criação de um novo vetor a partir da divisão de um vetor e de um número.

Essa operação faz o oposto da operação acima, ou seja, uma divisão, ou faz a mesma operação, porém com o inverso da operação de multiplicação. Um exemplo é a divisão por 2 que ficaria uma multiplicação por ½.



Divisão entre vetor e escalar

O resultado da divisão entre um vetor e uma escalar pode ser encontrado através de:

- **variavel_resultado = div(v1,x)**, onde:
  - **variavel_resultado:** Nome do vetor resultante
  - **v1:** Vetor já existente na memória
  - **x:** Número inteiro

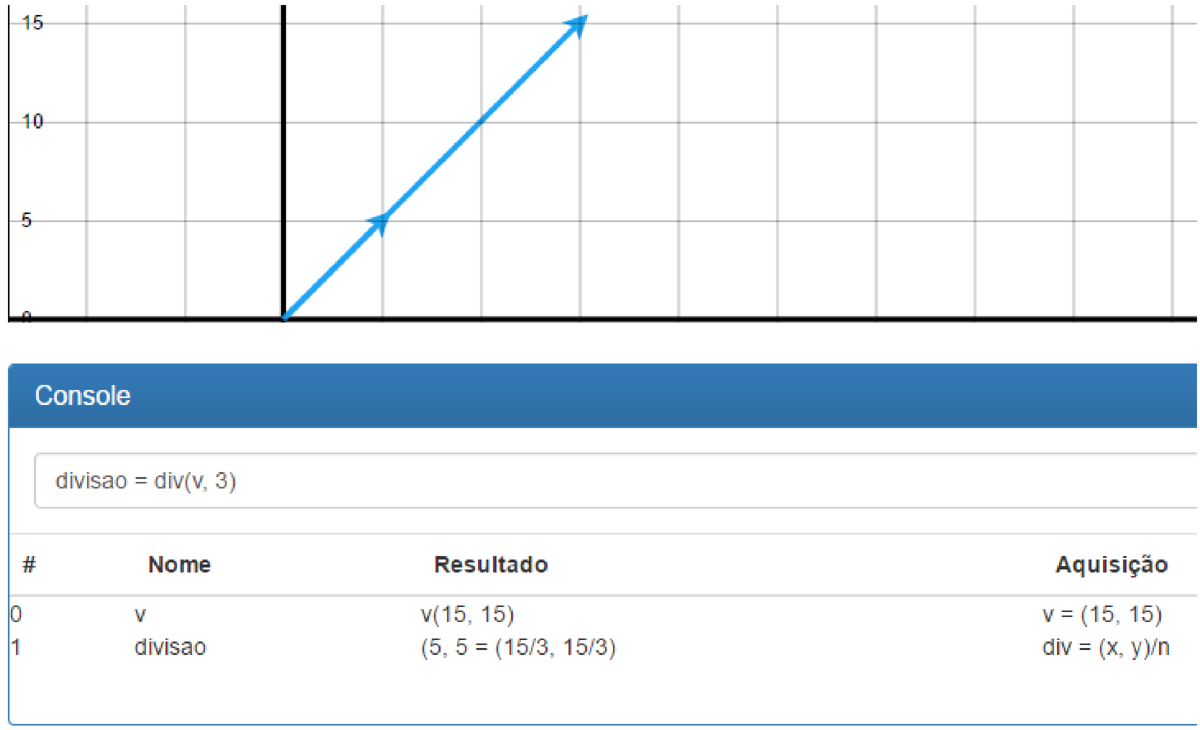
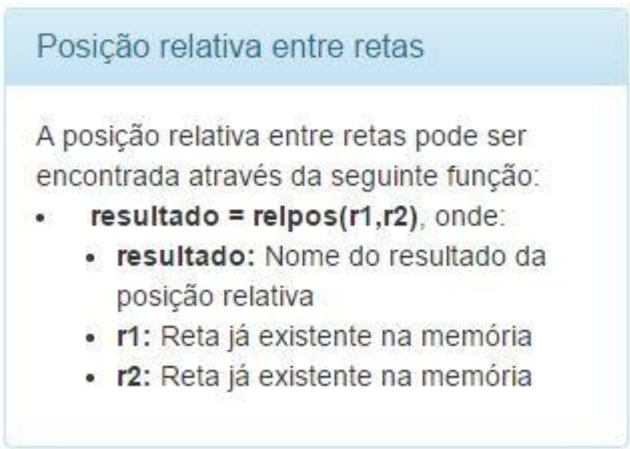


Figura 3.34: Representação gráfica do vetor a ser dividido pelo número dado e seu resultante.

Posição relativa entre retas

Figura 3.35: Tutorial da ferramenta quanto à análise das posições relativas entre retas.



É comum querer saber o comportamento das retas em relação a outros elementos, e é pra isso que essa função serve, para confirmar o posicionamento relativo entre retas.

Paralela

Duas retas são paralelas se pertencem ao mesmo plano, ou seja, são coplanares e não possuem nenhum ponto de intersecção, ou seja, não existe nenhum ponto em comum uma com a outra.

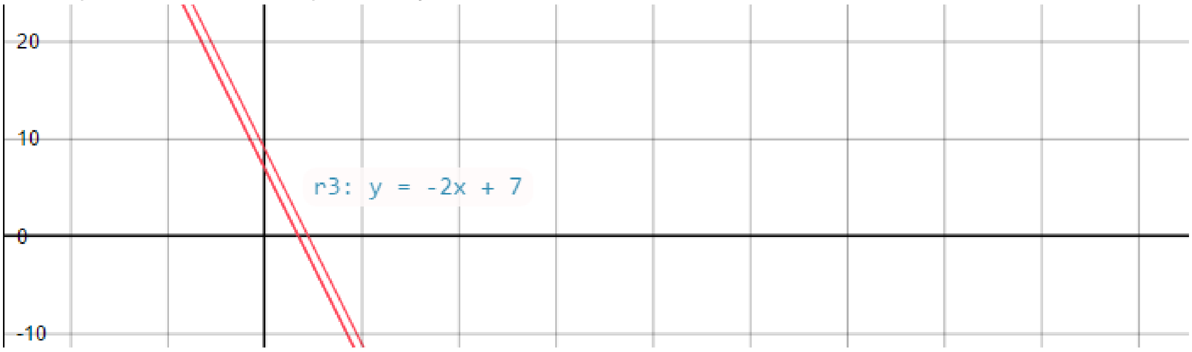
Notar que as equações são múltiplas umas das outras, essa é uma característica das retas paralelas.

Obs.: Pelo fato de estarmos tratando do espaço vetorial de dimensão 2, todas as retas criadas estão no mesmo plano Oxy.

Paralela Coincidentes

Retas paralelas coincidentes são retas idênticas. Ou seja, caso as retas estejam descrita de formas diferentes: uma na forma reduzida ou cartesiana e outra na forma normal, pode ser que semelhança não seja evidente, porém elas sejam a mesma equação escrita em outro formato, mas em sua essência possuem todos os pontos em comum.

Figura 3.36: Representação gráfica de três retas paralelas a serem analisadas quanto a sua posição relativa pela ferramenta e apresentação no console do resultado desta análise.



Console

r2&r3 = relpos(r2, r3)

#	Nome	Resultado	Aquisição
0	r1	-10x + -5y + 45 = 0	Geral: Ax + By + C = 0
1	r2	2x + 1y + -7 = 0	Geral: Ax + By + C = 0
2	r3	y = -2x + 7	Cartesiana: y = ax + b
3	r1&r2	Paralelas	m: -2 = -2 / b: 9 = 7
4	r2&r3	Paralelas coincidentes	m: -2 = -2 / b: 7 = 7

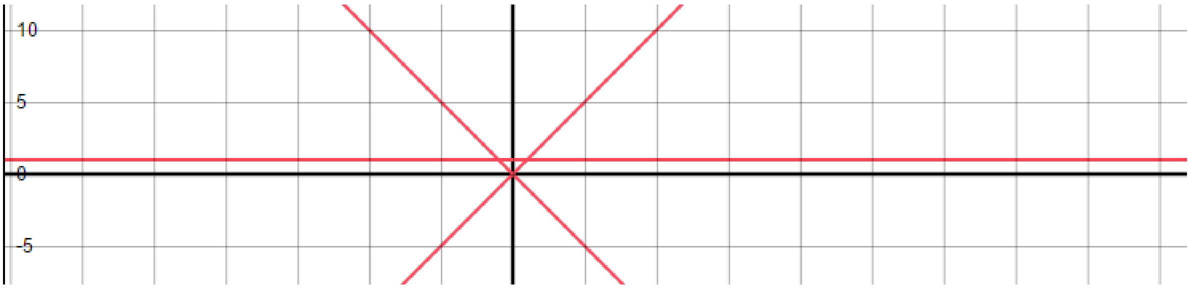
Concorrentes

Duas retas são concorrentes quando elas se cruzam em algum ponto, ou seja, possuem um ponto em comum com a outra.

Concorrentes Ortogonais

Retas concorrentes ortogonais são um tipo específico de retas concorrentes e acontecem quando o ângulo que uma forma com a outra é um ângulo de 90 graus.

Figura 3.37: Representação gráfica de três retas concorrentes a serem analisadas pela ferramenta quanto a sua posição relativa e apresentação no console do resultado desta análise.



Console

r1&r3 = relpos(r1, r3)

#	Nome	Resultado	Aquisição
0	r1	y = 1x + 0	Cartesiana: y = ax + b
1	r2	y = 0x + 1	Cartesiana: y = ax + b
2	r3	y = -1x + 0	Cartesiana: y = ax + b
3	r1&r2	Concorrentes	m: 1 = 0
4	r1&r3	Concorrentes e ortogonais	m: 1 = -1

Interseção entre retas

Figura 3.38: Tutorial da ferramenta quanto a interseção entre duas retas.

Na sessão acima foi possível visualizar as formas de interação entre retas. Essa funcionalidade foi desenvolvida para obter mais detalhes dessa interação entre as retas.

A seguir serão vistos os mesmos exemplos acima, porém com mais detalhes, caso haja interseção ou não.

Interseção entre retas

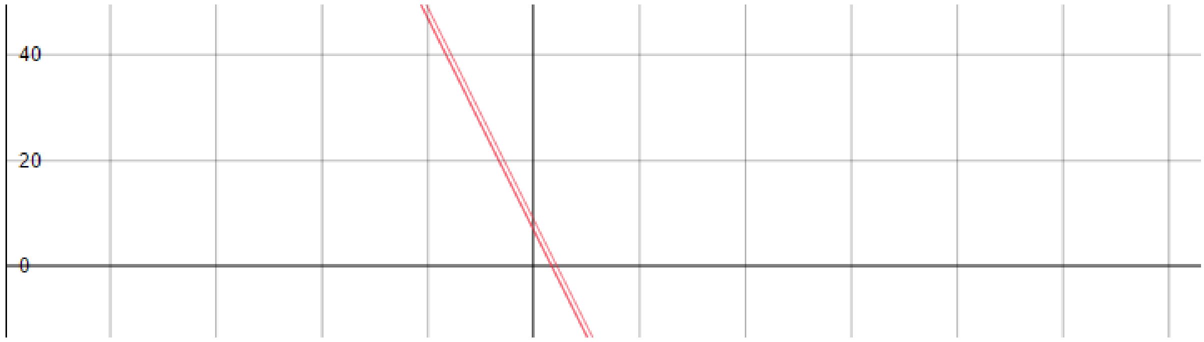
A interseção entre retas é definida pela função abaixo:

- **variavel_resultado = inter(r1,r2)**,

onde:

- **variavel_resultado:** Nome do ponto da interseção entre retas (caso exista)
- **r1:** Reta já existente na memória
- **r2:** Reta já existente na memória

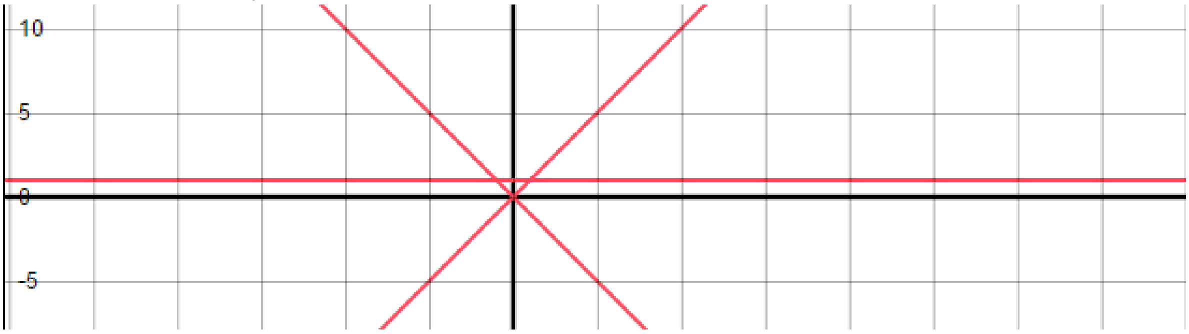
Figura 3.39: Representação gráfica de três retas paralelas e uma análise pela ferramenta quanto à existência de interseção entre elas.



r2&r3 = inter(r2, r3)

#	Nome	Resultado	Aquisição
0	r1	-10x + -5y + 45 = 0	Geral: Ax + By + C = 0
1	r2	2x + 1y + -7 = 0	Geral: Ax + By + C = 0
2	r3	y = -2x + 7	Cartesiana: y = ax + b
3	r1&r2	Não há interseção	Reta1 = Reta2 -> Absurdo
4	r2&r3	Coincide em todos os pontos	Reta1 = Reta2 -> 0

Figura 3.40: Representação gráfica de três retas concorrentes e uma análise pela ferramenta quanto à existência de interseção entre elas.



Console

r1&r3 = inter(r1, r3)

#	Nome	Resultado	Aquisição
0	r1	y = 1x + 0	Cartesiana: y = ax + b
1	r2	y = 0x + 1	Cartesiana: y = ax + b
2	r3	y = -1x + 0	Cartesiana: y = ax + b
3	r1&r2	(1,1)	Reta1 = Reta2 -> (1,1)
4	r1&r3	(0,0)	Reta1 = Reta2 -> (0,0)

CONCLUSÃO

Este trabalho foi realizado com o intuito de auxiliar os estudantes no aprendizado de conceitos abstratos da álgebra linear e da geometria analítica. O objetivo é possibilitar que o aluno alcance um melhor desempenho a partir do auxílio da ferramenta proposta neste trabalho. Dada a limitação de várias ferramentas existentes no mercado, o GeometricVis foi criado com o objetivo de lacunas, como: não gratuidade do *software*, distanciamento da vivência dos estudantes, flexibilidade das entradas de dados e conhecimento prévio de programação necessário para para execução dessas ferramentas. A ferramenta GeometricVis visa trazer para a comunidade de estudantes uma proposta de *software* disponível através da Internet e ainda livre para ser baixado no github para uso *offline*. O maior diferencial desta ferramenta é permitir uma aproximação da realidade dos estudantes com os conceitos elementares da geometria analítica e álgebra linear, possibilitando um recurso acessível e próximo aos assuntos mostrados em livros didáticos ao flexibilizar a entrada de dados para que seja possível inserir dados na ferramenta de forma simplificada, sem precisar de nenhuma adaptação da forma que elas são escritas, como as formas cartesiana, geral e paramétrica da reta. Para utilizar a ferramenta desenvolvida neste trabalho não é necessário saber programar e como foi estruturada para desenvolver o conhecimento, ela fornece dados - como a forma de aquisição dos resultados desenhados na tela ou a fórmula de aquisição do resultado de determinada função - que são importantes para fazer correlações e análises dos elementos inseridos e das funções utilizadas.

Trabalhos Futuros

O trabalho que aqui foi realizado é bastante rico, porém pode ser incrementado ao ser transferido para uma malha tridimensional e ter incorporado ao seu acervo mais elemento tais como: elipses, circunferências, esfera, planos, dentre outros elementos da geometria espacial. Com o incremento de algum dos elementos citados acima é possível implementar também funções de relacionamento entre os elementos já existentes e os elementos novos. É provável que seja necessário também, uma mudança de interface caso a quantidade de funções se estenda muito, por conta da navegabilidade do elemento que comporta o tutorial de uso da ferramenta.

BIBLIOGRAFIA

1 Enem faz escolas reforçarem Química, Matemática e Física, 2016.
Disponível em: <http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,enem-faz-escolas-reforcarem-quimica-matematica-e-fisica,10000081239>
Acesso em: 11 de out. 2016

2 Educação: Desempenho do ensino médio em matemática é o pior desde 2005, 2016.
Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2016/09/1811210-desempenho-do-ensino-medio-em-matematica-e-o-pior-desde-2005.shtml>
Acesso em: 11 de out. 2016

3 Dikovich Lj.(2007). **An Interactive Learning and Teaching of Linear Algebra by Web Technologies: Some Examples**, Journal the Teaching of mathematics, Publisher: The Mathematical Society of Serbia, Beograd, ISSN: 1451-4966, Issue: X_2, Pages: 109 – 116.

4 Geogebra, **Graphing**, 2016.
Disponível em: <https://www.geogebra.org/graphing>
Acesso em: 23 de nov. 2017.

5 MathWorks, **2-D line plot**, 2017.
Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/plot.html>
Acesso em: 23 de nov. 2017.

6 Wolfram Language & System, **Data Visualization**, 2017.
Disponível em:
<http://reference.wolfram.com/language/guide/DataVisualization.html>
Acesso em: 23 de nov. 2017.

7 Van Labeke, Nicolas. **Calques 3D : a microworld for spatial geometry learning**, 2006.
Disponível em: <http://www.calques3d.org/ITS-demo.html>
Acesso em: 23 de nov. 2017.

8 Almeida, Cínthia Soares de; **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.** Brasília.

9 ERNESTO, Ednaldo; **Geometria Axiomática de posição no Espaço Euclidiano.** Recife, 2011.

10 JUNIOR, 2001.
Disponível em: <http://www.junior.te.pt/servlets/Gerais?ID=2429&P=Pais>.
Acessado em:14/06/2017

11 Gonzales, Maria Cristina da Silva et al (2014); **A matemática e os altos índice de reprovação e evasão nos cursos da UNIPAMPA**.
Disponível em: <http://seer.unipampa.edu.br/index.php/siepe/article/view/8308>
Acessado em: 21/06/2017

12 Silva, Amanda Coqueiro et al (2016); **ANALYSIS OF FAILURE RATES IN CALCULUS I AND VAAG DISCIPLINES OF ELECTRICAL ENGINEERING COURSE OF THE FEDERAL INSTITUTE OF BAHIA OF VITÓRIA DA CONQUISTA**
Disponível em: <http://copec.eu/intertech2016/proc/works/55.pdf>
Acessado em: 21/06/2017

13 Geogebra, **Help**, 2016.
Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>
Acesso em: 23 de nov. 2017.

14 MapleSoft, **Plotting and Visualization**, 2016.
Disponível em:
<https://www.maplesoft.com/products/maple/new_features/maple15/visualization.aspx >
Acessado em: 21/06/2017

ASSINATURAS

Gabriela Mota de Lacerda

Paulo Salgado Gomes de Mattos Neto