Um Esquema de Aproximação Eficiente para o Problema do Bin Packing Unidimensional

Proposta de Trabalho de Graduação
Centro de Informática – CIn UFPE

Orientador: Ricardo Martins de Abreu Silva

Aluno: Otávio Lucas Alves da Silva

27 de outubro de 2014

Sumário

1	Introdução	1
2	Contexto	2
2.1	Justificativa e Objetivos	3
3	Metodologia	3
4	Principais Resultados Esperados	3
5	Cronograma de Atividades	4
6	Possíveis Avaliadores	4
7	Assinaturas	4

Resumo

O texto a seguir se trata de uma proposta de Trabalho de Graduação para o curso de Engenharia da Computação, destacando contexto, objetivos e principais atividades a serem realizadas ao decorrer do projeto. As atividades se referem a análise do estado da arte do problema de *Bin Packing* Unidimensional, tão quanto implementação de quatro eficientes algoritmos de aproximação e validação de resultados.

1 Introdução

O problema do *Bin Packing* unidimensional, escopo de atuação do trabalho, é um clássico entre os problemas de otimização NP-difíceis. Dado um conjunto finito de “peças” de tamanho

arbitrário no intervalo $(0,1)$, determinar o número mínimo de *bins* de tamanho unitário que possam empacotar sem sobreposição todos os elementos do conjunto. De maneira mais formal, considere uma tupla (*multiset*) I tal que $I \subset \bigcup_{n \geq 1} (0,1)^n$. Determinar uma partição finita de I , i.e., $B_1, B_2, \dots, B_n$ tal que

$$\sum_{k \in B_i} k \leq 1, \quad k = 1, \dots, n$$

de maneira a minimizar n . São importantes aplicações do problema do Bin Packing unidimensional:

- Armazenamento de arquivos em um disco rígido com blocos de tamanho fixo;
- Número mínimo de pacotes em um protocolo de comunicação;
- Problemas relacionados à estocagem, de modo geral (com restrição unidimensional).

2 Contexto

Usualmente, ao se estudar algoritmos de aproximação para problemas de otimização, existem pelo menos cinco classes básicas para o que chamamos de grau de dificuldade do problema. A classe dos problemas de otimização para os quais existem uma α -aproximação em tempo polinomial (APX)¹ contém a classe de todos os problemas de otimização que admitem um esquema de aproximação de tempo polinomial (PTAS)². O problema do Bin Packing pertence à APX e não é difícil demonstrar que também pertence à PTAS se, e somente se $P = NP$.

Contudo, *Karmakar* e *Karp* descrevem em [5] algoritmos de aproximação eficientes (tempo polinomial e com boa taxa de aproximação) para o problema do Bin Packing das seguintes formas:

- Existe um algoritmo de aproximação A que executa em tempo $O(T(\text{size}(I), n(I)))^3$ que para qualquer instância I , $A(I) \leq \text{opt}(I) + O(\log^2 \text{opt}(I))$
- Existe um algoritmo de aproximação A que executa em tempo $O(T(m(I), n(I)))^4$ tal que para qualquer instância I , $A(I) \leq \text{opt}(I) + O(\log^2 m(I))$
- Para $0 < \alpha < 1$, existe um algoritmo de aproximação A que executa em tempo $O(T(\text{size}^{1-\alpha}(I), n(I)))$ tal que para toda instância I , $A(I) \leq \text{opt}(I) + O(\text{opt}^\alpha(I))$
- Para todo $\varepsilon > 0$, existe um algoritmo de aproximação A que executa em tempo $O(T(\varepsilon^{-2}, n(I)))$ tal que para toda instância I , $A(I) \leq (1 + \varepsilon)\text{opt}(I) + O(\varepsilon^{-2})$

¹Os problemas que admitem um algoritmo com solução $s \leq \alpha \cdot \text{opt}(I)$, onde $\alpha > 1$.

²Um esquema de aproximação de tempo polinomial é um algoritmo cujo valor retornado s obedece $(1 - \varepsilon)\text{opt}(I) \leq s \leq (1 + \varepsilon)\text{opt}(I)$, para todo $\varepsilon > 0$, e o tempo de execução é polinomial em n para ε fixo, sendo n o tamanho da instância I .

³ $\text{size}(I)$ indica a soma dos tamanhos das peças da instância I e $n(I)$ indica o número de peças na mesma instância.

⁴ $m(I)$ indica a quantidade de tamanhos diferentes de peças.

onde $T(m, n)$ é uma função limitada por um polinômio em m, n . O melhor limite encontrado por Karmarkar e Karp é dado por

$$T(m, n) = O(m^8 \log m \log^2 n + m^4 n \log m \log n)$$

2.1 Justificativa e Objetivos

O objetivo inicial do projeto se torna o estudo do artigo em questão e leitura de todas as referências e literaturas básicas de algoritmos de aproximação e programação linear. O projeto tem como segundo objetivo implementar os algoritmos descritos em [5] usando a linguagem C++ e posteriormente, validação e análise de resultados.

Apesar de ter sido publicado em 1982, nenhum dos algoritmos descritos no artigo apresentam implementação em linguagem de programação, se tornando este um grande desafio modelar todas as nuances do problema em uma representação que a máquina seja capaz de entender. Finalmente, daremos um comparativo entre as α -aproximações existentes para o problema de Bin Packing e os quatro algoritmos teóricos, destacando métricas como tempo de execução experimental e assintótico, uso de memória e qualidade na aproximação. Para tal tarefa, poderão ser usados alguns Benchmarks a serem definidos ao longo do desenvolvimento do projeto.

3 Metodologia

A metodologia do projeto acontece em sete principais passos, sendo estes:

- Estudo do problema (pesquisa bibliográfica e análise dos requisitos);
- Modelagem do problema (função objetivo e restrições das variáveis);
- Modelagem da solução (desenvolvimento do algoritmo ao nível de ideias);
- Implementação do algoritmo, em linguagem de programação;
- Testes e validações da implementação, utilizando pequenas, médias e grandes instâncias para a análise de robustez;
- Estudo experimental, referindo ao comportamento das soluções e tempo de execução;
- Escrita do relatório final e elaboração da apresentação.

4 Principais Resultados Esperados

Ao utilizar os métodos da Elipsóide, Simplex e o Método dos Pontos Interiores para resolver instâncias relaxadas do problema (que se torna um problema de otimização linear), esperamos obter resultados factíveis e coerentes com a aproximação obtida em cada um dos quatro esquemas de aproximação citados anteriormente, resolvendo quaisquer problemas de instabilidade numérica que por ventura tenhamos.

Pretendemos também validar experimentalmente a descrição teórica dos algoritmos encontrados no artigo de Karmarkar e Karp.

Além disso, esperamos resultados, na maioria dos casos, tão bons ou melhores que as α -aproximações existentes para o problema do Bin Packing unidimensional, sendo esses os algoritmos Next Fit, First Fit, Worst Fit e Best Fit.

Vale ressaltar que o projeto será realizado em parceria com o cientista David Johnson, acadêmico da Universidade de Columbia, Nova York.

5 Cronograma de Atividades

	Outubro	Novembro	Dezembro	Janeiro	Fevereiro
Revisão Bibliográfica	x	x			
Modelagem dos Algoritmos		x			
Implementação		x	x	x	
Teste e Validação			x	x	
Análise Experimental				x	x
Elaboração de Relatório e Apresentação		x	x	x	x

6 Possíveis Avaliadores

Poderão ser avaliadores do projeto professores das áreas de Teoria da Computação e Algoritmos. Alguns exemplos:

- Kátia Guimarães
- Ruy de Queiroz
- Anjolina Grisi
- Silvio Melo
- Pedro Manhães

7 Assinaturas

Cientes da proposta de Trabalho de Graduação:

Orientador: Ricardo Martins de Abreu Silva

Aluno: Otávio Lucas Alves da Silva

Referências

- [1] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, and M. Protasi. *Complexity and Approximation: Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties*. Springer, 2002.
- [2] Cristina G. Fernandes, Flávio K. Miyazawa, Márcia Cerioli, and Paulo Feofiloff. *Uma Introdução Sucinta aos Algoritmos de Aproximação*. Impa, 2001.
- [3] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Macmillan Higher Education, 1979.
- [4] Howard Karloff. *Linear Programming*. Birkhäuser, 1991.
- [5] Narendra Karmarkar and Richard M. Karp. An efficient approximation scheme for the one-dimensional bin-packing problem. 1982.
- [6] Christos H. Papadimitriou and Keneth Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Publications, 1998.
- [7] Vijay V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, 2002.